# ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ, ΣΕΜΦΕ, 7/09/2023

**Θέμα 1.** (**2,5 μον.**)

(1) (**1 μον.**) Έστω $(a_n)$ ακολουθία πραγματικών αριθμών με $a_n \to 0$. Ισχύει τότε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει? Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(2) (**1,5 μον.**) Έστω $a > 0$ και έστω $a_n = \dfrac{a^n n!}{n^n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(α΄) (**1 μον.**) Βρείτε το $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ και δείξτε ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει όταν $a < e$ και αποκλίνει όταν $a > e$.

(β΄) (**0,5 μον.**) Τι συμβαίνει όταν $a = e$;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ:**

(2) (α΄) Έχουμε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!a^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!a^n}{n^n}} = \frac{a^{n+1}}{a^n}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} = a\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot (n+1)$$
$$= a\frac{n^n}{(n+1)^n}$$
$$= a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

και άρα

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{a}{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{a}{e}$$

Συνεπώς, από το κριτήριο Λόγου η σειρά

(1) συγκλίνει αν $\dfrac{a}{e} < 1 \Leftrightarrow a < e$ και

(2) αποκλίνει αν $\dfrac{a}{e} > 1 \Leftrightarrow a > e$.

(β΄) Αν $a = e$ τότε $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{a}{e} = 1$ και το κριτήριο Λόγου δεν μπορεί να αποφανθεί. Όμως, επειδή η ακολουθία $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ είναι γνησίως αύξουσα και συγκλίνει στον $e$, έχουμε $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε η $(a_n)$ είναι γνησίως αύξουσα. Ειδικότερα $a_n \geq a_1 > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα το $\lim_{n\to\infty} a_n$ είναι τουλάχιστον ίσο με $a_1 > 0$. Συνεπώς, αποκλείεται η $(a_n)$ να συγκλίνει στο 0, οπότε η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^n n!}{n^n}$ αποκλίνει.

**Θέμα 2. (2 μον.)**

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ για $(x,y) \neq (0,0)$.

(1) **(1 μον.)** Δείξτε ότι όλες οι κατά κατεύθυνση παράγωγοι της $f$ στο $(0,0)$ υπάρχουν.

(2) **(1 μον.)** Εξετάστε αν η $f$ είναι συνεχής στο $(0,0)$.

**Απάντηση:** (1) Έστω $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$ μια κατεύθυνση στο $\mathbb{R}^2$. Τότε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0+tu_1, 0+tu_2) - f(0,0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(tu_1, tu_2)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3 u_1^2 u_2}{t^5 u_1^4 + t^3 u_2^2}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t^3 u_1^2 u_2}{t^3(t^2 u_1^4 + u_2^2)} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{u_1^2 u_2}{t^2 u_1^4 + u_2^2}
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να συμβεί $u_1 = u_2 = 0$ αφού $u_1^2 + u_2^2 = 1$. Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

(α) $u_2 = 0$. Τότε $u_1^2 = 1$ και $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{0}{t^2} = \lim\limits_{t\to 0} 0 = 0$.

(β) $u_2 \neq 0$. Τότε $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{u_1^2 u_2}{t^2 u_1^4 + u_2^2} = \dfrac{u_1^2 u_2}{u_2^2} = \dfrac{u_1^2}{u_2}$.

(2) Κατά μήκος της ευθείας $x = y = t$, $t \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 t}{t^4 + t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{t^4 + t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t^2 + 1} = 0$$

ενώ κατά μήκος της παραβολής $x = t$ και $y = t^2$, $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t\to 0} f(t,t^2) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 t^2}{t^4 + t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2}$$

και άρα το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει. Ειδικότερα, η $f$ δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

**Θέμα 3. (3 μον.)**

(1) **(1,5 μον.)** Μελετήστε ως προς τα τοπικά ακρότατα την συνάρτηση

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$$

(2) **(1,5 μον.)** Δείξτε ότι υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : I \to (0, +\infty)$, όπου $I$ ένα ανοικτό υποδιάστημα του $(0, +\infty)$ με κέντρο το $x_0 = 1$, με τις ιδιότητες $f(x) = x^{f(x)}$ για κάθε $x \in I$ και $f(1) = f'(1) = 1$.

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ:** (1) Έχουμε,

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4x^3 - 4x + 4y \\ f_y(x,y) &= 4y^3 - 4y + 4x \\ f_{xx}(x,y) &= 12x^2 - 4 \\ f_{yy}(x,y) &= 12y^2 - 4 \\ f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 4 \end{aligned}$$

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία λύνοντας το σύστημα

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ f_y(x,y) &= 4y^3 - 4y + 4x = 0 \end{aligned}$$

με πρόσθεση κατά μέλη δίνει ότι $x^3 = -y^3$ ισοδύναμα

$$y = -x$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση βρίσκουμε ότι $4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2) = 0$ και άρα

$$x = 0 \text{ ή } x = \sqrt{2} \text{ ή } x = -\sqrt{2}$$

Συνεπώς τα πιθανά τοπικά ακρότατα είναι τα σημεία

$$(0,0), \quad (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \quad \text{και} \quad (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Έχουμε

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y) f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2 = (12x^2 - 4) \cdot (12y^2 - 4) - 16$$

• $\Delta(0,0) = 0$ και άρα δεν μπορούμε να αποφανθούμε από το Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου για το αν το $(0,0)$ είναι ή όχι τοπικό ακρότατο. Όμως παρατηρούμε ότι

(α) $f(0,0) = 0$,

(β) για κάθε $0 < x \leq 1$, είναι $f(x,0) = x^4 - 2x^2 < 0$ και

(γ) για κάθε $x = y \neq 0$ είναι $f(x,y) = f(x,x) = 2x^4 > 0$.

Τα παραπάνω δείχνουν ότι *σε κάθε περιοχή του* $(0,0)$ μπορούμε να βρούμε δύο σημεία που η τιμή της $f$ στο ένα από αυτά να είναι μικρότερη του $f(0,0)$ ενώ η τιμή στο άλλο να είναι μεγαλύτερη του $f(0,0)$, πράγμα που σημαίνει ότι το $(0,0)$ **δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου**.

- Όπως εύκολα βλέπουμε

$$\Delta(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \Delta(\sqrt{2}, \sqrt{2}) > 0$$

και $f_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) > 0$ οπότε στα σημεία $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ και $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ η $f$ έχει τοπικό ελάχιστο. Άρα η $f$ έχει ακριβώς δύο τοπικά ακρότατα που είναι **και τα δύο τοπικά ελάχιστα**.

(2) Θέτοντας $y = f(x)$ έχουμε $y = x^y \Leftrightarrow 2x^y - y = 0$. Θέτουμε

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$$

και ορίζουμε την συνάρτηση $F : A \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$F(x, y) = x^y - y$$

Έχουμε,

$$F_x(x, y) = yx^{y-1} \text{ και } \quad F_y(x, y) = \ln x \cdot x^y - 1$$

και άρα η $F$ είναι $C^1$. Επίσης,

$$F(1, 1) = 0 \;\text{ και } \quad F_y(1, 1) = -1 \neq 0$$

Από το Θεώρημα της Πεπλεγμένης συνάρτησης η $F$ λύνεται τοπικά στο $(1, 1)$ ως προς $y$, δηλαδή υπάρχουν ανοικτά διαστήματα $I$ και $J$ με κέντρα τα $x_0 = 1$ και $y_0 = 1$ αντίστοιχα και μια $C^1$ συνάρτηση $f : I \to J$ τέτοια ώστε $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$, για κάθε $x \in I$ και $y \in J$. Συνεπώς $f(1) = 1$ και $F(x, f(x)) = 0 \Leftrightarrow x^{f(x)} - f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^{f(x)}$, για κάθε $x \in I$. Τέλος, γνωρίζουμε ότι

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

για κάθε $x \in I$ και άρα

$$f'(1) = -\frac{F_x(1, 1)}{F_y(1, 1)} = -\frac{1}{1} = 1$$

**Θέμα 4. (2,5 μον.)**
Έστω $f(x,y)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα $f(x_0+t, y_0+t) = f(x_0, y_0)$ για όλα τα $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ και $t \in \mathbb{R}$.

(1) **(1 μον.)** Δείξτε ότι για κάθε $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ισχύει ότι $f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) = 0$.

(2) **(1 μον.)** Αν $f_x(0,0) \neq 0$ δείξτε ότι το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ δεν υπάρχει.

(3) **(0,5 μον.)** Αν η $f$ είναι ειδικότερα $C^2$ (δηλ. έχει συνεχείς μερικές παραγώγους εως και δεύτερης τάξης) δείξτε ότι $f_{xx}(x,y) = f_{yy}(x,y) = -f_{xy}(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

**Απάντηση:** (α΄ τρόπος) Έστω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$F(t) = f(x_0+t, y_0+t)$$

Από τον Κανόνα Αλυσίδας για την καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ με $x(t) = x_0 + t$ και $y(t) = y_0 + t$, έχουμε

$$\begin{aligned} F'(t) &= f_x(x_0+t, y_0+t) \cdot x'(t) + f_y(x_0+t, y_0+t) \cdot y'(t) \\ &= f_x(x_0+t, y_0+t) + f_y(x_0+t, y_0+t) \end{aligned}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Από την άλλη μεριά, έχουμε $F(t) = f(x_0, y_0) = c$ και άρα

$$F'(t) = 0$$

Συνεπώς θα πρέπει

(1) $$f_x(x_0+t, y_0+t) + f_y(x_0+t, y_0+t) = 0$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Θέτοντας στην (1) $t = 0$ έχουμε ότι

$$f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) = 0$$

(β΄ τρόπος) Από τον ορισμό της παραγωγισιμότητας της $f$ έχουμε

(2) $$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

και άρα θέτοντας $h = k = t$ και χρησιμοποιώντας ότι $f(x_0+t, y_0+t) = f(x_0, y_0)$ για όλα τα $t \in \mathbb{R}$, παίρνουμε

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t, y_0+t) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)t - f_y(x_0, y_0)t}{\sqrt{2}|t|} = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f_x(x_0, y_0)t + f_y(x_0, y_0)t}{|t|} = 0 \Rightarrow f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) = 0$$

(2) Θέτουμε $f_x(0,0) = a \neq 0$. Τότε, από το (1) έχουμε $f_y(0,0) = -a$ και από τον ορισμό της παραγωγισιμότητας της $f$ στο $(0,0)$ έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - ax + ay}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left( \frac{f(x,y) - f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} - a\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) = 0$$

Συνεπώς, αν το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y) - f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = L$ υπήρχε θα είχαμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{L}{a}$$

Όμως το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ δεν υπάρχει. Πράγματι, για $x = y = t$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ ενώ για $x = t > 0$ και $y = -t$ παίρνουμε $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

(3) Από το (1) έχουμε $f_x + f_y = 0 \Rightarrow f_x = -f_y$. Παραγωγίζοντας ως προς $x$ παίρνουμε

(3) $$f_x = -f_y \Rightarrow f_{xx} = -f_{yx}$$

Ομοίως, $f_x + f_y = 0 \Rightarrow f_y = -f_x$ και παραγωγίζοντας ως προς $y$ παίρνουμε,

(4) $$f_y = -f_x \Rightarrow f_{yy} = -f_{xy}$$

Επειδή η $f$ είναι $C^2$, από το Θεώρημα Schwarz έχουμε $f_{xy} = f_{yx}$ και άρα από τις (3) και (4) παίρνουμε ότι $f_{xx} = f_{yy} = -f_{xy}$.