Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Προηγμένα Θέματα Αλγορίθμων

Αλγόριθμοι Δικτύων και Πολυπλοκότητα

Εαρινό εξάμηνο 2022-2023

(ΕΜΠ – ΑΛΜΑ)

Διδάσκοντες: Α. Παγουρτζής – Δ. Φωτάκης – Θ. Λιανέας – Ο. Πλευράκης

1η Σειρά Ασκήσεων

(bonus: η βαθμολογία της σειρά προσαυξάνεται κατά 20%
αν απαντηθούν πλήρως όλα τα ερωτήματα)

Προθεσμία παράδοσης: 2/5/2023

Άσκηση 1

(α) Σχεδιάστε f–προσεγγιστικό αλγόριθμο για το πρόβλημα Cardinality Set Cover, όπου f είναι το μέγιστο πλήθος συνόλων στα οποία μπορεί να ανήκει κάποιο στοιχείο, γενικεύοντας τον αλγόριθμο που χρησιμοποιεί maximal matching για το πρόβλημα (Cardinality) Vertex Cover. Αποδείξτε την ορθότητά του και τον λόγο προσέγγισης που επιτυγχάνει. Βρείτε tight example για τον λόγο προσέγγισης του αλγορίθμου σας.
Υπόδειξη: παρατηρήστε ποιο είναι το f στο πρόβλημα Vertex Cover *και γενικεύστε κατάλληλα.*

(β) Είναι ο παραπάνω αλγόριθμος f-προσεγγιστικός για το πρόβλημα Weighted Set Cover; Εξηγήστε την απάντησή σας.

(γ) Σχεδιάστε f–προσεγγιστικό αλγόριθμο για το πρόβλημα Weighted Set Cover. Αποδείξτε την ορθότητά του και τον λόγο προσέγγισης που επιτυγχάνει. Βρείτε tight example για τον λόγο προσέγγισης του αλγορίθμου.
Υπόδειξη: γενικεύστε την ιδέα του degree-weighted αλγορίθμου για το Weighted Vertex Cover. *Εναλλακτικά, προσαρμόστε κατάλληλα τον αλγόριθμο της 3ης άσκησης της 3ης σειράς του μαθήματος "Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα (2022-23)":* `https://helios.ntua.gr/pluginfile.php/1928/course/section/12406/ask03_w2022.pdf`

Άσκηση 2

Αποδείξτε ότι ο λόγος προσέγγισης που επιτυγχάνει ο Greedy αλγόριθμος για το Weighted Set Cover είναι στην πραγματικότητα $H_{|S_{\max}|}$, όπου $S_{\max}$ το σύνολο εισόδου με τη μεγαλύτερη πληθικότητα.
Υπόδειξη: αποδείξτε ότι τα στοιχεία οποιουδήποτε συνόλου $S \in \mathcal{S}$ καλύπτονται από τον Greedy με συνολικό κόστος το πολύ $H_{|S|} \cdot cost(S)$, δηλαδή $\sum_{e \in S} price(e) \leq H_{|S|} \cdot cost(S)$.

Άσκηση 3

Τι λόγο προσέγγισης επιτυγχάνει ο Greedy αλγόριθμος για το Maximum Coverage όταν:

(α) τα στοιχεία έχουν βάρος και επιδιώκουμε τη μεγιστοποίηση του βάρους των καλυπτόμενων στοιχείων (με k σύνολα);

(β) Τα σύνολα έχουν βάρη και μας δίνεται (αντί για πλήθος συνόλων k) ένα budget B, και επιτρέπεται να επιλέξουμε σύνολα με συνολικό βάρος το πολύ B; Θεωρήστε ότι τα στοιχεία σε αυτή την περίπτωση έχουν όλα το ίδιο βάρος.

Άσκηση 4

Μελετήστε την προσεγγισιμότητα του προβλήματος Dominating Set: δοθέντος γράφου $G(V, E)$ να βρεθεί ελάχιστης πληθικότητας σύνολο κορυφών $D \subseteq V$, ώστε κάθε κορυφή του $V \setminus D$ να έχει μία τουλάχιστον γειτονική κορυφή στο D. Δώστε άνω και κάτω φράγματα για τον λόγο προσέγγισης συγκρίνοντας με το πρόβλημα Set Cover.

Άσκηση 5

(α) Συμπληρώστε την απόδειξη που θα βρείτε στις διαφάνειες για τον λόγο προσέγγισης $5/3$ για το πρόβλημα Metric TSP$_{(s,t)-path}$. Εξηγήστε τον ρόλο του όρου $c_{s,t}$ στην ανάλυση καθενός από τους δύο επιμέρους αλγορίθμους.

(β) Δώστε tight example για τους επιμέρους αλγορίθμους, καθώς και για τον συνολικό αλγόριθμο.

Άσκηση 6

Αποδείξτε τον λόγο προσέγγισης 4/3 που επιτυγχάνει ο αλγόριθμος του Graham για το Minimum Makespan Scheduling.

Άσκηση 7

Θεωρήστε τον εξής αλγόριθμο για το πρόβλημα Knapsack: τα στοιχεία ταξινομούνται σε φθίνουσα σειρά $p(i)/w(i)$ και εισάγονται με αυτή τη σειρά στο σακίδιο. Όποια στοιχεία δεν χωρούν απορρίπτονται.

(α) Δείξτε ότι ο λόγος προσέγγισης αυτού του αλγορίθμου δεν φράσσεται από καμμία σταθερά.

(β) Δείξτε ότι με την εξής απλή τροποποίηση ο αλγόριθμος γίνεται $(1/2)$-προσεγγιστικός: επιλέξτε την καλύτερη λύση μεταξύ της παραπάνω διαδικασίας και του να πάρει κανείς μόνο το στοιχείο με τη μεγαλύτερη αξία.

(γ) Γενικεύστε την ιδέα του (β) ώστε να πάρετε ένα PTAS για το πρόβλημα.