



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτά Μαθηματικά

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

3η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια Παράδοσης: 22/6/2023

Θέμα 1 (Συνδυαστική, 3.4 μον.). Εξετάζουμε τους τρόπους να μοιραστούν βιβλία Διακριτών Μαθηματικών σε 1000 φοιτητές. Στα υποερωτήματα που ακολουθούν, οι φοιτητές θεωρούνται διακεκριμένοι και κανένας φοιτητής δεν μπορεί να πάρει δύο ή περισσότερα βιβλία Διακριτών Μαθηματικών.

1. Με πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν 200 αντίτυπα Hunter στους 1000 φοιτητές;
2. Με πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν 200 αντίτυπα Hunter, 250 αντίτυπα Rosen, 100 αντίτυπα Liu, και 50 αντίτυπα Err στους 1000 φοιτητές;
3. Έχουμε 1000 αντίτυπα από καθένα από τα βιβλία των Hunter, Rosen, Liu και Err. Με πόσους τρόπους μπορούν να επιλέξουν βιβλίο Διακριτών Μαθηματικών οι 1000 φοιτητές;
4. Έχουμε 1000 αντίτυπα από καθένα από τα βιβλία των Hunter, Rosen, Liu και Err. Με πόσους τρόπους μπορούν να επιλέξουν βιβλίο Διακριτών Μαθηματικών οι 1000 φοιτητές, αν πρέπει να διατεθεί τουλάχιστον ένα αντίτυπο από κάθε βιβλίο;
5. Έχουμε 4 (διακεκριμένα) σημεία διανομής όπου μοιράζεται μόνο το βιβλίο του Hunter. Με πόσους τρόπους μπορούν να κατανεμηθούν 1000 αντίτυπα του βιβλίου στα 4 σημεία διανομής, ώστε κάθε σημείο να μοιράσει 350 αντίτυπα το πολύ;
6. Έχουμε 4 σημεία διανομής, καθένα μοιράζει ένα από τα βιβλία των Hunter, Rosen, Liu, Err. Σε κάθε σημείο διανομής υπάρχουν διαθέσιμα 1000 αντίτυπα από το βιβλίο που μοιράζεται. Με πόσους τρόπους μπορούν να σταθούν οι 1000 φοιτητές στις 4 ουρές αναμονής για να πάρουν βιβλίο; Με πόσους τρόπους μπορεί να συμβεί αυτό, αν κάθε σημείο διανομής πρέπει να μοιράσει τουλάχιστον 5 βιβλία;
7. Όπως στο (6) (χωρίς τον περιορισμό για τουλάχιστον 5 βιβλία), αλλά σε κάθε σημείο διανομής υπάρχουν διαθέσιμα μόνο 350 αντίτυπα από το βιβλίο που μοιράζεται.

Θέμα 2 (Συνδυαστική, Γεννήτριες Συναρτήσεις, 2.8 μον.). Στις προηγούμενη εξεταστική, είχαμε διαθέσιμα τέσσερα αμφιθέατρα, τα 1 – 4, για το μάθημα “Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα”. Στην εξέταση συμμετείχαν 190 φοιτητές. Στο Αμφ. 1 είχαμε 80 φοιτητές, στα αμφιθέατρα 2 και 3 είχαμε 35 φοιτητές στο καθένα, και στο Αμφ. 4 είχαμε 40 φοιτητές. Είχαμε μαζί μας 155 αντίτυπα θεμάτων τύπου A και μόλις 35 αντίτυπα θεμάτων τύπου B.

1. Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε τα δύο είδη θεμάτων στα 4 αμφιθέατρα, αν μας ενδιαφέρει μόνο πόσα θέματα κάθε είδους θα έχουμε σε κάθε αμφιθέατρο.
2. Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε τα δύο είδη θεμάτων, αν μας ενδιαφέρει ο τύπος του θέματος που θα πάρει κάθε φοιτητής (ως συνήθως, οι φοιτητές θεωρούνται διακεκριμένοι).
3. Αν η κατανομή των θεμάτων τύπου B στα αμφιθέατρα είναι τυχαία (βλ. κάθε αντίγραφο τύπου B καταλήγει σε καθένα από τα 4 αμφιθέατρα ισοπίθανα και ανεξάρτητα από τα άλλα αντίγραφα τύπου B), ποια είναι η πιθανότητα να μην έχουμε θέματα τύπου B (i) στο Αμφ. 2, (ii) σε τουλάχιστον ένα από τα Αμφ. 2 ή 3, και (iii) σε τουλάχιστον ένα αμφιθέατρο;
4. Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει τους διαφορετικούς τρόπους να μοιράσουμε τους δύο τύπους θεμάτων στα τέσσερα αμφιθέατρα, αν μας ενδιαφέρει ο τύπος του θέματος που θα πάρει κάθε φοιτητής και θέλουμε να έχουμε τουλάχιστον 10 και άρτιο πλήθος θεμάτων τύπου A στα Αμφ. 2, 3 και 4, και τουλάχιστον 15 θέματα τύπου A στο Αμφ. 1.

Θέμα 3 (Γεννήτριες Συναρτήσεις, 1.4 μον.). Θεωρούμε n φοιτητές που απαντούν, ο καθένας ανεξάρτητα, σε μια ερώτηση. Για κάθε φοιτητή i , έστω $p_i \in [0, 1]$ η πιθανότητα να απαντήσει σωστά.

(α) Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει την πιθανότητα ακριβώς k φοιτητές να απαντήσουν σωστά. Ποια είναι η τιμή του συντελεστή (και η ζητούμενη πιθανότητα);

(β) Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει την πιθανότητα (i) το πολύ k φοιτητές να απαντήσουν σωστά, και (ii) τουλάχιστον k φοιτητές να απαντήσουν σωστά.

Θέμα 4 (Γεννήτριες Συναρτήσεις, 2.4 μον.). (α) Θέλουμε να υπολογίσουμε το πλήθος των τρόπων να μοιράσουμε 500 διαφορετικά βιβλία στις βιβλιοθήκες 8 Ελληνικών Πανεπιστημίων. Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει το ζητούμενο, αν θεωρήσουμε ότι κάθε βιβλιοθήκη πρέπει να πάρει τουλάχιστον 20 βιβλία και το πολύ 100 βιβλία, και:

1. δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία τα βιβλία φτάνουν στις βιβλιοθήκες.
2. έχει σημασία η σειρά με την οποία τα βιβλία φτάνουν στις βιβλιοθήκες.

(β) Να υπολογίσετε το πλήθος των δεκαδικών συμβολοσειρών μήκους $n \geq 4$ στις οποίες καθένα από τα ψηφία 0 και 1 εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά, καθένα από τα ψηφία 2 και 4 έχει άρτιο πλήθος εμφανίσεων, καθένα από τα ψηφία 7 και 9 έχει περιττό πλήθος εμφανίσεων, και δεν υπάρχουν περιορισμοί για το πλήθος των εμφανίσεων των υπόλοιπων ψηφίων (δηλ. των 3, 5, 6 και 8). *Σημείωση:* Αν δυσκολευτείτε στις πράξεις, είναι αποδεκτό να χρησιμοποιήσετε κατάλληλο λογισμικό.

Παράδοση. Οι εργασίες πρέπει να αναρτηθούν στο helios.ntua.gr/mod/assign/view.php?id=24410 μέχρι τα μεσάνυχτα της Πέμπτης 22/6.

Καλή Επιτυχία!