Αλγοριθμικές Πτυχές της Θεωρίας Παιγνίων

Δημήτρης Φωτάκης

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών, ΕΜΠ

Θεωρία Παιγνίων

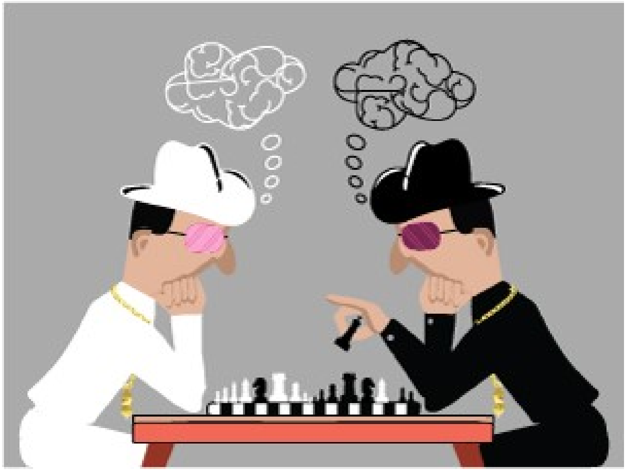
- Κατανόηση καταστάσεων που διαμορφώνονται από στρατηγική αλληλεπίδραση ιδιοτελών και ορθολογικών οντοτήτων που δρουν αυτόνομα.
  - Μοντέλα και τεχνικές για μελέτη αλληλεξάρτησης στη λήψη αποφάσεων.
  - Πρόβλεψη συμπεριφοράς (utility, prospect theory) και αποτελέσματος (ισορροπία).
  - Σχεδιασμός κανόνων (μηχανισμών) για εξαγωγή επιθυμητής συμπεριφοράς.
  - Οντότητες: άτομα, εταιρείες, πολιτικά κόμματα, κράτη, πράκτορες, προγράμματα.
  - Παραδείγματα: σκάκι και επιτραπέζια, αγορές, ανταγωνισμός για πόρους, συνθήκες κυκλοφορίας, αγορά εργασίας, μεταμοσχεύσεις νεφρών, διεθνής διπλωματία, …
  - Εφαρμογές: πολυπρακτορικά συστήματα, GANs, επίλυση παιγνίων, εκμάθηση ισορροπιών, διαμοιρασμός πόρων, σχεδιασμός μηχανισμών, δημοπρασίες.
  - Βιβλιογραφία: https://homes.cs.washington.edu/~karlin/GameTheoryBook.pdf http://www.masfoundations.org/mas.pdf

Θεωρία Παιγνίων – Ιστορικά Στοιχεία

- Cournot (1838), Bertrand (1883): μοντέλα ανταγωνισμού μεταξύ εταιρειών.
- Zermelo (1913): σκάκι έχει καθορισμένη βέλτιστη στρατηγική.
- Von Neumann (1928): min-max θεώρημα, ύπαρξη ισορροπίας σε παίγνια μηδενικού αθροίσματος με 2 παίκτες.
- Von Neumann, Morgenstern (1944): Theory of Games and Economic Behavior, θεμελίωση Θεωρίας Παιγνίων με βάση αναμενόμενη ωφέλεια.
- Nash (1950): ύπαρξη ισορροπίας σε πεπερασμένα παίγνια.
- Selten, Harsanyi (1960's): παίγνια διαδοχικών κινήσεων, ελλιπής πληροφόρηση.
- Maynard Smith (1970's): εξελικτική θεωρία παιγνίων.
- Παπαδημητρίου, Nisan, Δασκαλάκης (2000's): υπολογιστική θεωρία παιγνίων
- Βραβεία Nobel: Nash, Selten, Harsanyi (1994), Schelling, Aumann (2005), Hurwicz, Maskin, Myerson (2007), Roth, Shapley (2012), Milgrom, Wilson (2020).

Θεωρία Παιγνίων

- Κατανόηση καταστάσεων που διαμορφώνονται από στρατηγική αλληλεπίδραση ιδιοτελών και ορθολογικών οντοτήτων που δρουν αυτόνομα.
  - Στρατηγική αλληλεπίδραση: κοινά κατανοητό ότι (συλλογικό και ατομικό) αποτέλεσμα εξαρτάται από επιλογές όλων.
  - Ιδιοτελής οντότητα: ατομικές προτιμήσεις επί αποτελεσμάτων – συνάρτηση ωφέλειας.
  - Ορθολογική συμπεριφορά: απώτερος στόχος η μεγιστοποίηση ατομικής ωφέλειας.
- **Περιεχόμενα:**
  - Ορισμοί και κατηγορίες παιγνίων.
  - Παραδείγματα παιγνίων και αναπαράσταση.
  - Έννοιες ισορροπίας και επίλυση.
  - Εκμάθηση ισορροπιών.
  - Ψηφοφορίες και παίγνια συμφόρησης.
  - Ανταλλακτική οικονομία.
  - Σχεδιασμός μηχανισμών.



Συστατικά και Κατηγορίες Παιγνίων

- Συστατικά στοιχεία παιγνίου:
  - Παίκτες (ορθολογικές οντότητες που αλληλεπιδρούν στρατηγικά ≥ 2).
  - Στρατηγικές (πιθανές ενέργειες από όπου επιλέγει κάθε παίκτης ≥ 2).
  - Ωφέλεια (ή κόστος) με βάση επιλογή στρατηγικών όλων των παικτών.
  - Πληροφόρηση (για άλλους παίκτες) κάθε παίκτη όταν επιλέγει στρατηγική.
- **Κατηγορίες Παιγνίων:**
  - Πεπερασμένα ή άπειρα.
  - Συνεργατικά ή ανταγωνιστικά.
  - Διαδοχικών ή ταυτόχρονων κινήσεων.
  - Μηδενικού ή μη-μηδενικού αθροίσματος.
  - Επαναλαμβανόμενα ή μη-επαναλαμβανόμενα.
  - Με τέλεια ή ελλιπή πληροφόρηση.

- **Αναπαράσταση** Παιγνίων: κανονική ή επεκταμένη μορφή.

Παίγνια σε Κανονική Μορφή

- Παίγνιο σε κανονική μορφή (normal form) αποτελείται:
  - Σύνολο παικτών $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ ($n \geq 2$).
  - Σύνολο (αμιγών) στρατηγικών S^i για κάθε παίκτη i.
  - Συνάρτηση ωφέλειας $u_i : S^1 \times \ldots \times S^n \to R$ για κάθε παίκτη i.
  - 2 παίκτες: συναρτήσεις ωφέλειας δίνονται σε μορφή πινάκων (A, B) (bimatrix game).
- **Κατάσταση** $(s_1, \ldots, s_n)$ όπου κάθε παίκτης i επιλέγει (αμιγή) στρατηγική s_i.
- **Ισορροπία**: κατάσταση όπου παίκτες **δεν** έχουν κίνητρο για αλλαγή στρατηγικής.
- Παράδειγμα: διάσχιση (στενής παλιάς) γέφυρας (χωρίς δυνατότητα επικοινωνίας).
  - 2 παίκτες, $S^1 = S^2 = \{ Δ, Π \}$, $(Δ, Π) >_1 (Π, Π)$, $(Π, Δ) >_1 (Δ, Δ)$

	Διασχίζω	Περιμένω
Διασχίζω	**-2, -2**	**2, -1**
Περιμένω	**-1, 2**	**-1, -1**

Δίλημμα του Φυλακισμένου

- Συλλαμβάνονται δύο συνεργάτες για μεγάλη ληστεία.
  - Κρατούνται σε χωριστά κελιά **χωρίς επικοινωνία**.

	Ομολογώ	Δεν ομολογώ
Ομολογώ	**-5, -5**	**0, -12**
Δεν ομολογώ	**-12, 0**	**-1, -1**

  - Προτιμήσεις: (Ο, Δ) $>_1$ (Δ, Δ) $>_1$ (Ο, Ο) $>_1$ (Δ, Ο)
  - Παίγνιο πεπερασμένο, ανταγωνιστικό, μη-επαναλαμβανόμενο, με τέλεια πληροφόρηση και ταυτόχρονες κινήσεις.
  - Άλλα παραδείγματα εφαρμογής: συνεργασία, ανταγωνισμός εξοπλισμών, δυοπώλιο.

Κυρίαρχες Στρατηγικές

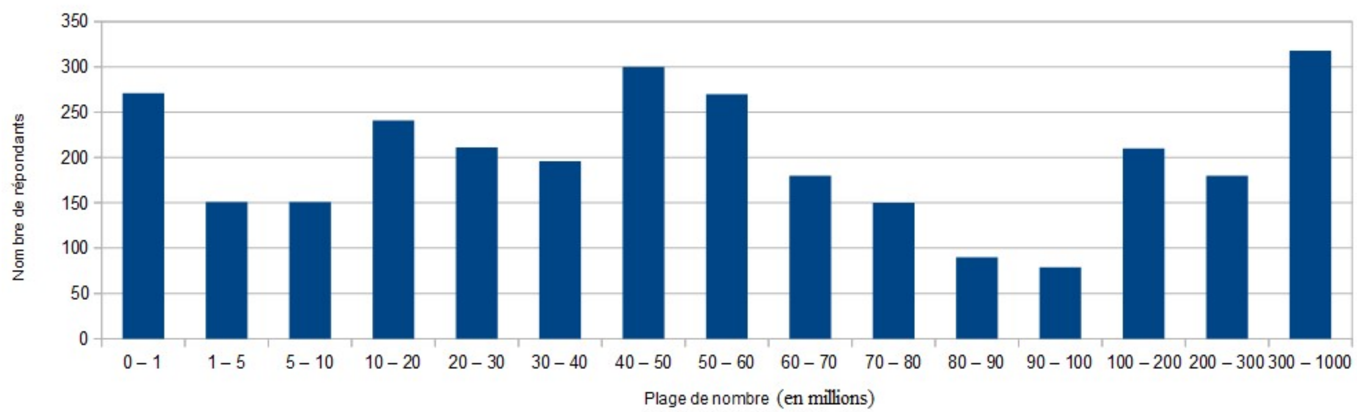
	Ομολογώ	Δεν ομολογώ
Ομολογώ	**-5, -5**	**0, -12**
Δεν ομολογώ	**-12, 0**	**-1, -1**

- Ισχυρά **κυρίαρχη** στρατηγική s για παίκτη i: $u_i(s, s_{-i}) > u_i(s', s_{-i})$ για κάθε $s' \in S^i$ και κάθε επιλογή στρατηγικών s_{-i} άλλων παικτών.
  - (Ασθενώς) κυρίαρχη στρατηγική: αν $u_i(s, s_{-i}) \geq u_i(s', s_{-i})$.
  - **Ισορροπία** σε κυρίαρχες στρατηγικές: κάθε παίκτης ακολουθεί κυρίαρχη στρατηγική.
  - «Κατάληξη» παιγνίου / σημείο ισορροπίας σε κυρίαρχες στρατηγικές: (Ο, Ο)
    … αν και (Δ, Δ) θα ήταν προτιμότερο.
  - Ισχυρή και εύλογη έννοια ισορροπίας: κάθε παίκτης επιλέγει μια κυρίαρχη στρατηγική του, ανεξαρτήτως επιλογών άλλων παικτών.

Κυριαρχούμενες Στρατηγικές

	Ομολογώ	Δεν ομολογώ
Ομολογώ	-5, -5	0, -12
Δεν ομολογώ	-12, 0	-1, -1

- **Κυριαρχούμενη** στρατηγική s' για παίκτη i: υπάρχει $s \in S^i$ με $u_i(s, s_{-i}) > u_i(s', s_{-i})$ για κάθε επιλογή στρατηγικών s_{-i} άλλων παικτών.
  - Δεν επιλέγονται από ορθολογικούς παίκτες: διαδοχική απαλοιφή τους.
- Μαντεύω 2/3 μέσου όρου: κάθε παίκτης $i \in \{1, \dots, n\}$ δηλώνει $x_i \in [0, 1000]$. Κερδίζει παίκτης i με x_i πιο κοντινό στο $2(x_1+\dots+x_n)/(3n)$.
  - Διαδοχική απαλοιφή καταλήγει σε 0 ή 1.
  - Κατανομή δηλώσεων για 4000 παίκτες.
  - Πειραματικά νικητής κοντά στο 215.



Bach or Stravinski (ή Battle of Sexes, BoS)

- Δυο φίλοι συναποφασίζουν για **κοινή** δραστηριότητα.

	Bach	Stravinski
Bach	**2, 1**	**0, 0**
Stravinski	**0, 0**	**1, 2**

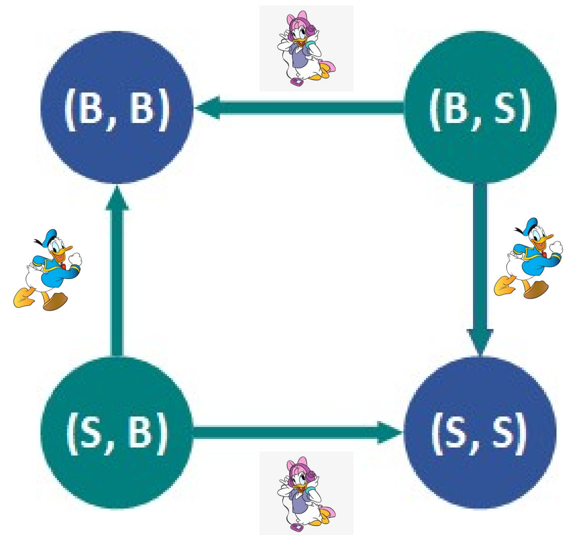
  - Προτιμήσεις: (B, B) $>_1$ (S, S) $>_1$ (B, S), (S, B)
- (Αμιγής) **ισορροπία Nash** μια κατάσταση $(s_1, \ldots, s_n)$ όπου για κάθε παίκτη i
  - $u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s', s_{-i})$ για κάθε $s' \in S^i$.
  - Κανένας παίκτης δεν βελτιώνει ατομική ωφέλεια αλλάζοντας μονομερώς στρατηγική.
  - **Βέλτιστη απόκριση** παίκτη i σε στρατηγικές s_{-i} άλλων παικτών: στρατηγική $s \in S^i$ με $u_i(s, s_{-i}) \geq u_i(s', s_{-i})$ για κάθε $s' \in S^i$.
  - (Αν υπάρχει), αμιγής ισορροπία Nash μπορεί να υπολογισθεί (για παίγνια σε κανονική μορφή) ελέγχοντας κάθε κατάσταση εξαντλητικά.

Δυναμική Nash (Nash dynamics)

- Δυναμική ιδιοτελών μεταβάσεων στον χώρο καταστάσεων.
  - Μετάβαση όταν κάποιος παίκτης **βελτιώνει** ατομική ωφέλεια.

	Bach	Stravinski
Bach	**2, 1**	**0, 0**
Stravinski	**0, 0**	**1, 2**

  - Κατευθυνόμενο γράφημα: κορυφές αντιστοιχούν σε καταστάσεις, ακμή (s, s') όταν υπάρχει παίκτης i με $u_i(s) < u_i(s')$ και s, s' διαφέρουν μόνο σε στρατηγική παίκτη i.
  - Δυναμική βέλτιστης απόκρισης: ακμή (s, s') όταν s, s' διαφέρουν μόνο σε στρατηγική παίκτη i και s'(i) αποτελεί βέλτιστη απόκριση παίκτη i σε s_{-i}.
- Αμιγείς **ισορροπίες Nash** είναι καταβόθρες γραφήματος της δυναμικής Nash.



Πέτρα – Ψαλίδι – Χαρτί

	Πέτρα	Ψαλίδι	Χαρτί
Πέτρα	**0, 0**	**1, -1**	**-1, 1**
Ψαλίδι	**-1, 1**	**0, 0**	**1, -1**
Χαρτί	**1, -1**	**-1, 1**	**0, 0**

- Παράδειγμα παιγνίου 2 παικτών και μηδενικού αθροίσματος.
- Ανυπαρξία κυρίαρχων στρατηγικών ή αμιγούς ισορροπίας Nash.
- **Μεικτή** στρατηγική: κατανομή πιθανότητας $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ σε αμιγείς στρατηγικές.
  - Π.χ., παίγνιο επαναλαμβάνεται, «παίκτης» αντιπροσωπεύει ομάδα πληθυσμού, κλπ.
- **Αναμενόμενη ωφέλεια** παίκτη 1 σε προφίλ μεικτών στρατηγικών $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$:

$$u_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \sum_{s_i \in S^1} \sum_{t_j \in S^2} p_i q_j u_1(s_i, t_j) = \boldsymbol{p}^T A \boldsymbol{q}$$

όπου A (αντ. –A) ο πίνακας ωφέλειας Π1 (αντ. Π2), και $u_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p}^T(-A)\,\mathbf{q}$

  - Π.χ., αν $\mathbf{p}$ = (1/2, 1/4, 1/4) και $\mathbf{q}$ = (1/3, 1/2, 1/6),
    A $\mathbf{q}$ = (1/3, –1/6, –1/6) είναι αναμενόμενη ωφέλεια στρατηγικών Π1, με $u_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ = 1/12,
    και $\mathbf{p}^T(-A)$ = (0, –1/4, 1/4) αναμενόμενη ωφέλεια στρατηγικών Π2, με $u_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ = –1/12.

Ισορροπία Nash

	Πέτρα	Ψαλίδι	Χαρτί
Πέτρα	**0, 0**	**1, -1**	**-1, 1**
Ψαλίδι	**-1, 1**	**0, 0**	**1, -1**
Χαρτί	**1, -1**	**-1, 1**	**0, 0**

- **Ισορροπία Nash**: προφίλ μεικτών στρατηγικών (**p**, **q**) όπου
  - $u_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \geq u_1(\mathbf{p'}, \mathbf{q})$ για κάθε μικτή στρατηγική **p’** του παίκτη 1, και
  - $u_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \geq u_2(\mathbf{p}, \mathbf{q'})$ για κάθε μικτή στρατηγική **q’** του παίκτη 2.
- Κάθε πεπερασμένο παίγνιο έχει (τουλάχιστον **μία**) ισορροπία Nash.
  - Πέτρα – Ψαλίδι – Χαρτί: ((1/3, 1/3, 1/3), (1/3, 1/3, 1/3)) με αναμενόμενη ωφέλεια 0.
  - Σε παίγνια μηδενικού αθροίσματος, αναμενόμενη ωφέλεια παικτών σε ισορροπία: ζεύγος αντίθετων αριθμών (ω, -ω), το ω καλείται **αξία** παιγνίου.
- Αναμενόμενη ωφέλεια Π1 είναι κυρτός συνδυασμός αναμενόμενης ωφέλειας αμιγών στρατηγικών Π1, με βάση μεικτή στρατηγική Π2. Άρα, σε ισορροπία Nash:
  - $u_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \geq u_1(s, \mathbf{q})$ για κάθε **αμιγή** στρατηγική $s \in S^1$ (αντίστοιχα για Π2).
  - Θετική πιθανότητα μόνο σε αμιγείς στρατηγικές με μέγιστη αναμενόμενη ωφέλεια.

Ισορροπία Nash: Παραδείγματα

- Ισορροπία σε μεικτές στρατηγικές:
  ((3/4, 1/4), (3/4, 1/4)).
  - Αναμενόμενη ωφέλεια κάθε παίκτη = –1

	Διασχίζω	Περιμένω
Διασχίζω	**-2, -2**	**2, -1**
Περιμένω	**-1, 2**	**-1, -1**

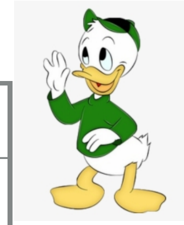
- Ισορροπία σε μεικτές στρατηγικές:
  ((2/3, 1/3), (1/3, 2/3)).
  - Αναμενόμενη ωφέλεια κάθε παίκτη = 2/3

	Bach	Stravinski
Bach	**2, 1**	**0, 0**
Stravinski	**0, 0**	**1, 2**

- Εύρεση ισορροπίας Nash για γενικά παίγνια με ≥ 2 παίκτες είναι υπολογιστικά δύσκολο πρόβλημα (PPAD-πλήρες, (Daskalakis, Goldberg, Papadimitriou, 2006)).
- Ισορροπία Nash για παίγνια μηδενικού αθροίσματος με 2 παίκτες υπολογίζεται αποδοτικά με Γραμμικό Προγραμματισμό (δυϊκότητα, βλ. ακόμη fictitious play).
  - (von Neumann, 1928) $\max_p \min_q u_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \min_q \max_p u_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$
  - Για διαδοχικές κινήσεις, αν ακολουθούν ισορροπία, σειρά παικτών δεν έχει σημασία.

Fictitious Play (Brown, 49)

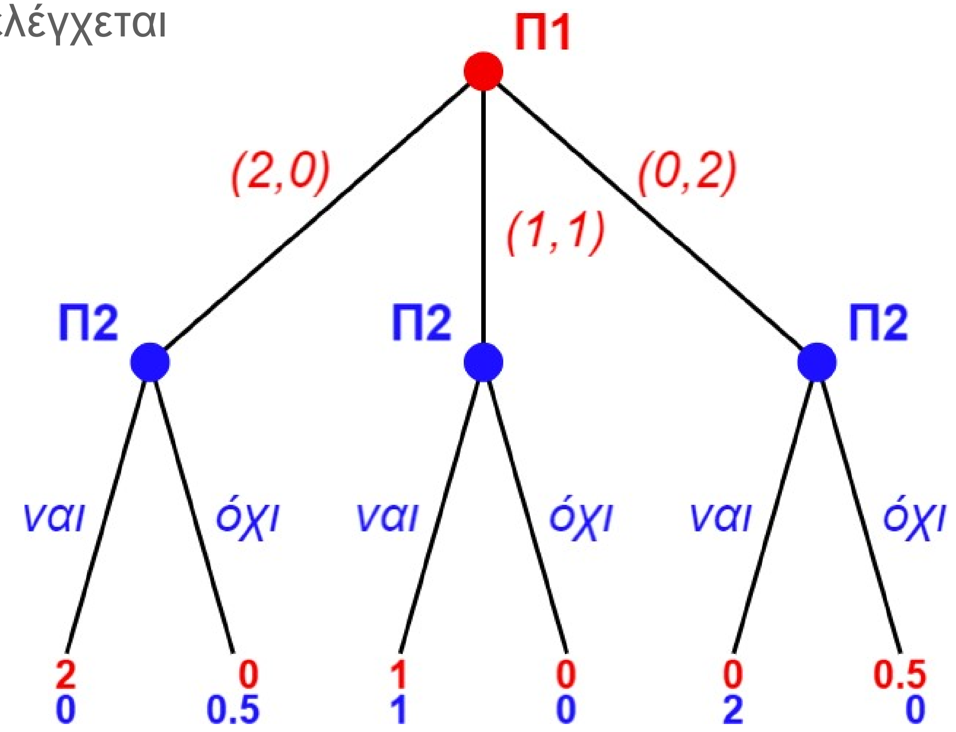
	Πέτρα	Ψαλίδι	Χαρτί
Πέτρα	**0, 0**	**1, -1**	**-1, 1**
Ψαλίδι	**-1, 1**	**0, 0**	**1, -1**
Χαρτί	**1, -1**	**-1, 1**	**0, 0**



- Σε κάθε γύρο, κάθε παίκτης υιοθετεί (ανεξάρτητα) αμιγή στρατηγική με **μέγιστη** μέση **εμπειρική** ωφέλεια (με βάση συχνότητα στρατηγικών άλλου).
- Αρχικά, Π1 υιοθετεί αυθαίρετη στρατηγική i_1 και Π2 αυθαίρετη στρατηγική j_1.
- Για κάθε γύρο t = 2, 3, …, T :
  - Π1 επιλέγει στρατηγική $\mathbf{i_t}$ με μέγιστο $(A\ emp_2)[\ \mathbf{i_t}\ ]$
  - Π2 επιλέγει στρατηγική $\mathbf{j_t}$ με μέγιστο $(emp_1^T\ B)[\ \mathbf{j_t}\ ]$
  - emp_1 και emp_2 διανύσματα με εμπειρικές συχνότητες στρατηγικών Π1 και Π2.
- Για πεπερασμένα παίγνια 2 παικτών με μηδενικό άθροισμα, εμπειρικές συχνότητες στρατηγικών συγκλίνουν σε ισορροπία Nash (Robinson, 1951).
  - Σύγκλιση **δεν** είναι εγγυημένη για παίγνια μη μηδενικού αθροίσματος (Shapley, 1964).

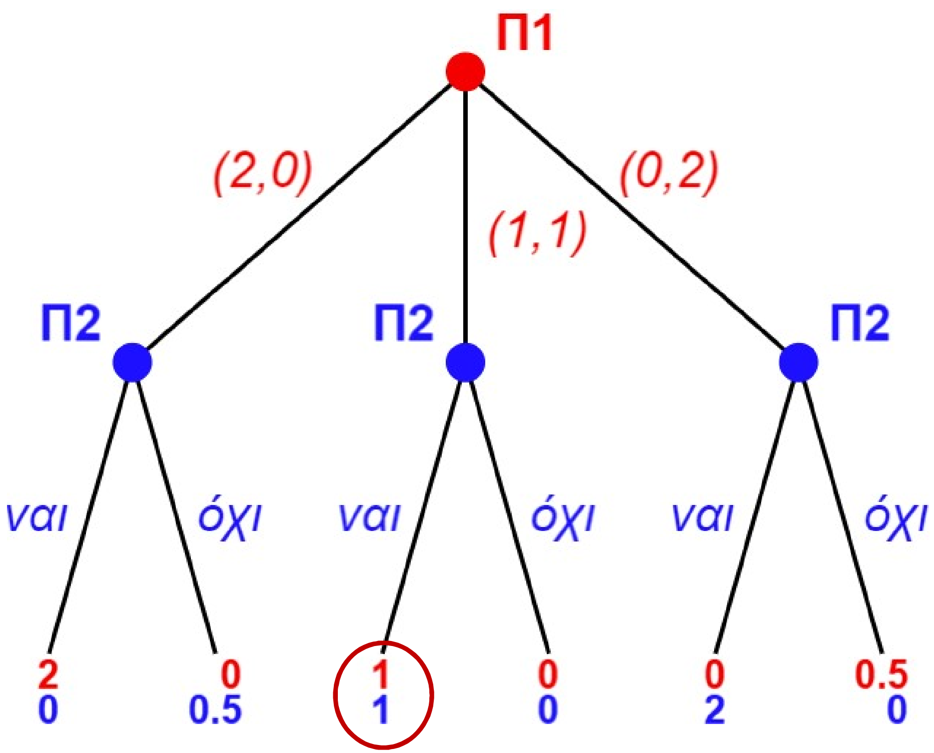
Παίγνια σε Εκτεταμένη Μορφή

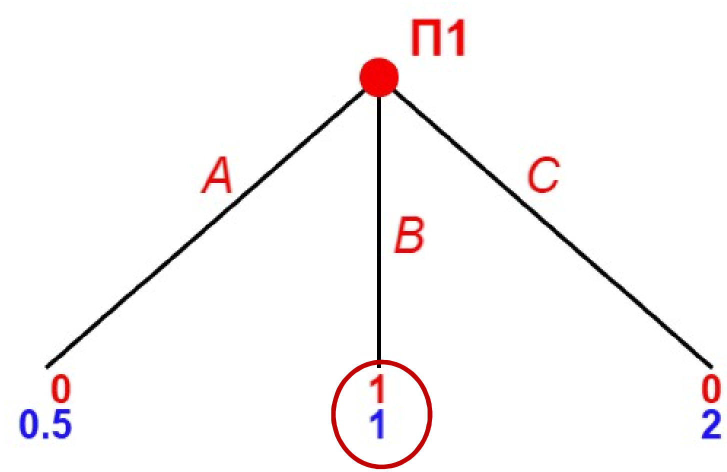
- (Πεπερασμένο) παίγνιο σε εκτεταμένη μορφή (extensive form) αποτελείται:
  - Πεπερασμένο σύνολο παικτών N = {1, …, n}
  - (Πεπερασμένο) δέντρο με ρίζα. Φύλλα αντιστοιχούν σε καταστάσεις παιγνίου και επιγράφονται με ωφέλεια κάθε παίκτη στην αντίστοιχη κατάσταση.
  - Εσωτερικοί κόμβοι επιγράφονται με παίκτη με επιλογή «κίνησης» στον κόμβο.
  - Δυνατότητα για τυχαίες «κινήσεις» (κόμβος ελέγχεται από «φύση») και για πλαίσιο πληροφορίας.
  - Στρατηγική καθορίζει «κίνηση» για κάθε εσωτερικό κόμβο που «ανήκει» στον παίκτη.
  - Λογισμικό: https://gte.csc.liv.ac.uk/index και http://app.test.logos.bg



Προς τα Πίσω Επαγωγή (Backwards Induction)

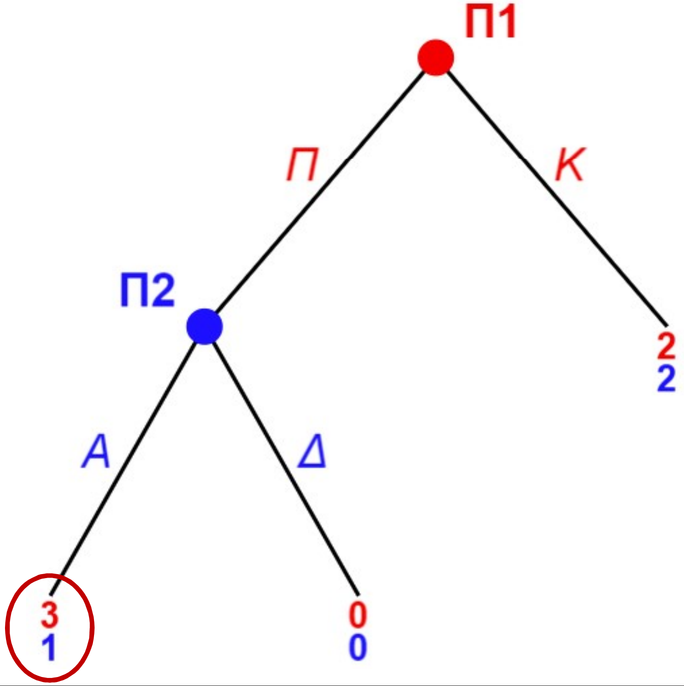
- Για κάθε εσωτερικό κόμβο v με απογόνους μόνο φύλλα.
  - Βέλτιστη απόκριση για παίκτη που «ελέγχει» v (ως προς «κινήσεις» που «οδηγούν» στον v).
  - Κόμβος v γίνεται φύλλο με επιγραφή από φύλλο βέλτιστης απόκρισης.

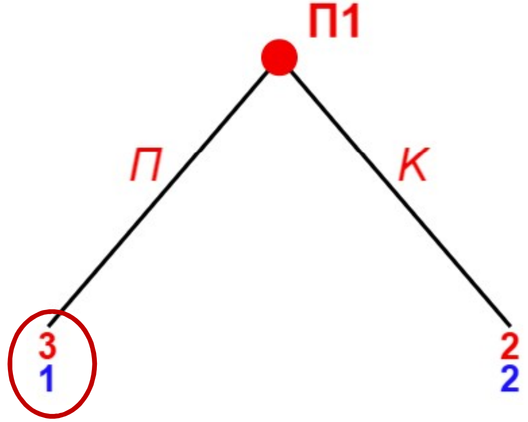




Προς τα Πίσω Επαγωγή

- Για κάθε εσωτερικό κόμβο v με απογόνους μόνο φύλλα.
  - Βέλτιστη απόκριση για παίκτη που «ελέγχει» v (ως προς «κινήσεις» προς v).
  - Κόμβος v γίνεται φύλλο με επιγραφή από φύλλο βέλτιστης απόκρισης.
  - Δεν εξηγήσαμε πως θα χειριστούμε ισοπαλίες κατά τη διαδικασία επίλυσης.
- Πίσω επαγωγή καταλήγει σε υποσύνολο ισορροπιών **αντίστοιχης** κανονικής μορφής: **εκλέπτυνση** ισορροπιών Nash (Selten, 1965).





	Αριστερά	Δεξιά
Πάνω	**3, 1**	**0, 0**
Κάτω	**2, 2**	**2, 2**

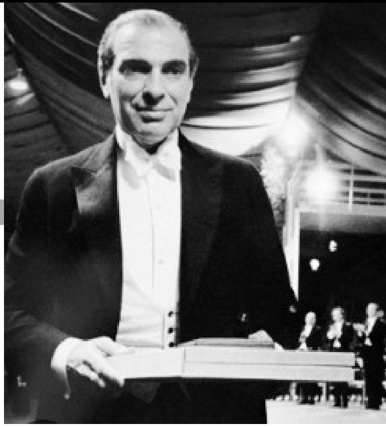
Συνάθροιση Προτιμήσεων – Κοινωνική Επιλογή

- Ν παίκτες («ψηφοφόροι») και Μ επιλογές («υποψήφιοι»).
  - Κάθε παίκτης έχει μια ολική διάταξη ως **ατομική προτίμηση**. Με βάση αυτή **αξιολογεί αποτέλεσμα** του κανόνα συνάθροισης.
  - **Κανόνας συνάθροισης** παράγει ολική διάταξη επιλογών (ή μόνο «νικητή»), με βάση ολικές διατάξεις που υποβάλλονται από παίκτες.
  - Στρατηγικές: πιθανές ολικές διατάξεις επί των επιλογών.
  - Αν προτιμήσεις παικτών **δεν** αποτελούν **ισορροπία** υπάρχει κίνητρο για **χειραγώγηση**.
- Χρώμα εμφάνισης ομάδας μεταξύ **Πράσινου**, **Κόκκινου** και Ροζ.
  - 12 παιδιά: **Πράσινο** > **Κόκκινο** > Ροζ
  - 10 παιδιά: **Κόκκινο** > **Πράσινο** > Ροζ
  - 3 παιδιά: Ροζ > **Κόκκινο** > **Πράσινο**

Συνάθροιση Προτιμήσεων – Κοινωνική Επιλογή

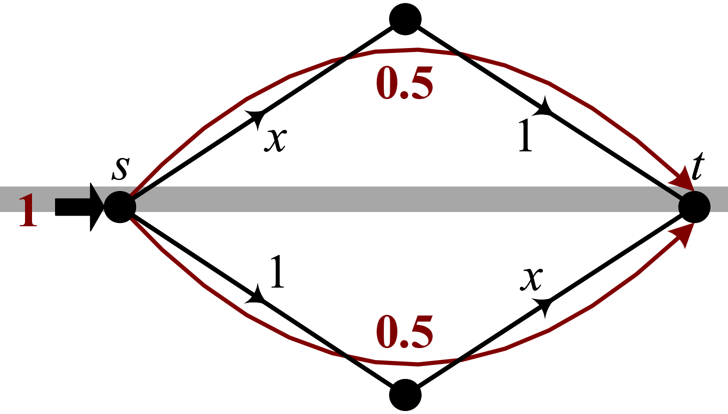
- Παράδειγμα – χρώμα εμφάνισης ομάδας:
  - 12 παιδιά: **Πράσινο** > **Κόκκινο** > Ροζ
  - 10 παιδιά: **Κόκκινο** > **Πράσινο** > Ροζ
  - 3 παιδιά: Ροζ > **Κόκκινο** > **Πράσινο**
- Συνάθροιση με **βαρύτητα θέσης** (Borda count): (2, 1, 0)
  - Προσδοκώμενο: **Κόκκινο**(35) > **Πράσινο**(34) > Ροζ(6)
  - Ενδεχόμενο: Ροζ(28) > **Πράσινο**(24) > **Κόκκινο**(23)
- Συνάθροιση με **σχετική πλειοψηφία:**
  - Προσδοκώμενο: **Πράσινο**(12) > **Κόκκινο**(10) > Ροζ(3)
  - Αναμενόμενο: **Κόκκινο**(13) > **Πράσινο**(10) > Ροζ(0)

Συνάθροιση Προτιμήσεων – Κοινωνική Επιλογή



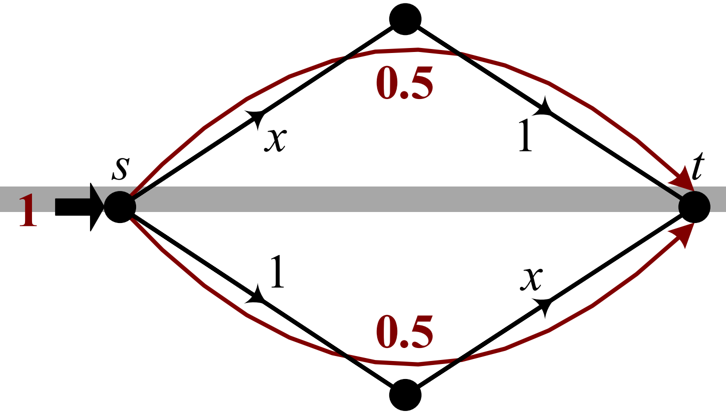
- Επιλογή με **κριτήριο Condorcet**:
  - Επικρατεί αυτή που **κερδίζει** όλες «αναμετρήσεις» **ανά δύο** (αν υπάρχει).
    (**Κοκ**, **Πρ**) = (**13**, **12**), (**Κοκ**, **Ροζ**) = (**22**, **3**), (**Πρ**, **Ροζ**) = (**22**, **3**)
  - Υποβολή ατομικής προτίμησης αποτελεί κυρίαρχη στρατηγική!
- **Θεώρημα Arrow** (1950): δεν υπάρχει κανόνας συνάθροισης ≥ 3 επιλογών που ικανοποιεί:
  - (ι) ομοφωνία, (ιι) μη-δικτατορία, και
    (ιιι) ανεξαρτησία κατάταξης ζευγών από άσχετες επιλογές.
- **Θεώρημα Gibbard–Satterthwaite** (1975): δεν υπάρχει κανόνας κοινωνικής επιλογής μεταξύ ≥ 3 ενδεχομένων που:
  - (ι) δεν χειραγωγείται, (ιι) δεν αποκλείει κάποια ενδεχόμενα, και
    (ιιι) δεν είναι δικτατορικός.

Ιδιοτελής Δρομολόγηση



- Παράδειγμα κυκλοφορίας σε δίκτυο:
  - **1 μονάδα** κυκλοφορίας διαχειρίζεται από **απειρία ιδιοτελών** παικτών (ελέγχουν απειροελάχιστο) για μετάβαση από αφετηρία s σε προορισμό t.
  - Σε κάθε ακμή e, $c_e(x)$: καθυστέρηση στην e ως συνάρτηση κυκλοφορίας x.
  - Κάθε **s – t μονοπάτι** αποτελεί στρατηγική.
  - **Ατομική καθυστέρηση** = άθροισμα καθυστερήσεων σε ακμές μονοπατιού.
  - **Βέλτιστη** ανάθεση: ελαχιστοποιεί συνολική ατομική καθυστέρηση.
  - **Ισορροπία Wardrop**: κυκλοφορία μόνο σε μονοπάτια με **ελάχιστη (ατομική)** καθυστέρηση.

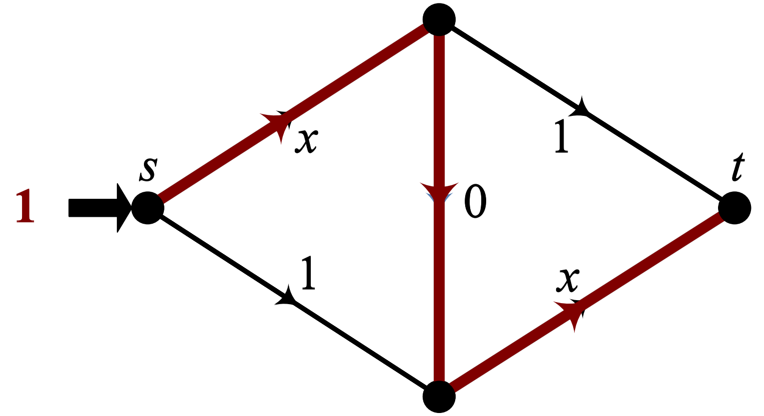
Παράδοξο Braess



- Παράδειγμα κυκλοφορίας σε δίκτυο:
  - **Βέλτιστη**: ελαχιστοποιεί συνολική ατομική καθυστέρηση.
  - **Ισορροπία**: κυκλοφορία μόνο σε μονοπάτια **ελάχιστης** καθυστέρησης.
  - Προσπάθεια βελτίωσης κυκλοφορίας με **προσθήκη** νέας ακμής.
  - Επηρεάζει **μόνο** ισορροπία, με **αύξηση** καθυστέρησης σε 2 (από 1.5).
  - **Τίμημα Αναρχίας**: συνολική καθυστέρηση σε ισορροπία προς συνολική καθυστέρηση βέλτιστης ανάθεσης (εδώ 4/3).
  - Βελτίωση απόδοσης με **αφαίρεση** επιλεγμένων ακμών: Στουτγκάρδη, Σεούλ, Νέα Υόρκη, Παρίσι, …


The New York Times

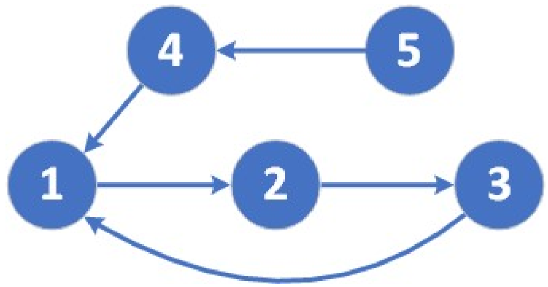
What if They Closed 42d Street and Nobody Noticed?



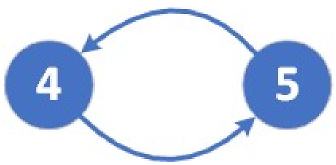
Ανταλλαγή Αγαθών – Top Trading Cycles

- N παίκτες, καθένας με αγαθό που ίσως δεν ικανοποιεί πλήρως.
  - Στόχος **ανταλλαγή αγαθών** για βελτίωση ικανοποίησης όλων: **Paretto βέλτιστη** ανάθεση. Π.χ., βιβλία, δωμάτια σε εστίες, ένδυση, …
  - Π.χ., N = 5 και (1, Α), (2, Β), (3, Γ), (4, Δ), (5, Ε) με προτιμήσεις

    1: Β > Ε > Γ > Α > Δ
    2: Γ > Α > Ε > Δ > Β
    3: Α > Β > Γ > Δ > Ε
    4: Α > Γ > Ε > Δ > Β
    5: Δ > Α > Γ > Β > Ε



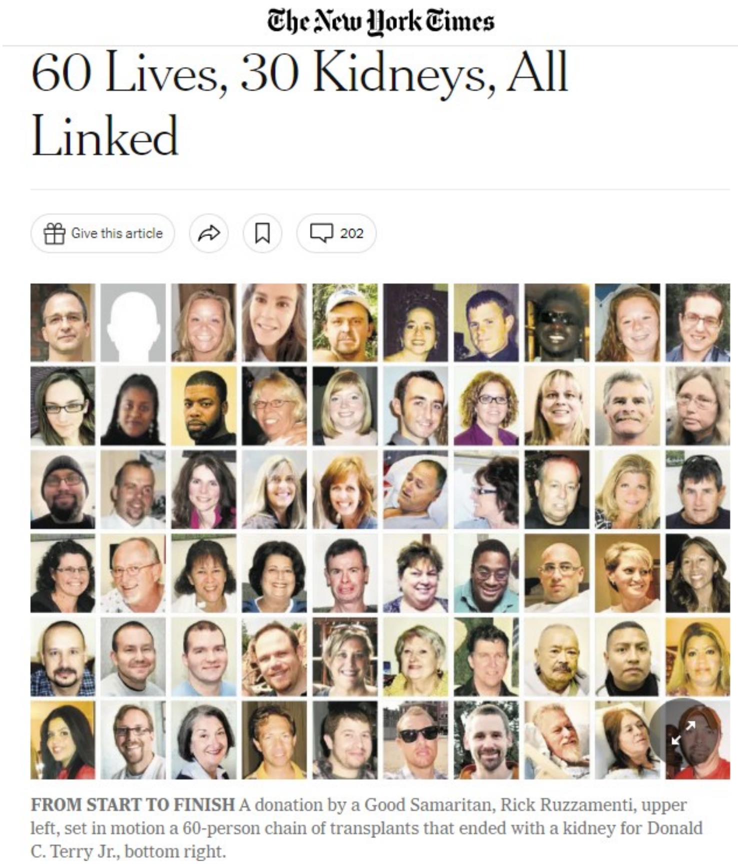
(1, Β), (2, Γ), (3, Α), (4, Ε), (5, Δ)
4: Ε > Δ
5: Δ > Ε



  - Γράφημα με **κορυφές παίκτες** και **ακμή (x, y)** αν x έχει αγαθό του y ως **πρώτη διαθέσιμη** προτίμηση.
  - **Ανταλλαγή** και αφαίρεση κάθε **κύκλου** και επανάληψη.

Μεταμοσχεύσεις Νεφρών

- Πλειοψηφία ασθενών έχει μη συμβατό δωρητή!
  - Top trading cycles, αλλά εφικτοί **κύκλοι** έχουν **μήκος 2 ή 3**.
  - Κύκλος μήκους 3 απαιτεί **6 ταυτόχρονες χειρουργικές** επεμβάσεις. Ενδεχόμενη υπαναχώρηση δωρητή, μετά μεταμόσχευση σε ασθενή του.
- **Αλυσίδες** ξεκινούν με **εθελοντή** δωρητή.
  - Εθελοντής δίνει σε **πρώτο συμβατό** ασθενή.
  - Δότης συμβατού **κατόπιν** δίνει σε πρώτο διαθέσιμο συμβατό ασθενή.
  - Ενδεχόμενη υπαναχώρηση **διακόπτει** αλυσίδα, αλλά **δεν βλάπτει** συγκεκριμένο ασθενή.
  - Λογική αλυσίδας **κυριαρχεί** στις ΗΠΑ (τυπικό μήκος 100δες).



Σχεδιασμός Μηχανισμών – Δημοπρασίες

- Σχεδιασμός παιγνίων με επιθυμητό αποτέλεσμα να προκύπτει ως ισορροπία σε κυρίαρχες στρατηγικές.
- Δημοπρασία για έναν πίνακα μεταξύ n παικτών.
  - Ο πίνακας αξίζει v_j για παίκτη j – αυτή αξία γνωστή μόνο σε παίκτη j.
  - Οι παίκτες υποβάλουν σφραγισμένες προσφορές $(b_1, \ldots, b_n)$, με $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$.
  - Πίνακας κατοχυρώνεται σε παίκτη 1, με μεγαλύτερη προσφορά, σε τιμή p.
  - Ωφέλεια παίκτη 1 (νικητή) = $v_1 - p$, ωφέλεια υπόλοιπων = 0.
  - Επιλογή τιμής p (συνάρτηση προσφορών) ώστε **προσφορά = αξία** να αποτελεί κυρίαρχη στρατηγική για όλους τους παίκτες (φιλαλήθεια, truthfulness).
- Τιμή $p = b_2$ (δεύτερη μεγαλύτερη προσφορά).
  - Vickrey (ή 2nd price) auction (William Vickrey, βραβείο Nobel 1996).
  - Ωφέλεια νικητή ανεξάρτητη προσφοράς του (εφόσον είναι νικητής, δηλ. $b_1 > b_2$).
  - Ωφέλεια υπολοίπων θα είναι πάντα ≤ 0.