Θεωρία Γραφημάτων: Ορολογία και Βασικές Έννοιες

Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**

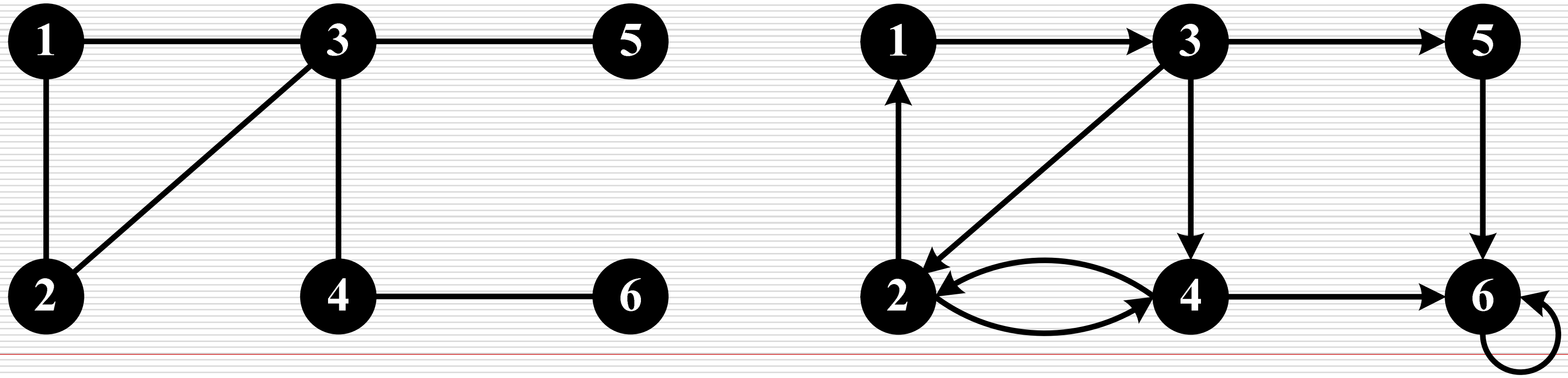
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Γραφήματα

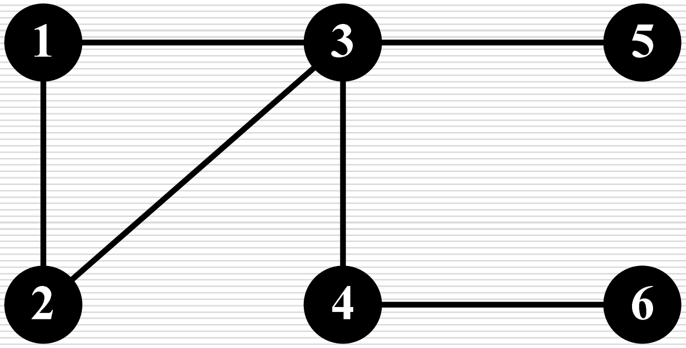
- Μοντελοποίηση πολλών σημαντικών προβλημάτων (π.χ. τηλεπικοινωνιακά, οδικά, ηλεκτρικά, κοινωνικά δίκτυα – συνεκτικότητα, διαδρομές, δρομολόγηση, ανάθεση πόρων, layouts, …).
- Γράφημα G(V, E): V κορυφές
  E ακμές (ζεύγη σχετιζόμενων κορυφών)
  - Τάξη |V| = |V(G)| = n και μέγεθος |E| = |E(G)| = m.
  - Κατευθυνόμενα και μη-κατευθυνόμενα γραφήματα.
  - Βάρη (μήκη) στις ακμές $G(V, E, w)$, $w : E \mapsto \mathbb{R}$

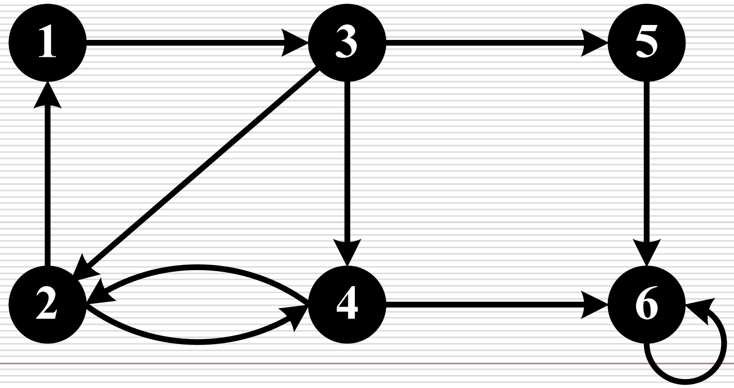


Γραφήματα

- Δεδομένου γραφήματος G(V, E):
  - Γειτονιά κορυφής v: $N(v) = \{u \in V : \{v, u\} \in E\}$
    - Επεκταμένη γειτονιά κορυφής v: $N^+(v) = N(v)+v$
  - Γειτονιά συνόλου κορυφών X:

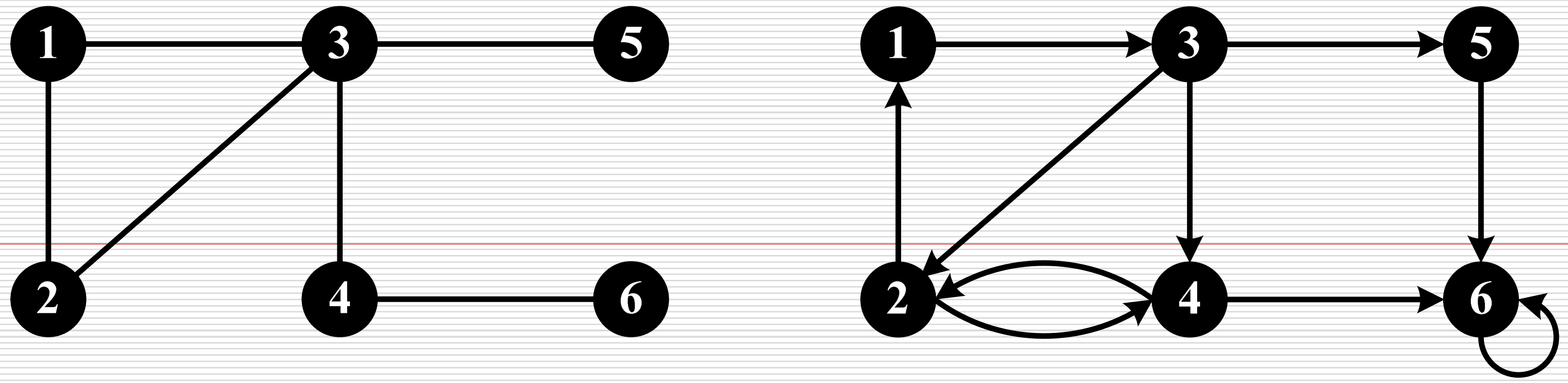
    $N(X) = \{u \in V \setminus X : \{v, u\} \in E \text{ για κάποια κορυφή } v \in X\}$
- Απλό γράφημα: χωρίς ανακυκλώσεις ή παράλληλες ακμές.
  - Θεωρούμε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα, εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά.





Βαθμός Κορυφής

- Βαθμός κορυφής v: deg(v) = |N(v)|
  (#ακμών που προσπίπτουν στη v).
  - Κατευθυνόμενα: έσω-βαθμός και έξω-βαθμός.
  - Μη-κατευθυνόμενο G(V, E): $\sum_{v\in V} \deg(v) = 2\,|E|$
  - Κάθε γράφημα έχει άρτιο πλήθος κορυφών περιττού βαθμού.
  - δ(G) / Δ(G): ελάχιστος (μέγιστος) βαθμός κορυφής στο G.
  - k-κανονικό γράφημα: όλες οι κορυφές βαθμού k.
- Νδο σε κάθε απλό γράφημα, δύο κορυφές έχουν ίδιο βαθμό.
  - Έχουμε n κορυφές και n-1 πιθανές τιμές βαθμού για κάθε κορυφή.
  - Πιθανές τιμές είτε {0, 1, …, n-2} είτε {1, 2, …, n-1}.

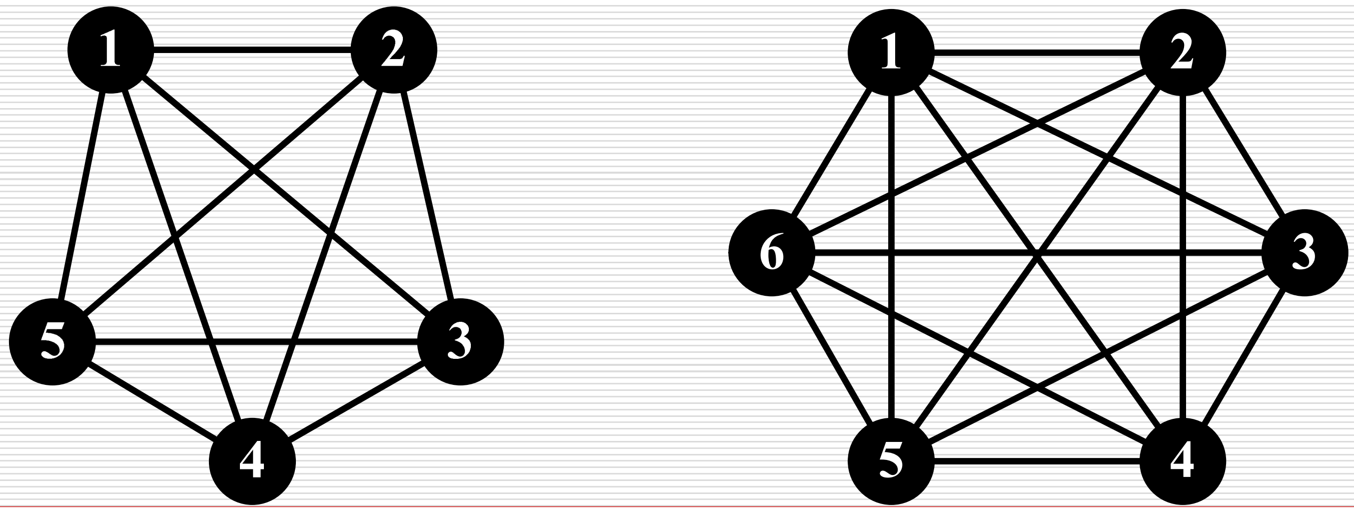


Παραδείγματα

- Υπάρχει(;) απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα με:
  - 8 κορυφές: 1 βαθμού 2, 2 βαθμού 3, 4 βαθμού 4, και 1 βαθμού 5.
    - Όχι, άθροισμα βαθμών περιττός (ή ισοδύναμα, περιττό πλήθος κορυφών με περιττό βαθμό).
  - 6 κορυφές: 2 βαθμού 2, 2 βαθμού 3, 1 βαθμού 4, και 1 βαθμού 6.
    - Όχι, σε κάθε απλό γράφημα G με n κορυφές, $\Delta(G) \leq n - 1$.
  - 5 κορυφές: 1 βαθμού 2 και 4 βαθμού 4.
    - Όχι, αφού οι 4 κορυφές με βαθμό 4 συνδέονται με όλες τις άλλες, ο ελάχιστος βαθμός κορυφής πρέπει να είναι 4.
  - 9 κορυφές: 1 βαθμού 1, 2 βαθμού 3, 2 βαθμού 4, 1 βαθμού 5, 1 βαθμού 6, και 2 βαθμού 8.
    - Όχι, αφού οι 2 κορυφές με βαθμό 8 συνδέονται με όλες τις άλλες, ελάχιστος βαθμός κορυφής πρέπει να είναι 2.

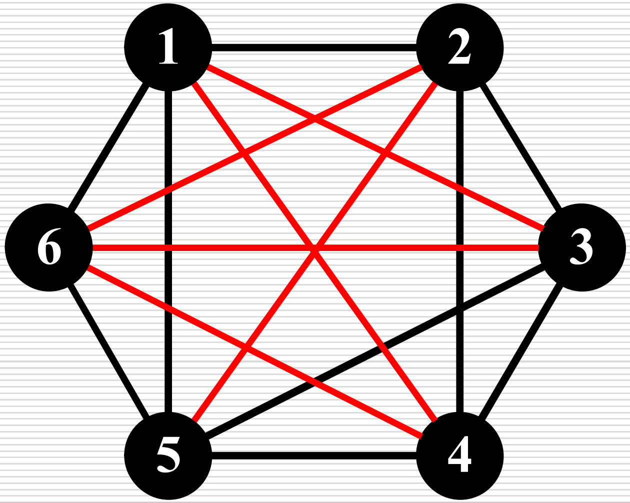
Πλήρες και Συμπληρωματικό Γράφημα

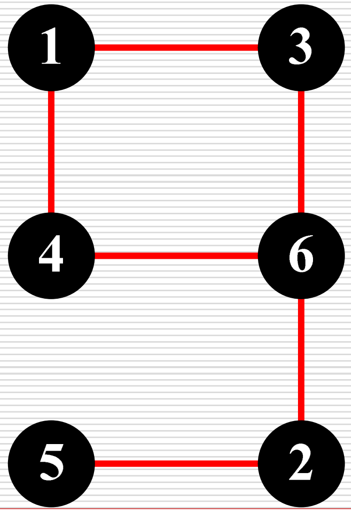
- Πλήρες γράφημα n κορυφών: K_n
  - Όλα τα ζεύγη κορυφών συνδέονται με ακμή: $n(n-1)/2$ ακμές.



Πλήρες και Συμπληρωματικό Γράφημα

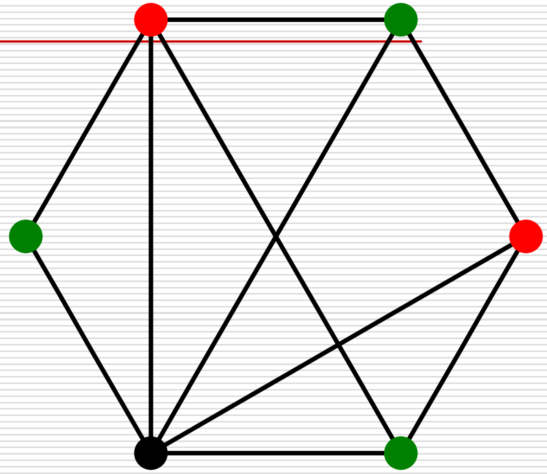
- Πλήρες γράφημα n κορυφών: K_n
  - Όλα τα ζεύγη κορυφών συνδέονται με ακμή: n(n-1)/2 ακμές.
- Συμπληρωματικό γράφημα $\overline{G}$ γραφήματος G.
  - Ίδιο σύνολο κορυφών. Ακμές: όσες δεν υπάρχουν στο G.
  - Συμπληρωματικό του $\overline{G}$: αρχικό γράφημα G.

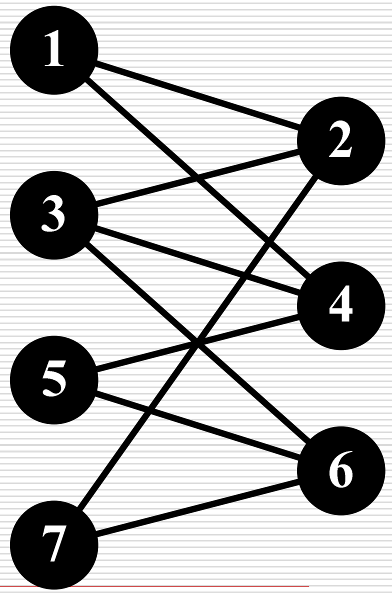




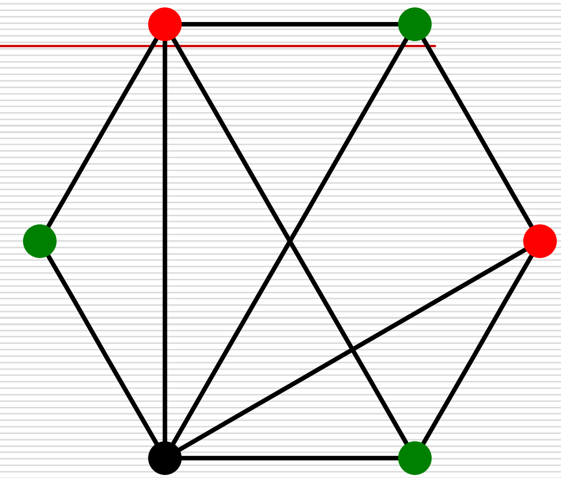
Διμερές Γράφημα

- Ανεξάρτητο σύνολο: σύνολο κορυφών που δεν συνδέονται με ακμή.
- Διμερές γράφημα: υπάρχει διαμέριση κορυφών σε δύο ανεξάρτητα σύνολα.
  - G(X, Y, E): X και Y ανεξάρτητα σύνολα, ακμές μόνο μεταξύ κορυφών X και Y.
  - G διμερές ανν δεν έχει κύκλους περιττού μήκους.
  - Κύκλος n κορυφών C_n: διμερές ανν n άρτιος.

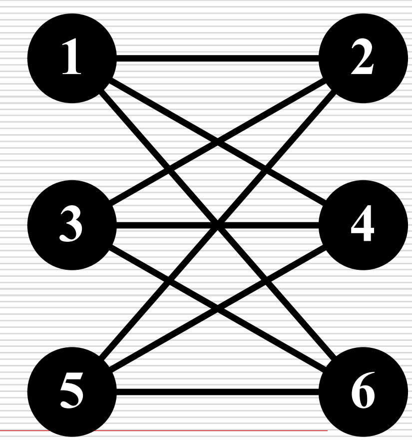




Διμερές Γράφημα



- Ανεξάρτητο σύνολο: σύνολο κορυφών που δεν συνδέονται με ακμή.
- Διμερές γράφημα: υπάρχει διαμέριση κορυφών σε δύο ανεξάρτητα σύνολα.
  - $G(X, Y, E)$: X και Y ανεξάρτητα σύνολα, ακμές μόνο μεταξύ κορυφών X και Y.
  - G διμερές ανν δεν έχει κύκλους περιττού μήκους.
  - Κύκλος n κορυφών C_n: διμερές ανν n άρτιος.
- Πλήρες διμερές γράφημα $K_{n,m}$:
  - Δύο ανεξάρτητα σύνολα με n και m κορυφές.
  - Όλες οι $n \cdot m$ ακμές μεταξύ τους.
  - Π.χ. $K_{3,3}$ έχει 9 ακμές.



Χαρακτηρισμός Διμερών Γραφημάτων

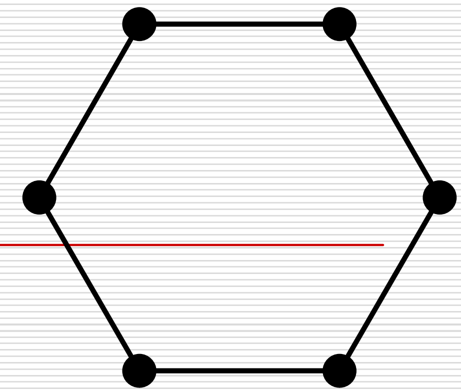
- Γράφημα G(V, E) είναι διμερές ανν το G δεν έχει κύκλους περιττού μήκους.
  - Αν G διμερές με ανεξάρτητα σύνολα X και Y, κάθε κύκλος C έχει τόσες κορυφές του X όσες και του Y: άρα C άρτιου μήκους.
  - Αντίστροφο: έστω ότι G δεν έχει κύκλους περιττού μήκους.
  - Αυθαίρετη κορυφή s και αποστάσεις d(s, u) προς κάθε κορυφή u.
  - X = { u : d(s, u) άρτιος } και Y = { u : d(s, v) περιττός }
  - Έστω ότι δύο κορυφές x, y στο X συνδέονται με ακμή.
  - Έστω w πρώτη κοινή κορυφή συντομότερων x – s και y – s μονοπατιών (υπάρχει πάντα, αφού μονοπάτια καταλήγουν στην s).
  - Αμφότερα συντομότερα μονοπάτια: τμήματα w – s μήκους d(s, w).
  - Άρα d(w, x)+d(w, y) είναι άρτιος και (w, …, x, y, …, w) είναι κύκλος περιττού μήκους – άτοπο!
- Κατασκευαστική απόδειξη με «πιστοποιητικό ορθότητας»!

Παραδείγματα

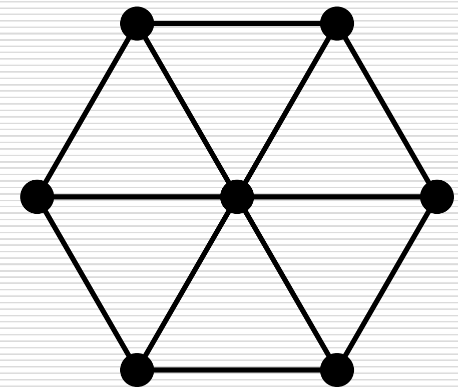
- Έστω διμερές γράφημα G(X, Y, E) με n κορυφές. Νδο:
  - $\sum_{v \in X} \deg(v) = \sum_{v \in Y} \deg(v) = |E|$
    - Κάθε ακμή έχει το ένα άκρο της στο X και το άλλο στο Y.
  - $\Delta(G) + \delta(G) \leq n$.
    - Υποθέτουμε ότι $|X| \leq |Y|$.
    - Τότε $\Delta(G) \leq |Y|$.
    - Έστω κορυφή $u \in Y$. Τότε $\delta(G) \leq \deg(u) \leq |X|$.

- Να δείξετε (με γραφοθεωρητικά επιχειρήματα) ότι: $\binom{n+m}{2} = \binom{n}{2} + \binom{m}{2} + mn$

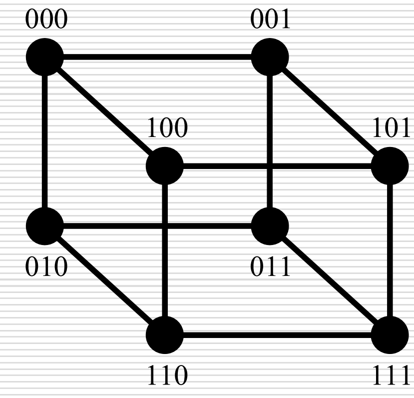
Ειδικά Γραφήματα



- **Πλήρες** γράφημα **n** κορυφών: K_n
- **Πλήρες διμερές** γράφημα με **n** και **m** κορυφές: $K_{n,m}$
  - Αστέρας: $K_{1,n}$
- Απλό **μονοπάτι** με **n** κορυφές: P_n
- Απλός **κύκλος** με **n** κορυφές: C_n

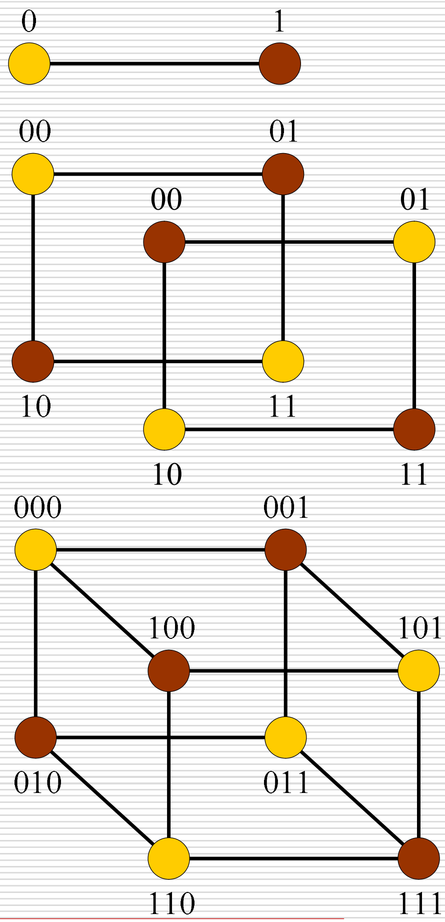


- **Τροχός τάξης n** (n+1 κορυφές): W_n
- **Υπερκύβος διάστασης n** (2^n κορυφές): Q_n (ή $Q(n)$)
  - Μια κορυφή για κάθε **δυαδική συμβολοσειρά** μήκους n
  - Κορυφές συνδέονται μεταξύ τους αν αντίστοιχες δυαδικές συμβ/ρες **διαφέρουν μόνο σε ένα bit**
  - Ιδιότητες: κανονικό, διμερές, διάμετρος, …
  - Αναδρομικός ορισμός (για απόδειξη ιδιοτήτων με επαγωγή).



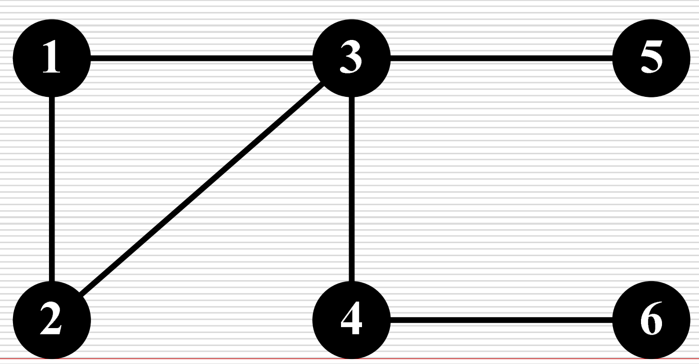
(Απλή) Άσκηση

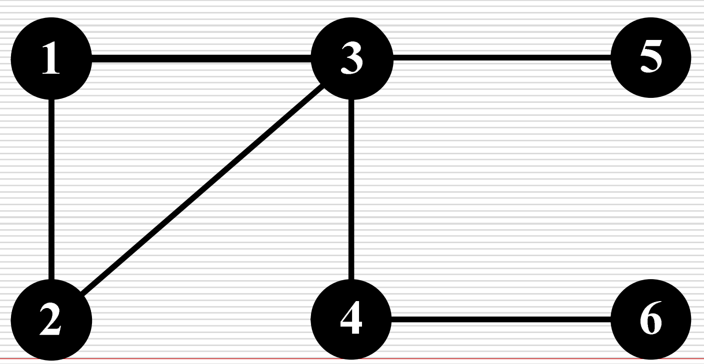
- Να δείξετε (με επαγωγή) ότι για κάθε $n \geq 1$, ο υπερκύβος $Q(n)$ διάστασης n είναι διμερές γράφημα.
  - Βάση: $Q(1)$ έχει δύο κορυφές, διμερές γράφημα.
  - Επαγ. Υπόθεση: Για αυθαίρετο $n \geq 1$, υποθέτουμε ότι $Q(n)$ διμερές γράφημα.
  - Επαγ. Βήμα: Θδο $Q(n+1)$ είναι διμερές γράφημα.
    - Θεωρούμε δύο αντίγραφα $Q_0(n)$ και $Q_1(n)$ του υπερκύβου διάστασης n.
    - Επαγ. υπόθεση: $Q_0(n)$ και $Q_1(n)$ διμερή γραφήματα.
    - A_0 και B_0 διαμέριση κορυφών του $Q_0(n)$.
    - A_1 και B_1 αντίστοιχη διαμέριση κορυφών του $Q_1(n)$.
    - Από αναδρ. ορισμό, $Q(n+1)$ προκύπτει συνδέοντας αντίστοιχες κορυφές (και μόνο) των $Q_0(n)$ και $Q_1(n)$.
    - Άρα $A_0 \cup B_1$ και $B_0 \cup A_1$ ανεξάρτητα σύνολα, και $Q(n+1)$ είναι διμερές γράφημα.



Υπο-Γραφήματα

- Υπογράφημα G′(V′, E′) του G(V, E) όταν V′ $\subseteq$ V και E′ $\subseteq$ E.
  - Επικαλύπτον (spanning) όταν V′ = V,
    δηλ. έχει **όλες τις κορυφές** του αρχικού γραφήματος, επιλέγουμε τις **ακμές** που τις συνδέουν.
  - Επαγόμενο (induced) όταν $E' = \{(u, v) \in E : u, v \in V'\}$
    δηλ. έχει **όλες τις ακμές** του αρχικού μεταξύ των επιλεγμένων **κορυφών**.





Διμερή Υπογραφήματα

- Κάθε γράφημα G(V, E) με m ακμές περιέχει διμερές υπογράφημα G′(X, Y, E′) με τουλάχιστον m/2 ακμές.
  - Βλ. και πρόβλημα MAX CUT. Ισχύει και για πολυγραφήματα χωρίς ανακυκλώσεις.
- Απόδειξη με πιθανοτική μέθοδο:
  - Κάθε κορυφή στο X με πιθανότητα 1/2, διαφορετικά στο Y.
  - $\forall$ακμή {u, v}, Prob[{u, v} μεταξύ X και Y] = 1/2.
  - Γραμμικότητα μέσης τιμής: Exp[#ακμών μεταξύ X και Y] = m/2
  - Άρα υπάρχει διαμέριση (X, Y) ώστε #ακμών μεταξύ X και Y $\geq$ m/2
- Κατασκευαστική απόδειξη:
  - Εξετάζουμε κορυφές μία-μία με τη σειρά. Κορυφή u στο X αν έχει πιο πολλούς γείτονες στο Y από ότι στο X, διαφορετικά στο Y.
  - «Κρατάμε» μεταξύ X και Y τουλάχιστον τόσες ακμές όσες «διώχνουμε». Τυπική απόδειξη με επαγωγή στον #κορυφών.

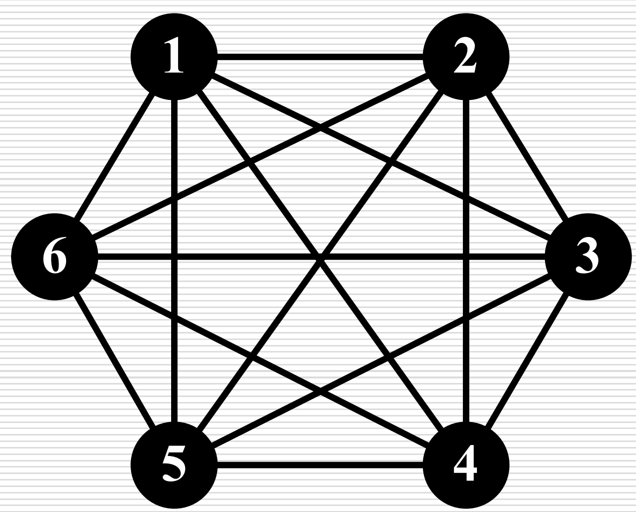
Μεγάλα Ανεξάρτητα Σύνολα

- Κάθε γράφημα $G(V, E)$ με n κορυφές και $m = nd/2$ ακμές, για κάποιο $d \geq 1$, έχει ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους $\geq n/(2d)$
- Απόδειξη με πιθανοτική μέθοδο:
  - Τυχαίο υποσύνολο $V_1 \subseteq V$: κάθε κορυφή u στο V_1 με πιθανότητα p.
  - $\mathrm{Exp}[|V_1|] = np$ και $\mathrm{Exp}[|E(G[V_1])|] = mp^2 = ndp^2/2$.
  - $G[V_1]$ (πιθανότατα) **δεν** είναι ανεξάρτητο σύνολο.
  - Αλλά αφαιρώντας αναμενόμενο #κορυφών $\leq ndp^2/2$ από V_1 (το ένα άκρο κάθε ακμής στο $G[V_1]$) παίρνουμε ανεξάρτητο σύνολο.
  - Exp[#κορυφών που μένουν] $\geq np - ndp^2/2 = np(1 - dp/2)$.
  - Αυτό μεγιστοποιείται για $p = 1/d$, και έχουμε

    Exp[#κορυφών που απομένουν σε ανεξάρτητο σύνολο] $\geq n/(2d)$
  - Άρα υπάρχει ανεξάρτητο σύνολο με $\geq n/(2d)$ κορυφές.

Αριθμοί Ramsey

- Σε κάθε σύνολο 6 ανθρώπων, είτε 3 φίλοι είτε 3 άγνωστοι.
  - Για κάθε χρωματισμό ακμών στο K_6 με μπλε και κόκκινο, υπάρχει μονοχρωματικό K_3.
  - Ισοδύναμα, κάθε γράφημα 6 κορυφών έχει είτε τρίγωνο είτε ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους 3.
  - **Δεν** ισχύει για το K_5 (κύκλος C_5 δεν έχει ούτε τρίγωνο ούτε ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους 3).

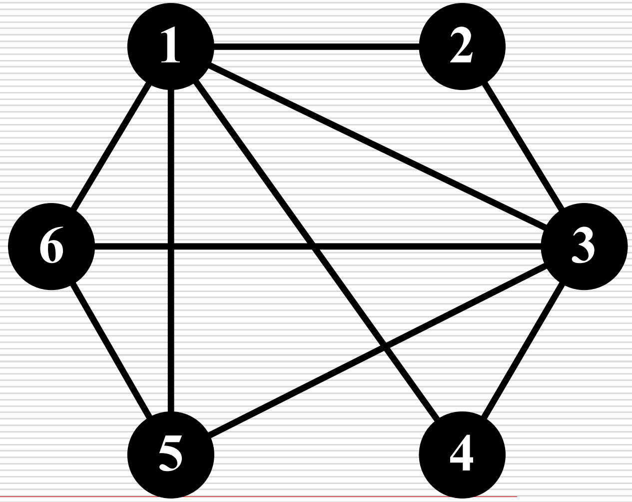


Αριθμοί Ramsey

- Σε κάθε σύνολο 6 ανθρώπων, είτε 3 φίλοι είτε 3 άγνωστοι.
  - Για κάθε χρωματισμό ακμών στο K_6 με μπλε και κόκκινο, υπάρχει μονοχρωματικό K_3.
- Υπάρχει άνθρωπος α που έχει είτε 3 φίλους είτε 3 αγνώστους.
  - Χβτγ. υποθέτουμε ότι α έχει 3 φίλους: β, γ, δ.
  - Αν στους β, γ, δ δύο φίλοι (π.χ. β. γ): έχουμε 3 φίλους (α, β, γ).
  - Αν στους β, γ, δ όλοι άγνωστοι: έχουμε 3 άγνωστους (α, β, γ).
- $R(m, s)$ = ελάχιστο n τ.ω για κάθε χρωματισμό ακμών του K_n με μπλε και κόκκινο, υπάρχει είτε μπλε K_m είτε κόκκινο K_s.
  - $R(m, s) = R(s, m)$ και $R(m, s) \leq R(m-1, s) + R(m, s-1)$.
  - Αντίστοιχα για περισσότερα από 2 χρώματα.
  - $\forall$ χρωματισμό ακμών ενός μεγάλου πλήρους γραφήματος, υπάρχει μονοχρωματικό πλήρες υπογράφημα επιθυμητού μεγέθους.

Διαδρομές, Μονοπάτια, και Κύκλοι

- Διαδρομή – Μονοκονδυλιά – Μονοπάτι - Κύκλος
  - Διαδρομή: ακολουθία «διαδοχικών» ακμών.
    - Π.χ. {2, 1}, {1, 3}, {3, 4}, {4, 1}, {1, 5}, {5, 3}, {3, 6}.
  - Μονοκονδυλιά: διαδρομή χωρίς επανάληψη ακμών.
  - (Απλό) μονοπάτι: διαδρομή χωρίς επανάληψη κορυφών (και ακμών).
  - Υπάρχει διαδρομή u – v ανν υπάρχει μονοπάτι u – v.
  - Απόσταση d(u, v) (χωρίς και με βάρη): μήκος συντομότερου u – v μονοπατιού.
  - Διάμετρος D(G): μέγιστη απόσταση μεταξύ δύο κορυφών του G.
  - Κλειστή διαδρομή όταν άκρα της ταυτίζονται.
  - Κλειστή μονοκονδυλιά ή κύκλωμα.
  - (Απλός) κύκλος: μονοπάτι που άκρα του ταυτίζονται («κλειστό» μονοπάτι).

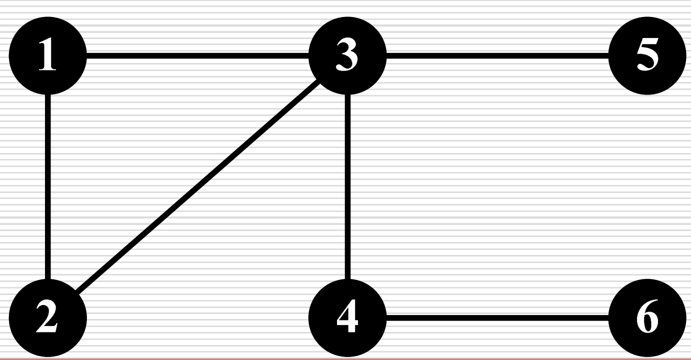


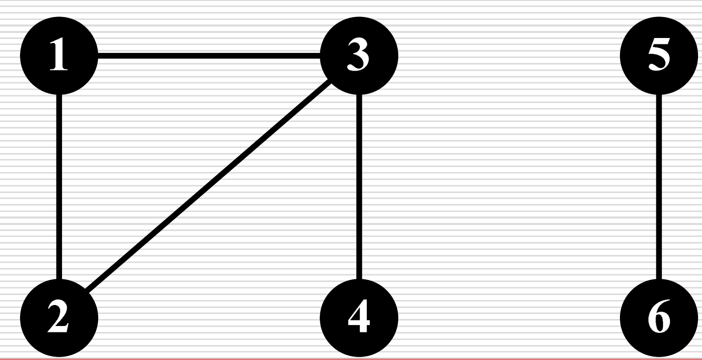
Παρατηρήσεις και Ιδιότητες

- (Απλό) γράφημα G έχει μονοπάτι μήκους $\geq \delta(G)$.
  - Ξεκινώντας από μια κορυφή, ακολουθούμε ακμή προς κορυφή που δεν έχουμε επισκεφθεί ήδη.
  - Τουλάχιστον $\delta(G)+1$ κορυφές: μονοπάτι μήκους $\geq \delta(G)$.
- Αν G απλό και $\delta(G) \geq 2$, τότε έχει κύκλο μήκους $\geq \delta(G)+1$.
  - Αντίστοιχα με μονοπάτι, αλλά επιστρέφουμε σε «πιο απομακρυσμένη» κορυφή που έχουμε ήδη επισκεφθεί.
- Αποστάσεις (με ή χωρίς βάρη) ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα: $d(u, v) \leq d(u, w)+d(w, v)$, για κάθε u, v, w.
  - $d(u, v)$: μήκος συντομότερου u – v μονοπατιού (από όλα).
  - $d(u, w)+d(w, v)$: μήκος συντομότερου u – v μονοπατιού που διέρχεται από w.

Συνεκτικότητα

- (Μη-κατευθυνόμενο) γράφημα G(V, E) **συνεκτικό** αν για κάθε ζευγάρι κορυφών u, v ∈ V, υπάρχει u – v μονοπάτι.
  - Μη-συνεκτικό γράφημα αποτελείται από συνεκτικές συνιστώσες: μεγιστοτικά συνεκτικά υπογραφήματα.
  - **Γέφυρα** (ακμή τομής): ακμή που αν αφαιρεθεί, έχουμε αύξηση στο πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών.
    - Ακμή γέφυρα ανν δεν ανήκει σε κύκλο.
  - **Σημείο κοπής** (σημείο άρθρωσης): κορυφή που αν αφαιρεθεί, έχουμε αύξηση στο πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών.





(Απλή) Άσκηση

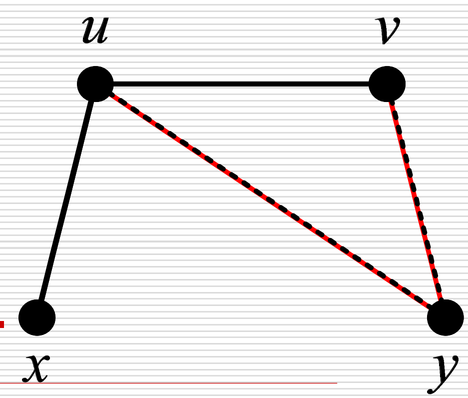
- Κάθε απλό γράφημα G με n κορυφές και $\delta(G) \geq (n-1)/2$ είναι συνεκτικό (και έχει διάμετρο ≤ 2).
  - Έστω u, v κορυφές που δεν συνδέονται με ακμή. Θδο u, v έχουν κοινό γείτονα (άρα συνδέονται με μονοπάτι μήκους 2).
  - Έστω ότι u, v **δεν** έχουν καμία γειτονική κορυφή κοινή:
    - u έχει τουλ. $(n-1)/2$ γείτονες, και
    - v έχει τουλ. $(n-1)/2$ γείτονες, όλοι διαφορετικοί.
  - Άρα έχουμε συνολικά:
    - 2 κορυφές (οι u και v) +
    - $(n-1)/2$ κορυφές (οι γείτονες του u) +
    - $(n-1)/2$ κορυφές (οι γείτονες του v) =
  - … = n+1 κορυφές, **άτοπο**!

(Απλή) Άσκηση

- Κάθε απλό γράφημα G με $n \geq 3$ κορυφές και $\delta(G) \geq (n+1)/2$ περιέχει τρίγωνο.
  - Έστω u, v κορυφές που συνδέονται με ακμή (υπάρχει τουλάχιστον μια ακμή στο γράφημα).
  - Θδο u, v έχουν κοινό γείτονα w (άρα τρίγωνο u – w – v).
  - Έστω ότι u, v **δεν** έχουν καμία κοινή γειτονική κορυφή:
    - u έχει τουλ. $(n+1)/2$ γείτονες, και
    - v έχει τουλ. $(n+1)/2$ γείτονες, όλοι διαφορετικοί.
  - Άρα έχουμε συνολικά:
    - 2 κορυφές (οι u και v) +
    - $(n+1)/2 - 1$ κορυφές (οι γείτονες του u εκτός της v) +
    - $(n+1)/2 - 1$ κορυφές (οι γείτονες του v εκτός της u) =
  - … = n+1 κορυφές, **άτοπο**!

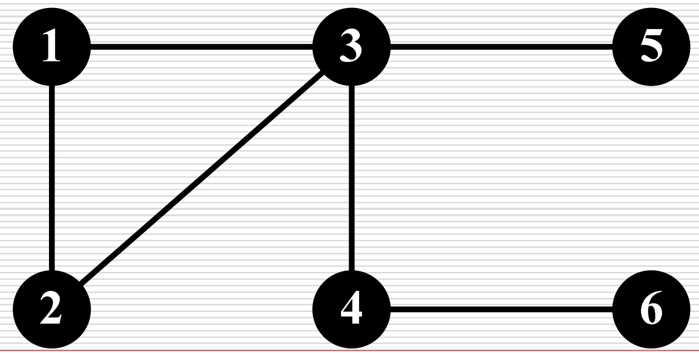
Άσκηση

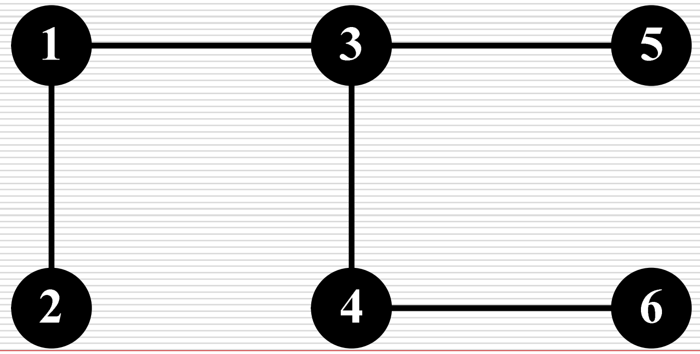
- G μη συνεκτικό γράφημα. Στο συμπληρωματικό του G, κάθε ζεύγος κορυφών u, v συνδέεται μονοπάτι μήκους ≤ 2.
  - Αν u και v σε διαφορετική συνεκτική συνιστώσα του G, συνδέονται με ακμή στο συμπληρωματικό.
  - Αν u και v σε ίδια συνεκτική συνιστώσα, έστω κορυφή w σε άλλη συνιστώσα. Στο συμπληρωματικό, υπάρχουν ακμές {u, w}, {w, v}.
- G γράφημα με κορυφές x, y μεταξύ των οποίων το συντομότερο μονοπάτι έχει μήκος τουλ. 4. Στο συμπληρωματικό του G, κάθε ζεύγος κορυφών u, v συνδέεται με μονοπάτι μήκους ≤ 2.
  - Έστω u, v συνδέονται με ακμή στο G και κάποια, έστω η u, συνδέεται με ακμή με κάποια από τις x, y, έστω με την x (διαφορετικά;).
  - Τότε ακμές {u, y} και {v, y} δεν υπάρχουν στο G. Διαφορετικά x – y μονοπάτι μήκους ≤ 3 στο G.
  - Στο συμπληρωματικό, υπάρχουν ακμές {u, y}, {y, v}.



Συνεκτικότητα

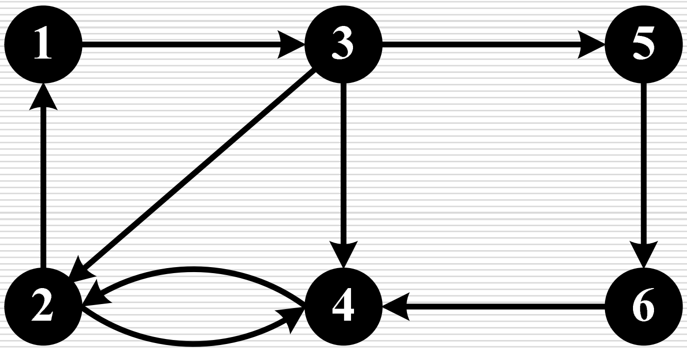
- (Μη-κατευθυνόμενο) γράφημα G(V, E) **συνεκτικό** αν για κάθε ζευγάρι κορυφών u, v $\in$ V, υπάρχει u – v μονοπάτι.
- Γράφημα G συνεκτικό ανν έχει επικαλύπτον υπογράφημα που είναι δέντρο (spanning tree, συνδετικό δέντρο).
  - Δέντρο: συνεκτικό γράφημα χωρίς κύκλους.
- Γράφημα G(V, E) συνεκτικό ανν για κάθε μη κενό S $\subset$ V, υπάρχει ακμή που συνδέει κορυφή του S με κορυφή του V \ S.

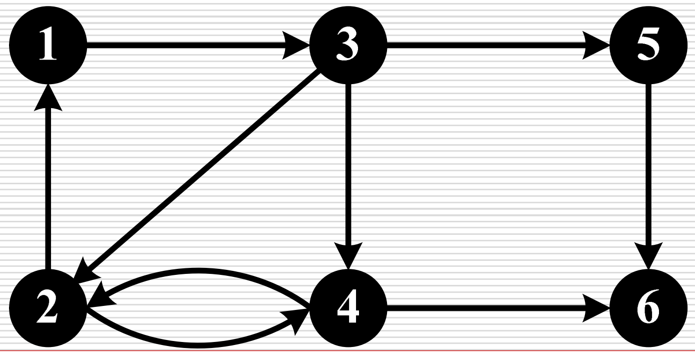




Συνεκτικότητα

- (Κατευθυνόμενο) γράφημα G(V, E) **ισχυρά συνεκτικό** αν $\forall u, v \in V$, υπάρχουν u – v και v – u μονοπάτια.
  - Για κάθε ζευγάρι κορυφών ισχυρά συνεκτικού γραφήματος, υπάρχει κυκλική διαδρομή που τις περιλαμβάνει.
  - Αν ένα κατευθυνόμενο γράφημα δεν είναι ισχυρά συνεκτικό, διαμερίζεται σε ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες:
    - Μεγιστοτικά ισχυρά συνεκτικά υπογραφήματα.





Κύκλωμα (Κύκλος) Euler

- Κλειστή μονοκονδυλιά που διέρχεται:
  - από κάθε ακμή 1 φορά, και
  - από κάθε κορυφή τουλάχιστον 1 φορά.
- Συνεκτικό (μη-κατευθ.) γράφημα έχει κύκλωμα Euler (Eulerian γράφημα) ανν όλες οι κορυφές άρτιου βαθμού.

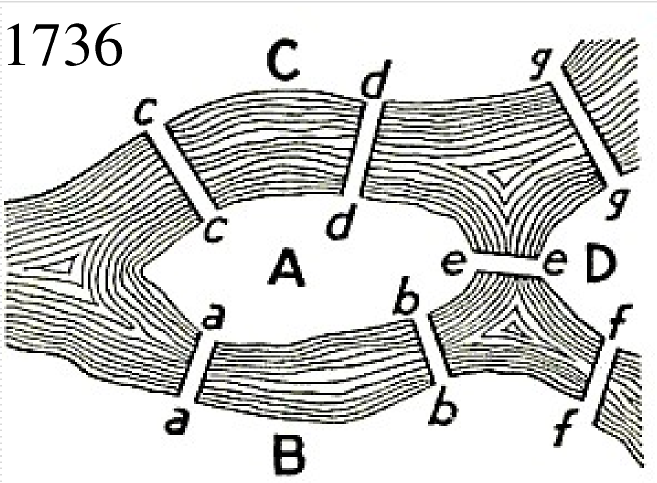
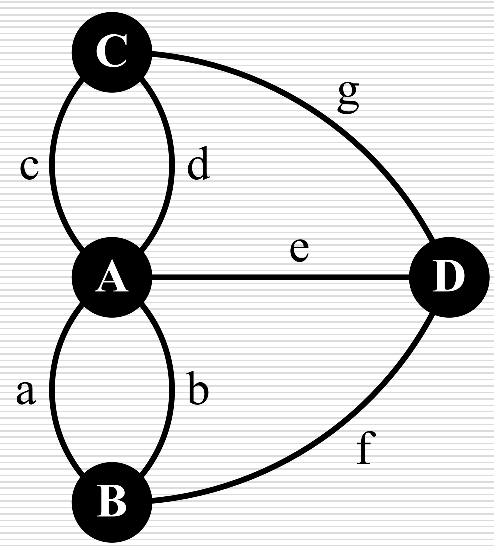
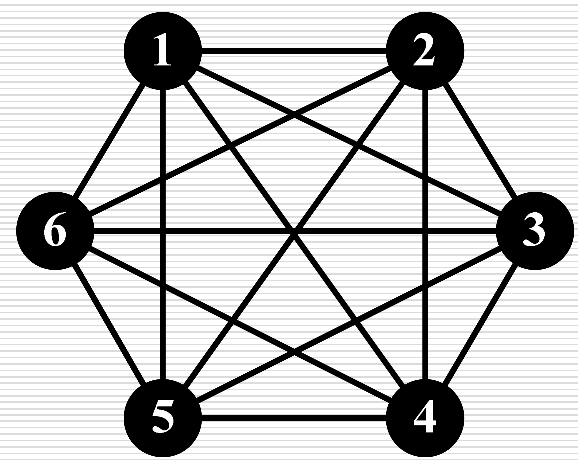


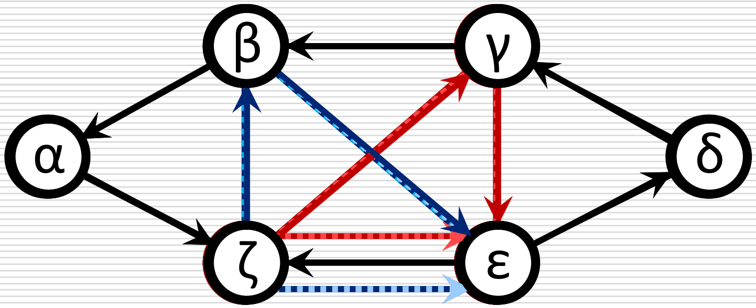
Figure 98. *Geographic Map: The Königsberg Bridges.*



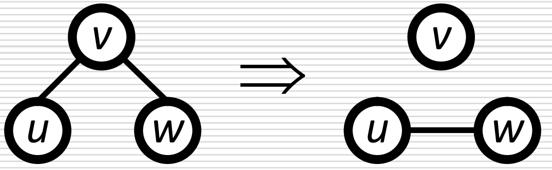


Κύκλωμα (Κύκλος) Euler

- Συνεκτικό (μη-κατευθ.) γράφημα έχει κύκλωμα Euler ανν όλες οι κορυφές άρτιου βαθμού.
  - Τα πλήρη γραφήματα K_n έχουν κύκλωμα Euler ανν n περιττός
  - Τα πλήρη διμερή γραφήματα $K_{p,q}$ έχουν κύκλωμα Euler ανν p και q άρτιοι



- Απόδειξη άρτιος βαθμός ⇒ Eulerian με επαγωγή σε #ακμών m.
  - Κατασκευαστική απόδειξη ⇒ υπολογισμός του κυκλώματος Euler
  - Εφαρμογή ακόλουθης πράξης:
    - Έστω u, v, w : $\{u,v\} \in E(G)$ και $\{v,w\} \in E(G)$
    - «Αντικατάσταση» των $\{u,v\}$, $\{v,w\}$ από $\{u,w\}$

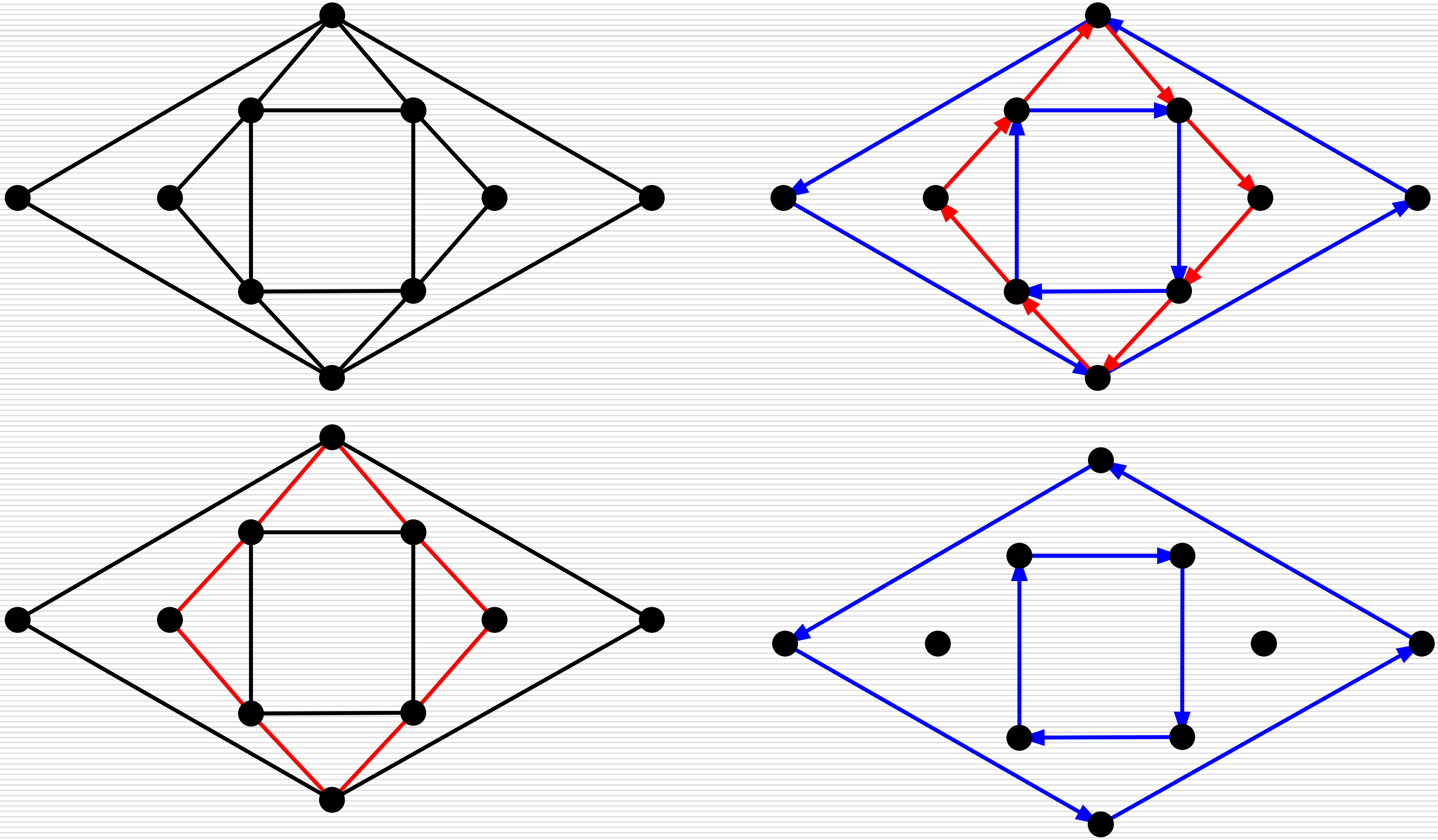


  - Από κύκλωμα Euler στο νέο γράφημα κατασκευάζουμε αρχικό:
    - Αντίστροφη «αντικατάσταση» της $\{u,w\}$ από $\{u,v\}$, $\{v,w\}$

Κύκλωμα (Κύκλος) Euler

- Συνεκτικό (μη-κατευθ.) γράφημα έχει κύκλωμα Euler ανν όλες οι κορυφές άρτιου βαθμού.
  - Κύκλος Euler C ⇒ άρτιος βαθμός κορυφών: συνεκτικότητα (περνά από όλες τις κορυφές). C «επισκέπτεται» κορυφή v: με νέα ακμή «φτάνει» στη v και με άλλη ακμή «φεύγει» από v.
  - G συνεκτικό (μπορεί όχι απλό) και όλες οι κορυφές άρτιου βαθμού. Βρίσκουμε κύκλο Euler με επαγωγή σε #ακμών.
    - Βάση: ισχύει όταν γράφημα ανακύκλωση ή απλός κύκλος.
    - Βήμα: G έχει ακμές και άρτιος βαθμός, άρα $\delta(G) \geq 2$ και κύκλος.
    - «Αφαιρούμε» έναν οποιοδήποτε κύκλο C του G (διαγράφουμε τις ακμές του C και αγνοούμε όσες κορυφές μένουν απομονωμένες).
    - Κορυφές που μένουν (αν υπάρχουν) έχουν άρτιο βαθμό: κάθε συνεκτική συνιστώσα έχει κύκλο Euler, λόγω επαγ. υπόθεσης.
    - Κύκλος C συνδέει επιμέρους κύκλους Euler σε κύκλο Euler για G.

Κύκλωμα Euler: Παράδειγμα



Μονοπάτι (Ίχνος) Euler

- Μονοκονδυλιά (με διαφορετικά άκρα) που διέρχεται:
  - από κάθε ακμή 1 φορά, και
  - περιλαμβάνει κάθε κορυφή τουλάχιστον 1 φορά.
- Συνεκτικό (μη-κατευθ.) γράφημα έχει μονοπάτι Euler (semi-Eulerian γράφημα) ανν δύο κορυφές έχουν περιττό βαθμό και όλες οι υπόλοιπες άρτιο.
  - Συνεκτικό γράφημα G με κορυφές u και v περιττού βαθμού.
  - G είναι semi-Eulerian ανν G+{u,v} είναι Eulerian.

Κύκλος Euler

- Υπάρχει γράφημα G που όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό και έχει γέφυρα;
  - **Όχι**, τέτοιο γράφημα G έχει κύκλο Euler, άρα όλες οι ακμές του ανήκουν σε κύκλο.
- Αν σε γράφημα που έχει κύκλο Euler προσθέσουμε ακμές, το γράφημα που προκύπτει έχει κύκλο Euler;
  - **Όχι** κατ' ανάγκη. Μπορεί προσθήκη κορυφών να κάνει τον βαθμό κάποιων κορυφών περιττό.
- (Γιατί) σε κάθε συνεκτικό (μη κατευθ.) γράφημα, υπάρχει κλειστή διαδρομή που διέρχεται από κάθε ακμή (ακριβώς) 2 φορές;
  - «Διπλασιασμός» ακμών οδηγεί σε γράφημα με κύκλο Euler (συνεκτικό και όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό).
  - Δείτε το Κινέζικο Πρόβλημα του Ταχυδρόμου (ή Route Inspection Problem).

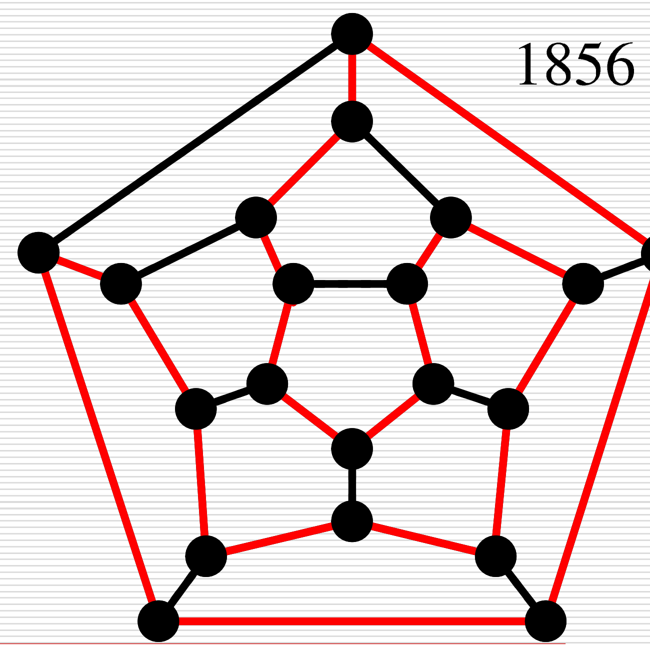
Κύκλος Euler

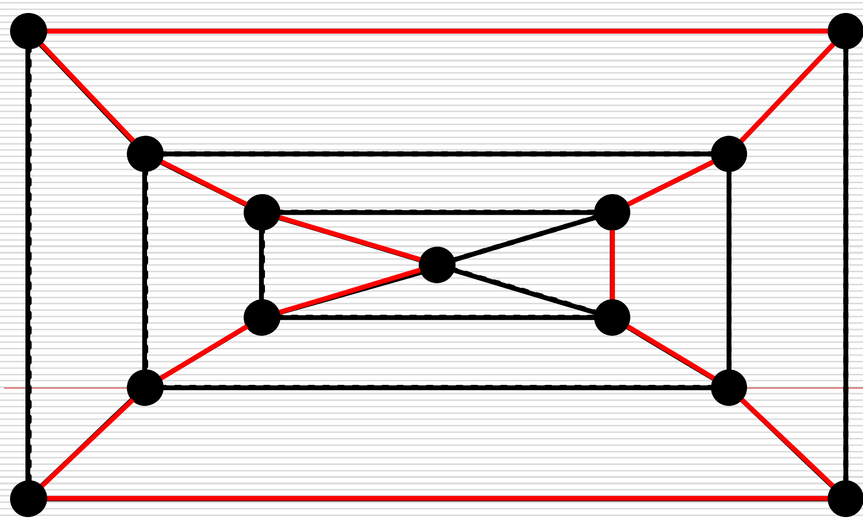
- Ποιος είναι ο μέγιστος #ακμών που μπορεί να έχει **απλό** γράφημα με n κορυφές και κύκλο Euler;
  - Αν n περιττός, n-1 άρτιος: K_n έχει κύκλο Euler και n(n-1)/2 ακμές.
  - Αν n άρτιος, αφαιρούμε n/2 ακμές (χωρίς κοινά άκρα) από K_n. Προκύπτει γράφημα με κύκλο Euler και n(n-2)/2 ακμές.
  - (Απλό) γράφημα με > n(n – 2)/2 ακμές, έχει κορυφή (περιττού) βαθμού n-1.
- Κύκλος Euler σε κατευθυνόμενα γραφήματα:
  - Ισχυρά συνεκτικό γράφημα έχει κύκλο Euler ανν …
  - … για κάθε κορυφή v, έσω-βαθμός(v) = έξω-βαθμός(v).

Κύκλος Hamilton

- (Απλός) κύκλος που διέρχεται από όλες τις κορυφές.
  - Διέρχεται από κάθε κορυφή 1 φορά.
  - Μπορεί να μην διέρχεται από κάποιες ακμές.
- Δεν είναι γνωστή ικανή και αναγκαία συνθήκη!
- Ικανές συνθήκες ώστε G(V, E) έχει κύκλο Hamilton:
  - $\forall v \in V$, $\deg(v) \geq |V|/2$ (Θ. Dirac).
  - $\forall u, v \in V$, $\deg(u) + \deg(v) \geq |V|$ (Θ. Ore).

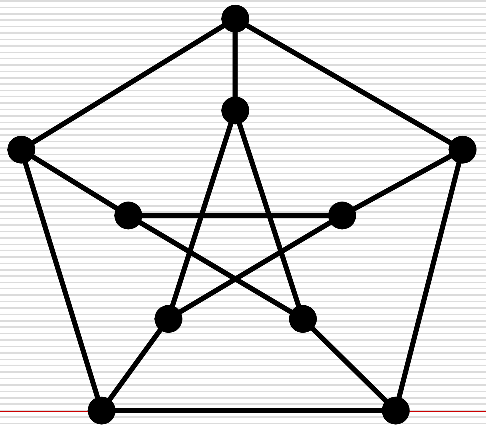
1856

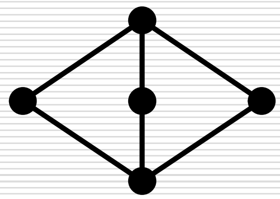




Κύκλος Hamilton

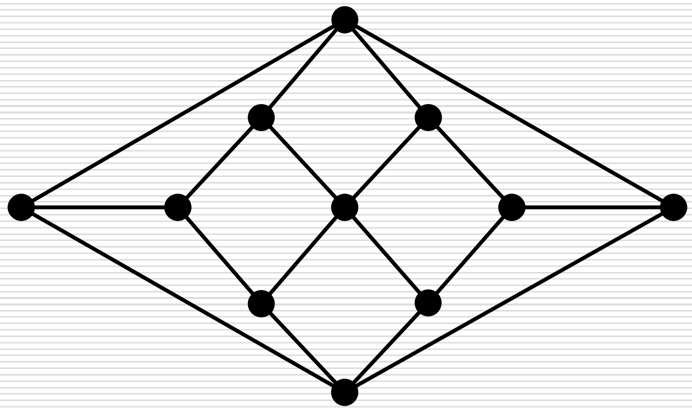
- Αναγκαίες συνθήκες για ύπαρξη κύκλου Hamilton σε γράφημα G:
  - G δεν έχει γέφυρα ή σημείο κοπής.
    - Αν G έχει γέφυρα, δεν έχει κύκλο Euler ούτε κύκλο Hamilton.
  - Κάθε κορυφή του G ανήκει σε κάποιο κύκλο.
  - Αν G διμερές, τότε η διαμέριση (μοναδική λόγω συνεκτικότητας) του G σε δύο ανεξάρτητα σύνολα X και Y πρέπει να έχει |X| = |Y|.
- Μονοπάτι Hamilton: (απλό) μονοπάτι που περιλαμβάνει όλες τις κορυφές.

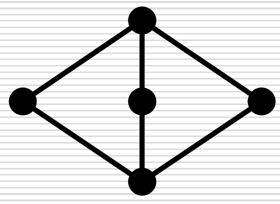




Κύκλος Hamilton

- Για να δείξουμε ότι γράφημα G **έχει** κύκλο Hamilton, είτε κατασκευάζουμε κύκλο Hamilton (αν G έχει συγκεκριμένη δομή) είτε δείχνουμε ότι G ικανοποιεί κάποια ικανή συνθήκη.
  - Π.χ., υπερκύβος Q(n) έχει κύκλο Hamilton για κάθε $n \geq 2$.
- Για να δείξουμε ότι γράφημα G **δεν έχει** κύκλο Hamilton, δείχνουμε ότι G παραβιάζει κάποια αναγκαία συνθήκη.
  - Π.χ., γιατί τα παρακάτω γραφήματα δεν έχουν κύκλο Hamilton;



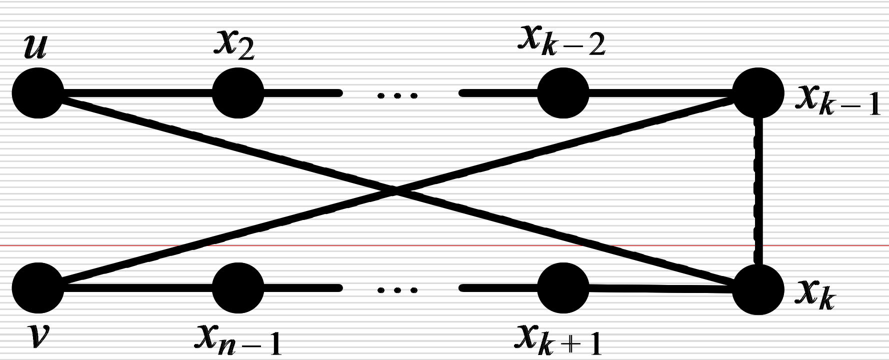


Κύκλος Hamilton

- Αν σε γράφημα που έχει κύκλο Hamilton προσθέσουμε ακμές, το γράφημα που προκύπτει έχει κύκλο Hamilton;
- Νδο κάθε απλό γράφημα με 21 κορυφές και 208 ακμές έχει κύκλο Hamilton και δεν έχει κύκλο Euler.
  - Πρόκειται για K_{21} από το οποίο έχουν αφαιρεθεί 2 ακμές.
  - Ικανοποιεί Θ. Dirac. Άρα έχει κύκλο Hamilton.
  - Όπως και αν αφαιρεθούν ακμές, προκύπτουν τουλ. 2 κορυφές με βαθμό 19. Άρα δεν έχει κύκλο Euler.

Κύκλος Hamilton

- Απλό γράφημα G με $n \geq 3$ κορυφές και u, v μη γειτονικές κορυφές με $\deg(u) + \deg(v) \geq n$. Το G έχει κύκλο Hamilton ανν το $G + \{u, v\}$ έχει κύκλο Hamilton.
  - Αν G Hamiltonian, προφανώς $G + \{u, v\}$ Hamiltonian.
  - $G + \{u, v\}$ Hamiltonian: βρίσκουμε HamCycle στο G χωρίς $\{u, v\}$.
  - G έχει μονοπάτι Hamilton $P = (u, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_{n-1}, v)$.
  - Υπάρχουν διαδοχικές κορυφές x_{k-1}, x_k στο P τ.ω. v συνδέεται με x_{k-1} και u συνδέεται με x_k.
    - Διαφορετικά: για κάθε $\{u, x_k\}$, δεν υπάρχει $\{v, x_{k-1}\}$.
    - Άρα $\deg(v) \leq (n - 1) - \deg(u)$, άτοπο.
  - Κύκλος Hamilton $C = (u, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}, v, x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots, x_2, u)$.



Κύκλος Hamilton

- Απλό γράφημα G με $n \geq 3$ κορυφές και u, v μη γειτονικές κορυφές με $\deg(u) + \deg(v) \geq n$. Το G έχει κύκλο Hamilton ανν το $G + \{u, v\}$ έχει κύκλο Hamilton.
- Απλό γράφημα G με $n \geq 3$ κορυφές. Αν κάθε δύο μη γειτονικές κορυφές u, v έχουν $\deg(u) + \deg(v) \geq n$, G έχει κύκλο Hamilton.
  - Οποτεδήποτε μη γειτονικές κορυφές u, v έχουν $\deg(u) + \deg(v) \geq n$, τις συνδέω απευθείας.
  - Νέο γράφημα Hamiltonian ανν το αρχικό ήταν Hamiltonian.
  - Αν γίνεται για όλες τις μη γειτονικές κορυφές, καταλήγουμε σε K_n
- Απλό γράφημα G με $n \geq 3$ κορυφές. Αν κάθε κορυφή u έχει $\deg(u) \geq n/2$, G έχει κύκλο Hamilton.

Ασκήσεις

- Τουρνουά (tournament): πλήρες κατευθυνόμενο γράφημα.
  - Για κάθε ζευγάρι u, v, υπάρχει μία (ακριβώς) από τις ακμές (u, v) και (v, u).
- Σε ένα τουρνουά με n+1 κορυφές, έστω u κορυφή και v_1, …, v_n μια αρίθμηση των υπόλοιπων n κορυφών. Ισχύει τουλ. ένα από τα:
  1. Η u συνδέεται με την v_1.
  2. Η v_n συνδέεται με την u.
  3. Υπάρχει δείκτης k, $1 \leq k \leq n - 1$, ώστε η v_k συνδέεται με την u και η u συνδέεται με την v_{k+1}.
- Έστω ότι δεν ισχύουν τα (1) και (2). Θδο ισχύει το (3).
  - Έστω v_{k+1} η πρώτη κορυφή τ.ω. η u συνδέεται με την v_{k+1}.
  - Ισχύει ότι $k+1 \leq n$, γιατί η u συνδέεται με την v_n (δεν ισχύει το (2)).
  - Ισχύει ότι $2 \leq k+1$, γιατί η v_1 συνδέεται με την u (δεν ισχύει το (1)).
  - Ισχύει ότι v_k συνδέεται με την u, γιατί v_{k+1} η πρώτη που δεν συνδέεται με u.

Ασκήσεις

- Κάθε τουρνουά με $n \geq 1$ κορυφές έχει μονοπάτι Hamilton.
  - Επαγωγή με χρήση προηγούμενου στο επαγωγικό βήμα.
  - Βάση: Ισχύει τετριμμένα για τουρνουά με 1 κορυφή.
  - Επαγ. υπόθεση: Κάθε τουρνουά με $n \geq 1$ κορυφές έχει μον. Hamilton.
  - Επαγ. βήμα: Θδο αυθαίρετο τουρνουά $G(V, E)$ με $n+1$ κορυφές έχει μονοπάτι Hamilton.
    - Έστω G' τουρνουά που προκύπτει από G με αφαίρεση κορυφής u.
    - Θεωρούμε αρίθμηση $v_1, \ldots, v_n$ των n κορυφών του G' σύμφωνα με μονοπάτι Hamilton στο G' (υπάρχει λόγω επαγ. υπόθεσης).
    - u ενσωματώνεται στο μονοπάτι Hamilton $v_1, \ldots, v_n$ με βάση το προηγούμενο.