ΕΞ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ, ΣΕΜΦΕ, 7 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021
ΟΜΑΔΑ Α

Να απαντήσετε σε ακριβώς ΤΡΙΑ από τα παρακάτω τέσσερα θέματα.

ΘΕΜΑ 1. *(α) Έστω* $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) (0,5 μον) Δείξτε ότι $\dfrac{ax+by}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{a^2+b^2}$ *για κάθε* $(x,y) \neq (0,0)$.

(ii) (1,5 μον) Για ποιές τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ *το* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ax+by}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *υπάρχει;*

(β) (1,5 μον) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *παραγωγίσιμη στο* $(0,0)$ *και τέτοια ώστε* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \ell \in \mathbb{R}$. *Δείξτε ότι* $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ *και* $\ell = 0$.

Λύση: (α) (i) Άμεσο από ανισότητα Cauchy–Schwarz:

$$\frac{ax+by}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(a,b)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

(ii) Αν $a = b = 0$ τότε προφανώς το όριο υπάρχει και είναι ίσο με 0. Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε άλλη τιμή των a και b το όριο δεν υπάρχει. Πράγματι, χρησιμοποιώντας τις ακολουθίες $(1/n, 0)$, $(0, 1/n)$ και $(1/n, 1/n)$ βλέπουμε εύκολα ότι αν υπήρχε το όριο $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ax+by}{\sqrt{x^2+y^2}}$ τότε θα έπρεπε

$$a = b = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$$

και άρα $a = b = 0$.

(β) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ θα έχουμε ότι

(1)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Επίσης η f είναι και συνεχής στο $(0,0)$ και άρα

$$f(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{x^2+y^2} = \ell \cdot 0 = 0.$$

Αντικαθιστώντας στην (1) και λαμβάνοντας ψπόψην ότι $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \ell$ παίρνουμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \ell$$

Από το ερώτημα (α)(ii) (για $a = f_x(0,0)$ και $b = f_y(0,0)$) έπεται ότι $f_x(0,0) = f_y(0,0) = \ell = 0$.□

ΘΕΜΑ 2. *(α) (1 μον) Έστω C^2 συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, $f_{xx}(0,0)=f_{yy}(0,0)=0$ και $f_{xy}(0,0)=1$. Εξετάστε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια*

$$\text{(i)}\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}\qquad \text{(ii)}\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}.$$

(β) (1 μον.) Δίνεται C^1 συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $f(0,0)=0$ και $f_x(x,y)=5x$ και $f_y(x,y)=2y$ για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι $|f(x,y)|\le 25x^2+4y^2$ για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

(γ) (1,5 μον) Εξετάστε ως προς την παραγωγισιμότητα στο $(0,0)$ την συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y)=\dfrac{x^3}{x^2+y^4}$ αν $(x,y)\neq(0,0)$ και $f(0,0)=0$.

Λύση: (α) (i) Το πρώτης τάξης πολυώνυμο Taylor της f με κέντρο το $(0,0)$ είναι το $T_1(x,y)=0$. Από το Θεώρημα Taylor έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-T_1(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

Άρα

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|+|y|}=0 \tag{2}$$

αφού $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|+|y|}\le 1$, για κάθε $(x,y)\neq(0,0)$.

((ii) Το δεύτερης τάξης είναι το $T_2(x,y)=xy$ και από το Θεώρημα Taylor έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-xy}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-T_2(x,y)}{x^2+y^2}=0$$

Απο την σχέση αυτή παρατηρούμε ότι το $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ δεν υπάρχει, αφού διαφορετικά θα έπρεπε να υπήρχε και το $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ που όμως, όπως ελέγχεται εύκολα με τις ακολουθίες $(1/n,0)$ και $(1/n,1/n)$, δεν υπάρχει.

(β) Για $(x,y)=(0,0)$ η ανισότητα προφανώς ισχύει. Έστω $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ με $(x,y)\neq(0,0)$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε ότι υπάρχει (ξ,η) στο ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $(0,0)$ και (x,y) τέτοιο ώστε

$$f(x,y)-f(0,0)=f_x(\xi,\eta)(x-0)+f_y(\xi,\eta)(y-0)=5\xi\cdot x+2\eta\cdot y \tag{3}$$

Από την (3) και από την ανισότητα Cauchy–Schwarz παίρνουμε

$$|f(x,y)|=|f(x,y)-f(0,0)|=|5\xi x+2\eta y|\le\sqrt{25\xi^2+4\eta^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2} \tag{4}$$

Επειδή το (ξ,η) ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $(0,0)$ και (x,y), έπεται ότι $|\xi|\le|x|$ και $|\eta|\le|y|$ και άρα $\sqrt{25\xi^2+4\eta^2}\le\sqrt{25x^2+4y^2}$ οπότε από την (4) $|f(x,y)|\le\sqrt{25x^2+4y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}=25x^2+4y^2$.

(γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ αν και μόνο αν είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ και επιπλέον

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

Έχουμε

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3}=\lim_{x\to 0}1=1$$

και

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=\lim_{y\to 0}0=0$$

Επίσης

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{xy^4}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}$$

για κάθε $(x,y)\neq(0,0)$. Αν $x=0$ τότε προφανώς

$$\frac{xy^4}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}=0 \tag{5}$$

για κάθε $y\neq 0$. Διαφορετικά, από την ανισότητα $a^2+b^2\geq 2ab\geq ab$, $a,b\geq 0$, (για $a=|x|, b=y^2$) έπεται ότι $x^2+y^4\geq |x|y^2$ και άρα

$$\left|\frac{xy^4}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot|y|\leq|y| \tag{6}$$

Από τις (5) και (6) έπεται ότι

$$\left|\frac{xy^4}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq|y|$$

για κάθε $(x,y)\neq(0,0)$ και άρα, από το κριτήριο παρεμβολής,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^4}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.$\square$

ΘΕΜΑ 3. *(α) (1 μον.) Έστω C^2 συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με το $(0,0)$ σαγματικό σημείο και $f(0,0)=0$. Δείξτε ότι υπάρχουν δύο ακολουθίες (x_n,y_n) και (x'_n,y'_n) στον $\mathbb{R}^2$ τέτοιες ώστε $\lim(x_n,y_n)=\lim(x'_n,y'_n)=(0,0)$ και $f(x'_n,y'_n)<0<f(x_n,y_n)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.*

(β) (1 μον.) Βρείτε και ταξινομήστε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y)=x^4-4xy+2y^2-10$.

(γ) (1,5 μον.) Έστω C^2 συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τις ιδιότητες (i) $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, (ii) $f_{xx}(x,y)=f_{yy}(x,y)\geq 0$ και $f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}^2(x,y)=0$, για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι το $(0,0)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου για την f.

Λύση: (α) Αφού το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο δεν είναι τοπικό ακρότατο και άρα σε κάθε περιοχή του $(0,0)$ υπάρχουν (x,y) και (x',y') με $f(x',y')<f(0,0)<f(x,y)\Leftrightarrow f(x'y')<0<f(x,y)$. Άρα για κάθε $n\in\mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε (x_n,y_n) και (x'_n,y'_n) στον ανοικτό δίσκο κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $r_n=1/n$ με $f(x'_n,y'_n)<0<f(x_n,y_n)$. Επειδή $1/n\to 0$ έπεται ότι $\lim_{n\to+\infty}(x_n,y_n)=\lim_{n\to+\infty}(x_n,y_n)=(0,0)$.

(β) Έχουμε $f(x,y) = x^4 - 4xy + 2y^2 - 10$ και άρα

$$f_x(x,y) = 4x^3 - 4y, f_y(x,y) = -4x + 4y,$$
$$f_{xx}(x,y) = 12x^2,\ f_{xy}(x,y) = -4,\ f_{yy}(x,y) = 4$$

και άρα

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y) = 48x^2 - 16 \tag{7}$$

Τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι λύσεις του συστήματος

$$x^3 - y = 0$$
$$-x + y = 0$$

απ΄ όπου

$$y = x$$

και

$$x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x+1 \text{ ή } x = -1$$

Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι τα $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$. Από την (7) έχουμε

$$\Delta(0,0) < 0, \quad \Delta(1,1) = \Delta(-1,-1) > 0$$

Επειδή $f_{xx}(1,1) = f_{xx}(-1,-1) > 0$ έχουμε ότι τα σημεία $(-1,-1)$ είναι τοπικά ελάχιστα για την f ενώ το $(0,0)$ σαγματικό.

(γ) Έστω $(x,y) \neq (0,0)$. Από τον Τύπο Taylor έχουμε ότι υπάρχει (ξ,η) στο ανοικτό ευθ. τμήμα με άκρα τα $(0,0)$ και (x,y) τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right) \\ &= f(0,0) + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right) \end{aligned}$$

Αφού $f_{xx}(x,y) = f_{yy}(x,y) \geq 0$ και $f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) = f_{xy}^2(x,y)$, θέτοντας

$$a = f_{xx}(\xi,\eta) = f_{yy}(\xi,\eta)$$

έχουμε ότι $a \geq 0$ και $|f_{xy}(\xi,\eta)| = a$.

Διακρίνουμε τις επόμενες δυνατές περιπτώσεις:

(1) $a = 0$. Τότε $f_{xy}(\xi,\eta) = 0$ και

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right) = f(0,0).$$

(2) $a > 0$ και $f_{xy}(\xi,\eta) = -a$. Τότε

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right) \\ &= f(0,0) + \frac{a}{2}\left(x^2 - 2xy + y^2\right) = f(0,0) + \frac{a}{2}(x-y)^2 \geq f(0,0) \end{aligned}$$

(3) $a > 0$ και $f_{xy}(\xi,\eta) = a$. Τότε

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right) \\ &= f(0,0) + \frac{a}{2}\left(x^2 + 2xy + y^2\right) = f(0,0) + \frac{a}{2}(x+y)^2 \geq f(0,0) \end{aligned}$$

Άρα σε κάθε περίπωση $f(x,y) \geq (0,0)$. Επειδή το (x,y) είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του $\mathbb{R}^2$ διάφορο του $(0,0)$ έπεται ότι η f έχει στο $(0,0)$ ολικό ελάχιστο. $\square$

ΘΕΜΑ 4. *(α) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή όχι, δικαιολογώντας την απάντησή σας:*

(i) (0,5 μον.) Έστω (a_n) *αύξουσα ακολουθία με* $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$*. Τότε η σειρά* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(a-a_n)$ *συγκλίνει.*

(ii) (0,5 μον) Έστω (a_n) *ακολουθία θετικών αριθμών τέτοια ώστε η ακολουθία* $(n^2 a_n)$ *είναι άνω φραγμένη. Τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει.*

(iii) (0,5 μον) Έστω $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε η σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *αποκλίνει. Τότε η δυναμοσειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *συγκλίνει για* $x \in [-1,1)$ *και αποκλίνει παντού αλλού.*

(β) (i) (1 μον.) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τη σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\sin\frac{1}{n}\right)$.

(ii) (1 μον.) Βρείτε όλα τα $x \in \mathbb{R}$ *για τα οποία η δυναμοσειρά* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$ *συγκλίνει.*

Λύση: (i) Αφού (a_n) αύξουσα με $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$, έπεται ότι η $b_n = a - a_n$ είναι φθίνουσα με $\lim b_n = 0$. Απο κριτήριο Leibniz η εναλλάσσουσα σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(a-a_n)$ συγκλίνει.

(ii) Έχουμε ότι υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ με $0 < n^2 a_n \leq M \Leftrightarrow a_n \leq \dfrac{M}{n^2}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, από κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(iii) Αφού η (a_n) είναι φθίνουσα και μηδενική ακολουθία, η εναλλάσσουσα σειρά $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ συγκλίνει (κριτήριο Leibniz). Άρα η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για $x = -1$ και συνεπώς, αν R είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς, θα πρέπει $R \geq 1$. Από την άλλη μεριά, $R \leq 1$, αφού από υπόθεση η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει που σημαίνει ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ αποκλίνει για $x = 1$. Άρα $R = 1$ και η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in [-1,1)$ και αποκλίνει παντού αλλού.

(β) (i) Έχουμε $\arctan\left(\sin\dfrac{1}{n}\right) > 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης,

$$\lim \frac{\arctan\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} \cdot \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

αφού

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x - \arctan 0}{x - 0} = (\arctan x)'_{x=0} = \frac{1}{1+x^2}\ |_{x=0} = 1$$

και ομοίως

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Επειδή η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει, από οριακό κριτ·ηριο σύγκλισης, έπεται και ότι και η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ δεν συγκλίνει.

(ii) Θέτουμε $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$. Έχουμε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \tag{8}$$

και άρα $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1/e$. Συνεπώς $R = e$ και αν $|x| < e$ η δυναμοσειρά συγκλίνει ενώ αν $|x| > e$ αποκλίνει. Μένει να εξετάσουμε την σύγκλιση στα σημεία $x = e$ και $x = -e$.

Στο $x = e$ η δυναμοσειρά παίρνει την μορφή $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, όπου $b_n = a_n e^n$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \overset{(8)}{=} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n e = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1$$

αφού $(1+\dfrac{1}{n})^n < e$. Άρα η (b_n) είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ δεν συγκλίνει. Συνεπώς η δυναμοσειρά δεν συγκλίνει για $x = e$.

Στο $x = -e$ η δυναμοσειρά παίρνει την μορφή $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n e^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ που πάλι δεν συγκλίνει. Πράγματι, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ συνέκλινε θα έπρεπε $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-1)^n b_n = 0$. Αλλά τότε και $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$, που είναι άτοπο, αφού η (b_n) είναι γνησίως αύξουσα και άρα $b_n \geq b_1 = e$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει σε κάθε $x \in (-e, e)$ και αποκλίνει παντού αλλού.$\square$