

# Επίπεδα Γραφήματα

---

Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**  
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

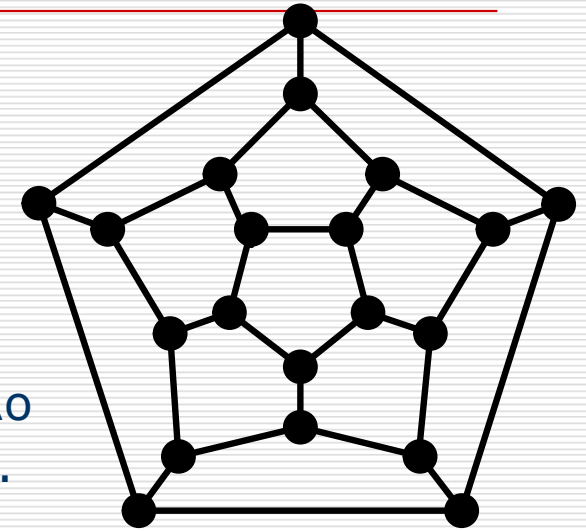
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



# Επίπεδα Γραφήματα

- **Επίπεδο** ένα γράφημα που **μπορεί** να ζωγραφιστεί στο επίπεδο χωρίς να τέμνονται οι ακμές του.
- Επίπεδη αποτύπωση ορίζει **όψεις** (faces).
  - Περιοχή επιπέδου που ορίζεται από (απλό) κύκλο και δεν μπορεί να διαιρεθεί σε μικρότερες όψεις.
  - **Εσωτερικές** και **εξωτερική** όψη.
  - $f = \#$ όψεων επίπεδου γραφήματος.
- **Τύπος του Euler** για συνεκτικά επίπεδα γραφ.:  $n + f = m + 2$ 
  - $\#$ όψεων είναι **αναλλοίωτη ιδιότητα**, δεν εξαρτάται από αποτύπωση!
  - Γενίκευση:  $n + f = m + k + 1$ ,  $k = \#$ συνεκτικών συνιστωσών.



# Επίπεδα Γραφήματα

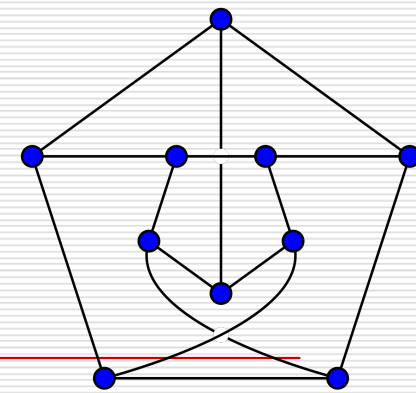
- Μέγιστος αριθμός ακμών απλού επίπεδου γραφήματος.
  - Απλό: κάθε όψη ορίζεται από τουλάχιστον 3 ακμές.
  - Κάθε ακμή «ανήκει» σε μία ή δύο όψεις:
    - Αν ανήκει σε κύκλο: σύνορο δύο όψεων.
    - Διαφορετικά, «ανήκει» σε μία όψη.
  - (Κάθε ακυκλικό γράφημα είναι επίπεδο με μία όψη, την εξωτερική).

$$3f \leq \sum_{f \in \text{όψεις}} \# \text{ακμών}(f) \leq 2m \Rightarrow f \leq 2m/3$$

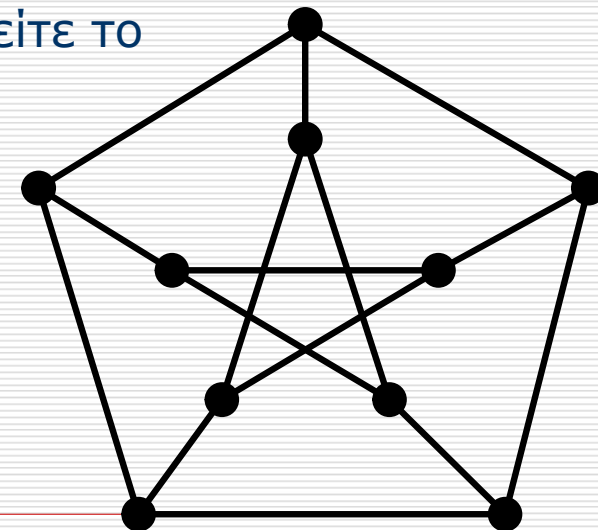
$$m + 2 = n + f \leq n + 2m/3 \Rightarrow m/3 \leq n - 2 \Rightarrow m \leq 3n - 6$$

- Υπάρχει συνεκτικό απλό επίπεδο γράφημα με  $m = 3n - 6$ .
  - Όλες του οι όψεις είναι τρίγωνα.
- Απλό **διμερές** επίπεδο γράφημα:  $m \leq 2n - 4$ .

# Επίπεδα Γραφήματα

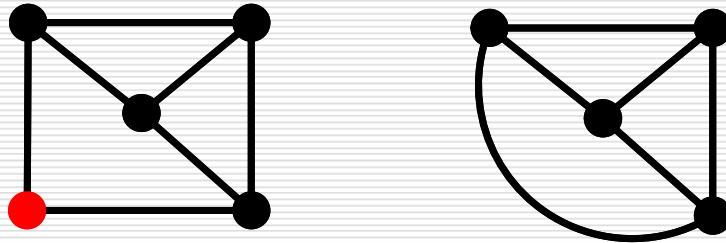


- Άρα αν απλό γράφημα έχει  $m > 3n-6$  ( $m > 2n-4$  αν διμερές), **δεν** είναι **επίπεδο**.
  - Τα  $K_5$  και  $K_{3,3}$  **δεν** είναι **επίπεδα**.
  - Το **συμπληρωματικό** του γραφ. **Petersen** **δεν** είναι **επίπεδο**.
  - Κάθε απλό επίπεδο γράφημα  $G$  έχει  $\delta(G) \leq 5$ .
    - Π.χ. χρησιμοποιείται για να δείξουμε **επαγωγικά** ότι κάθε επίπεδο γράφημα έχει **χρωματικό αριθμό**  $\leq 5$ .
  - Κάθε γράφημα  $G$  με  $n \geq 11$  κορυφές, είτε το  $G$  είτε το **συμπληρωματικό** του **δεν** είναι **επίπεδο**.
  - **Crossing number**  $cr(G)$ : ελάχιστο πλήθος διασταυρώσεων ακμών σε μια επίπεδη αποτύπωση του  $G$ .
    - $cr(G) \geq m - 3n + 6$



# Ομοιομορφικά Γραφήματα

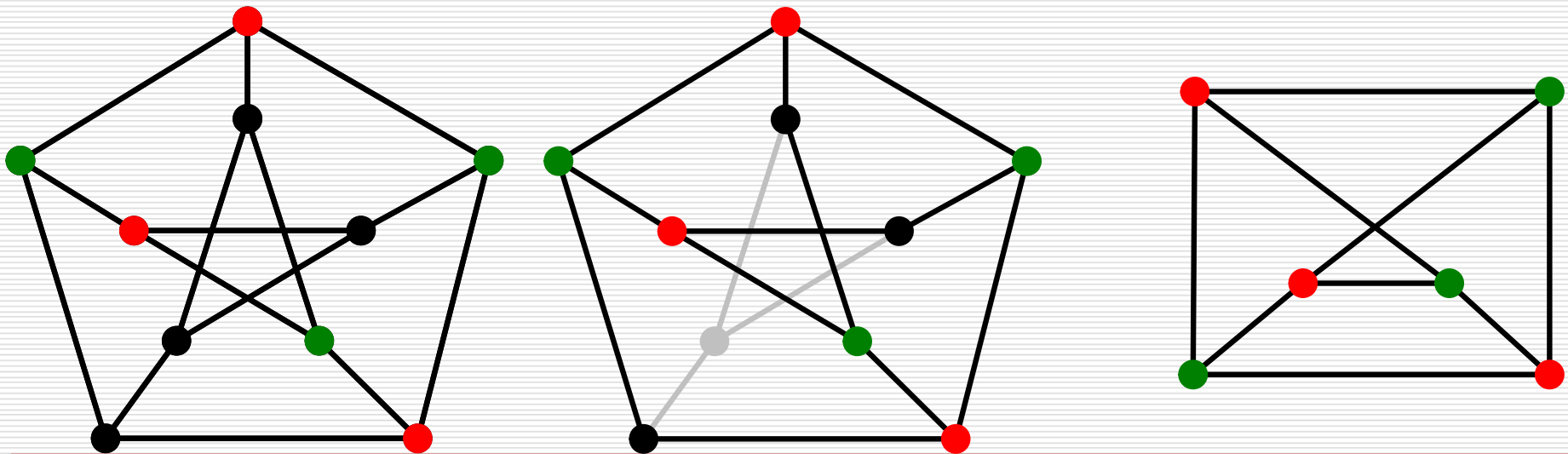
- **Απλοποίηση σειράς:** απαλοιφή κορυφών βαθμού 2 (δεν επηρεάζουν επιπεδότητα).



- Γραφήματα  $G$  και  $H$  **ομοιομορφικά** αν μπορούν να **καταλήξουν** **ισομορφικά** με διαδοχική εφαρμογή **απλοποιήσεων σειράς**.
  - Ομοιομορφικά μπορεί να «διαφωνούν» σε αναλλοίωτες ιδιότητες, αλλά «συμφωνούν» σε επιπεδότητα.
  - Ομοιομορφικά «συμφωνούν» σε κύκλο Euler και κύκλο Hamilton;

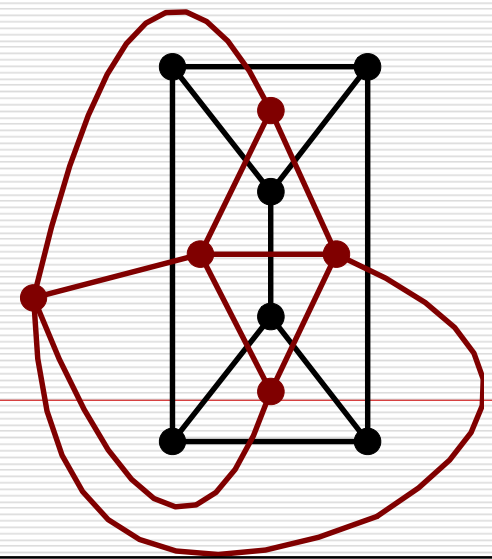
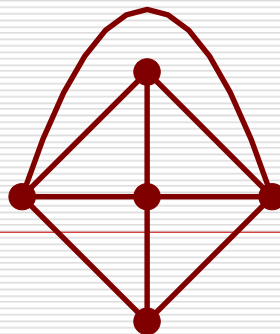
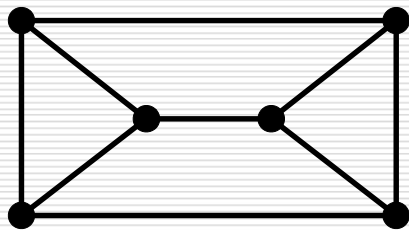
# Θεώρημα Kuratowski

- **Θ. Kuratowski:** Γράφημα επίπεδο ανν δεν περιέχει υπογράφημα ομοιομορφικό με  $K_5$  ή  $K_{3,3}$ .
  - Ένα γράφημα δεν είναι επίπεδο ανν μπορούμε με απλοποιήσεις (διαγραφές κορυφών και ακμών, απλοποιήσεις σειράς) να καταλήξουμε σε  $K_5$  ή  $K_{3,3}$ .



# Δυϊκό Επίπεδο Γραφήματος

- Δυϊκό γράφημα  $G^*$  ενός επίπεδου γραφήματος  $G$  έχει:
  - Μια κορυφή για κάθε όψη του  $G$ .
  - Μια ακμή  $e^*$  για κάθε ακμή  $e$  του  $G$ . Η  $e^*$  συνδέει κορυφές που αντιστοιχούν στις όψεις όπου ανήκει η  $e$ .
    - Η  $e^*$  είναι ανακύκλωση αν η ακμή  $e$  είναι γέφυρα.
  - Κάθε όψη του  $G^*$  περιλαμβάνει μια κορυφή του  $G$ .
  - Το  $G^*$  είναι επίπεδο και το δυϊκό του  $G^*$  είναι το  $G$ .
  - Το  $G^*$  μπορεί να μην είναι απλό. Ο βαθμός κάθε κορυφής του  $G^*$  είναι ίσος με τον βαθμό της αντίστοιχης όψης του  $G$ .
    - Συνεκτικό επίπεδο  $G$  είναι διμερές αν  $G^*$  έχει κύκλο Euler.



# Πλατωνικά Γραφήματα

- **Πλατωνικό** (απλό μη κατευθυνόμενο) γράφημα: **επίπεδο**, όλες οι **κορυφές βαθμού  $d$** , και όλες οι **όψεις βαθμού  $h$**  ( $d, h \geq 3$ ).

