

# Μη Ντετερμινισμός και NP-Πληρότητα

---

Διδάσκοντες: **Αρ. Παγουρτζής, Δ. Φωτάκης,  
Δ. Σούλιου, Παν. Γροντάς**

Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

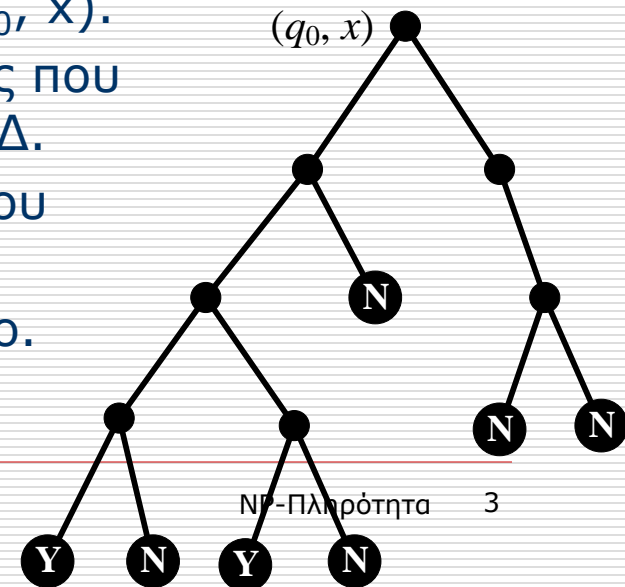


# Μη Ντετερμινιστικές Μηχανές Turing

- Μη ντετερμινιστική Μηχ. Turing (NTM)  $N \equiv (Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$ 
  - $Q$  σύνολο καταστάσεων.
  - $\Sigma$  αλφάβητο εισόδου και  $\Gamma = \Sigma \cup \{\sqcup\}$  αλφάβητο ταινίας.
  - $q_0 \in Q$  αρχική κατάσταση.
  - $F \subseteq Q$  τελική κατάσταση (εστιάζουμε σε YES και NO).
  - $\Delta \subseteq ((Q \setminus F) \times \Gamma) \times (Q \times \Gamma \times \{L, R, S\})$  **σχέση** μετάβασης.  
(κατάσταση  $q$ , διαβάζει  $a$ )  $\rightarrow$  **σύνολο** ενεργειών  
(νέα κατάσταση  $q'$ , γράφει  $a'$ , κεφαλή μετακινείται L, R ή S).
- (Αρχική, τελική) **διαμόρφωση** όπως για DTM.
- Για κάθε τρέχουσα διαμόρφωση, υπάρχουν **καμία ή περισσότερες** επιτρεπτές επόμενες διαμορφώσεις όπου μπορεί DTM να μεταβεί!

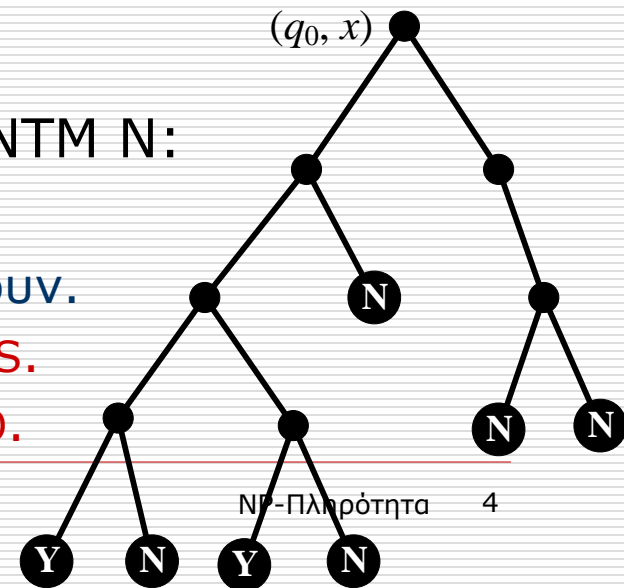
# Μη Ντετερμινιστικές Μηχανές Turing

- Υπολογισμός NTM: **σχέση  $\vdash$**  και σχέση  $\vdash^*$ .
  - $\vdash$  : διαμορφώσεις που προκύπτουν από τρέχουσα σε ένα βήμα.
  - $\vdash^*$  : διαμορφώσεις που προκύπτουν σε κάποιο #βημάτων.
- Υπολογισμός NTM αναπαρίσταται με **δέντρο**:
  - Ρίζα: **αρχική** διαμόρφωση  $(q_0, x)$ .
  - **Κόμβοι**: όλες οι **διαμορφώσεις** που μπορεί να προκύψουν από **αρχική** διαμόρφωση  $(q_0, x)$ .
  - **Απόγονοι** κόμβοι: όλες οι διαμορφώσεις που προκύπτουν με βάση σχέση μετάβασης  $\Delta$ .
  - **Φύλλα**: όλες οι **τελικές** διαμορφώσεις που προκύπτουν από αρχική.
  - Βαθμός **σταθερός!** Χβτγ, **δυναμικό** δέντρο.
  - Υπολογισμός DTM: **μονοπάτι!**



# Αποδοχή και Απόρριψη

- NTM  $N$  έχει **πολλούς κλάδους** υπολογισμού («εκδοχές») που μπορεί να καταλήγουν σε **διαφορετικό αποτέλεσμα**.
  - Αποδέχεται αν **τουλάχιστον ένας** κλάδος αποδέχεται: «δικτατορία της αποδοχής»!
  - $N(x) = \text{YES}$  αν  $(q_0, \underline{x_1}x_2 \dots x_n) \vdash^* (\text{YES}, \dots)$
- Γλώσσα  $L$  **NTM-αποκρίσιμη** αν υπάρχει NTM  $N$ ,  $\forall x \in \Sigma^*$ :
  - **όλοι** οι κλάδοι της  $N(x)$  **τερματίζουν**, και  $x \in L \Leftrightarrow N(x) = \text{YES}$
- Γλώσσα  $L$  **NTM-αποδεκτή** αν υπάρχει NTM  $N$ :
  - $\forall x \in \Sigma^*, x \in L \Leftrightarrow N(x) = \text{YES}$
  - Ενδέχεται κλάδοι  $N(x)$  να μην τερματίζουν.
  - Όταν  $x \in L$ , τουλ. ένας τερματίζει σε **YES**.
  - Όταν  $x \notin L$ , όσοι τερματίζουν δίνουν **NO**.



# Μη Ντετερμινιστική Χρονική Πολυπλοκότητα

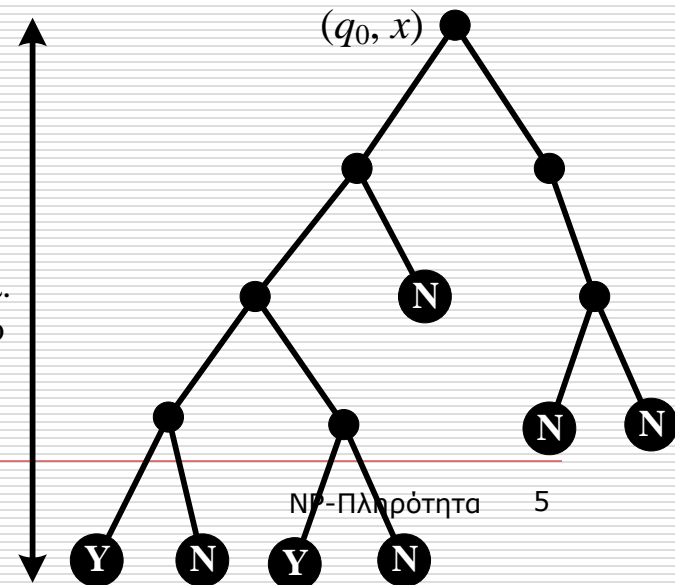
- Χρονική πολυπλοκότητα NTM  $N$ :
  - Αύξουσα συνάρτηση  $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $x$ ,  $|x| = n$ , όλοι οι κλάδοι της  $N(x)$  έχουν μήκος  $\leq t(n)$ .
  - Μέγιστο ύψος δέντρου υπολογισμού  $N$  με είσοδο μήκους  $n$ .
- Μη ντετερμινιστική χρονική πολυπλοκότητα προβλ.  $\Pi$ :
  - Χρονική πολυπλοκότητα «ταχύτερης» NTM που λύνει  $\Pi$ .

- Κλάση πολυπλοκότητας

$\text{NTIME}[t(n)] \equiv \{\Pi : \Pi \text{ λύνεται σε μη ντετερμινιστικό χρόνο } O(t(n))\}$

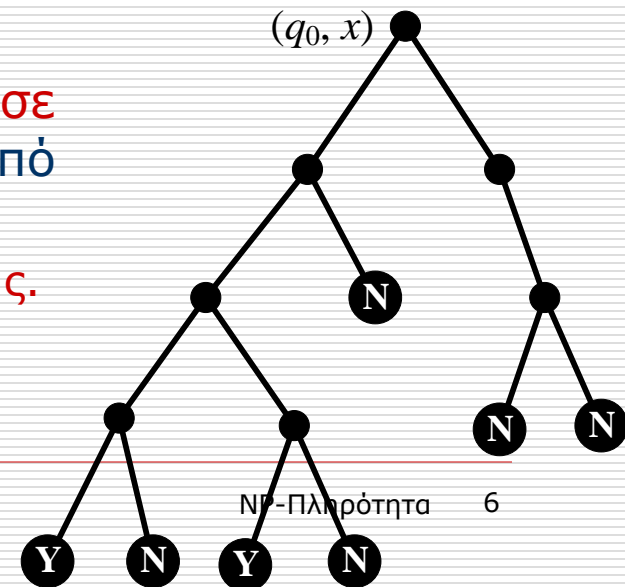
- Όχι ρεαλιστικό μοντέλο, αλλά θεμελιώδες για Θεωρία Πολυπλοκότητας!

Χρονική Πολυπλ.  
= Ύψος Δέντρου



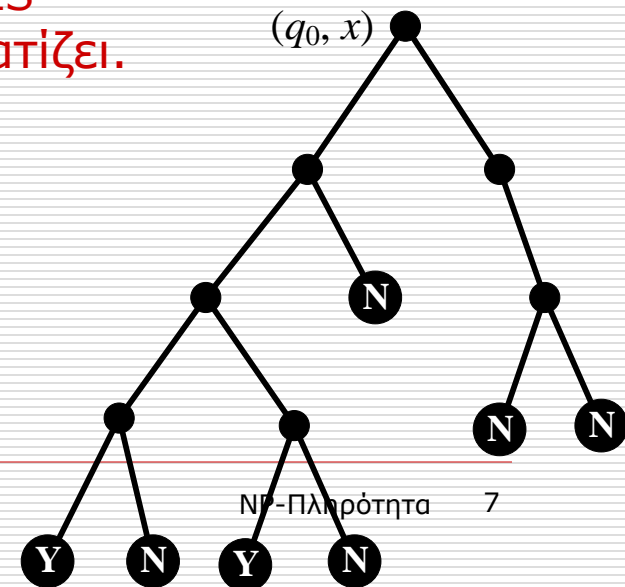
# Μη Ντετερμινιστικός Υπολογισμός

- Ισοδύναμοι τρόποι για μη ντετερμινιστικό υπολογισμό:
  - $N(x)$  «**μαντεύει**» (πάντα σωστά) **κλάδο** που καταλήγει σε YES και **ακολουθεί μόνο αυτόν** (επιβεβαιώνει YES).
    - Αναζήτηση  $x$  σε πίνακα  $A$  με  $n$  στοιχεία:  
«Μάντεψε» θέση  $k$ , και **επιβεβαίωσε** ότι  $A[k] = x$ .
    - **Hamilton Cycle**: «Μάντεψε» μετάθεση κορυφών και **επιβεβαίωσε** ότι δίνει HC.
    - **$k$ -SAT**: «Μάντεψε» αποτίμηση και **επιβεβαίωσε** ότι ικανοποιεί  $\varphi$ .
  - Στο βήμα  $k$ ,  $N(x)$  «εκτελεί» / βρίσκεται σε **όλες** τις διαμορφώσεις σε **απόσταση  $k$**  από αρχική **ταυτόχρονα**.
    - «Μηχανιστική» προσομοίωση νοημοσύνης.
  - **Χρόνος** = ύψος δέντρου υπολογισμού.



# Ντετερμινιστική Προσομοίωση

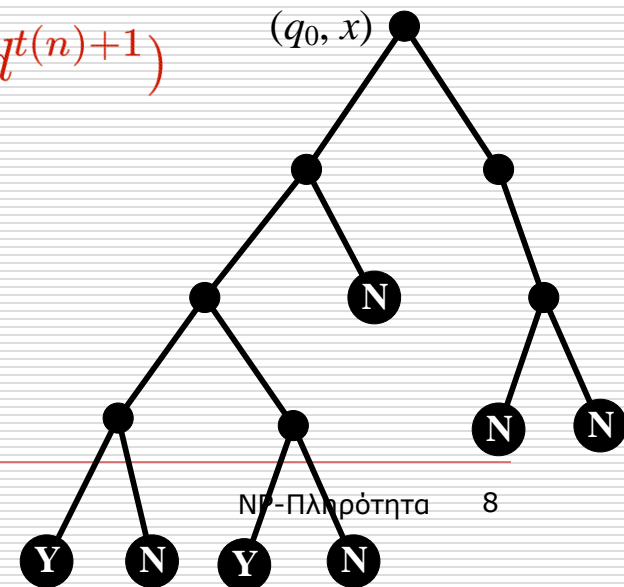
- Ντετερμινιστική **προσομοίωση NTM** με **εκθετική** επιβάρυνση.
  - Προσομοίωση δέντρου υπολογισμού με **BFS λογική**.
  - Για  $t = 1, 2, \dots, t(|x|)$ , **προσομοίωση όλων** των κλάδων υπολογισμού  $N(x)$  **μήκους  $\leq t$** .
  - Τερματισμός **YES**: **πρώτος** κλάδος που καταλήγει σε **YES**.
  - Τερματισμός **NO**: πρώτο  $t$  που **όλοι** οι κλάδοι **τερματίζουν σε NO**.
  - **Μη τερματισμός**: **κανένας** κλάδος σε **YES** και **κάποιος δεν τερματίζει**.
- NTM-αποκρίσιμο ανν DTM-αποκρίσιμο.  
(Θέση Church-Turing)
- NTM-αποδεκτό ανν DTM-αποδεκτό.



# NTIME και DTIME

- Ντετερμινιστική προσομοίωση NTM με εκθετική επιβάρυνση.
  - Για  $t = 1, 2, \dots, t(|x|)$ , προσομοίωση όλων των κλάδων υπολογισμού  $N(x)$  μήκους  $\leq t$ .
  - Τερματισμός YES: πρώτος κλάδος που καταλήγει σε YES.
  - Τερματισμός NO: πρώτο  $t$  που όλοι οι κλάδοι τερματίζουν σε NO.
- Αν NTM χρόνου  $t(n)$  και με βαθμό μη ντετερμινισμού  $d$ ,  
χρόνος προσομοίωσης:  $\sum_{t=1}^{t(n)} O(d^t) = O(d^{t(n)+1})$
- Κατά συνέπεια:

$$\text{NTIME}[t(n)] \subseteq \bigcup_{d>1} \text{DTIME}[d^{t(n)}]$$





# Η Κλάση NP

---

- Προβλήματα που λύνονται σε πολυωνυμικό **μη ντετερμινιστικό** χρόνο:  $NP \equiv \bigcup_{k \geq 0} NTIME[n^k]$ 
  - «YES-λύση» μπορεί να «μαντευθεί» σε πολυωνυμικό χρόνο (άρα πολυωνυμικού μήκους) και να επιβεβαιωθεί σε πολυωνυμικό **ντετερμινιστικό** χρόνο.
  - (k-)SAT, κύκλος Hamilton, TSP, Knapsack, MST, Shortest Paths, Max Flow, ... ανήκουν στην κλάση **NP**.
  - Χρειάζεται προσπάθεια για να σκεφθείτε πρόβλημα εκτός **NP**!
- Κλάση **NP** **κλειστή** ως προς ένωση, τομή, και πολυωνυμική αναγωγή.
  - Πιστεύουμε ότι κλάση **NP** **δεν** είναι **κλειστή** ως προς **συμπλήρωμα** (ασυμμετρία υπέρ αποδοχής).
  - **coNP**: αντίστοιχη κλάση με ασυμμετρία υπέρ **απόρριψης**.

# NP και Συνοπτικά Πιστοποιητικά

---

- Σχέση  $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$  είναι:
  - πολυωνυμικά **ισορροπημένη** αν  $\forall (x, y) \in R, |y| \leq \text{poly}(|x|)$
  - πολυωνυμικά **αποκρίσιμη** αν  $(x, y) \in R$  ελέγχεται (ντετερμινιστικά) σε πολυωνυμικό χρόνο.
- $L \in \mathbf{NP}$  ανν υπάρχει πολυωνυμικά **ισορροπημένη** και πολυωνυμικά **αποκρίσιμη** σχέση  $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$  ώστε
$$L = \{x \in \Sigma^* : \exists y \in \Sigma^*, (x, y) \in R\}$$
  - $y$  αποτελεί «**σύντομο**» και «**εύκολο**» να ελεγχθεί **πιστοποιητικό** ότι  $x \in L$ .
- Αν υπάρχει τέτοια σχέση  $R$ , υπάρχει NTM  $N$ :
  - $\forall x \in L, N(x)$  «**μαντεύει**» πιστοποιητικό  $y$  και **επιβεβαιώνει** ότι  $(x, y) \in R$  σε πολυωνυμικό χρόνο.

# NP και Συνοπτικά Πιστοποιητικά

---

- $L \in \mathbf{NP}$  ανν υπάρχει πολυωνυμικά **ισορροπημένη** και πολυωνυμικά **αποκρίσιμη** σχέση  $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$  ώστε

$$L = \{x \in \Sigma^* : \exists y \in \Sigma^*, (x, y) \in R\}$$

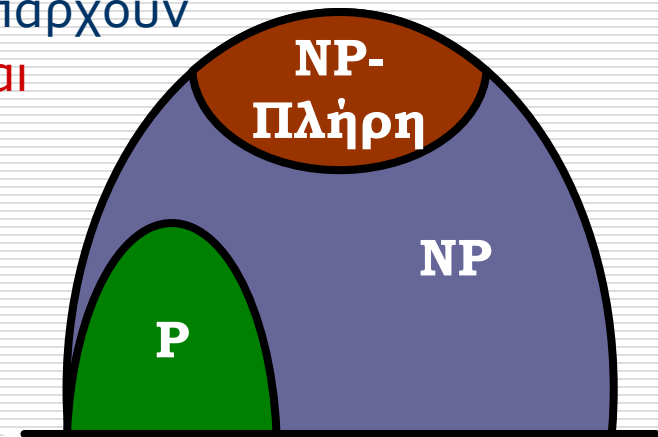
- Αν  $L \in \mathbf{NP}$ , θεωρούμε NTM  $N$  που αποφασίζει  $L$ .
  - Πιστοποιητικό  $y$  αποτελεί **κωδικοποίηση** μη ντετερμινιστικών επιλογών  $N(x)$  που οδηγούν σε **YES**.  
 $R = \{(x, y) : x \in L \text{ και } y \text{ κωδικοποιεί κλάδο } N(x) \text{ με YES}\}$
  - $|y| \leq \text{poly}(|x|)$  γιατί  $N$  πολυωνυμικού χρόνου.
  - $(x, y) \in R$  ελέγχεται πολυωνυμικά ακολουθώντας **(μόνο)** κλάδο υπολογισμού  $N(x)$  που κωδικοποιείται από  $y$ .
    - $(x, y) \in R$  ανν ο  $y$ -κλάδος  $N(x)$  καταλήγει σε **YES**.

# NP και Συνοπτικά Πιστοποιητικά

- Η κλάση **NP** περιλαμβάνει προβλήματα απόφασης:
  - Για κάθε **YES-στιγμιότυπο**, υπάρχει «**συνοπτικό**» πιστοποιητικό που ελέγχεται «**εύκολα**» (πολυωνυμικά).
  - Ένα τέτοιο πιστοποιητικό μπορεί να είναι **δύσκολο να υπολογισθεί**.
  - Δεν απαιτείται κάτι αντίστοιχο για **NO-στιγμιότυπα**.
- Κλάση **coNP** περιλαμβάνει προβλήματα απόφασης που έχουν αντίστοιχο **πιστοποιητικό για NO-στιγμιότυπα**.
  - Αν πρόβλημα  $\Pi \in \mathbf{NP}$ , πρόβλημα  $\text{co}\Pi = \{x : x \notin \Pi\} \in \mathbf{coNP}$ .
- Προβλήματα στο **P** ανήκουν **NP**
- Προβλήματα στο **P** ανήκουν **coNP** }  $\Rightarrow \mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP} \cap \mathbf{coNP}$

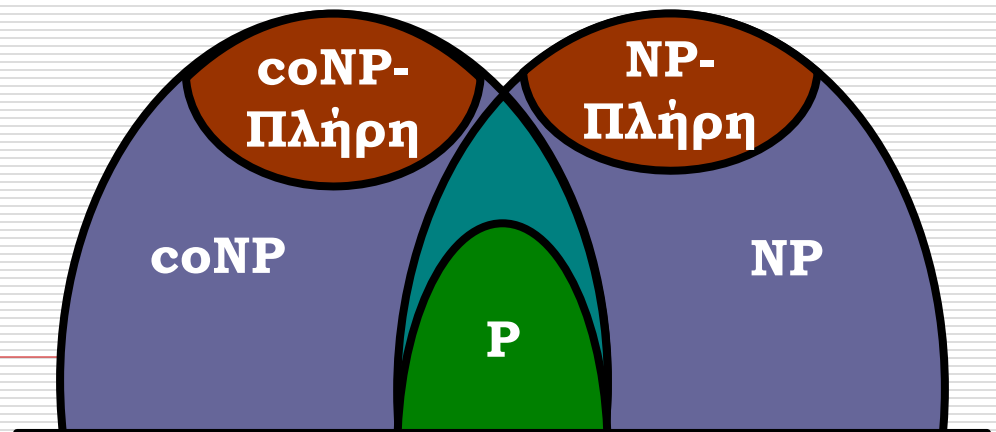
# NP-Πληρότητα

- Πρόβλημα  $\Pi$  είναι **NP-πλήρες** αν  $\Pi \in \mathbf{NP}$  και κάθε πρόβλημα  $\Pi' \in \mathbf{NP}$  ανάγεται πολυωνυμικά στο  $\Pi$  ( $\Pi' \leq_p \Pi$ ).
  - $\Pi$  είναι από τα δυσκολότερα προβλήματα στο **NP** (όσον αφορά στον υπολογισμό πολυωνυμικού χρόνου).
- $\Pi$  κάποιο **NP-πλήρες** πρόβλημα:  $\Pi \in \mathbf{P}$  αν  $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ .
  - Αν  $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ , πολλά σημαντικά προβλήματα **ευεπίλυτα!**
  - Αν  $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$  (όπως όλοι πιστεύουν), υπάρχουν προβλήματα στο **NP** που **δεν** λύνονται σε **πολυωνυμικό** χρόνο!
  - Εξ' ορισμού, τα **NP-πλήρη** ανήκουν σε αυτή την κατηγορία.



# NP-Πληρότητα

- Αντίστοιχα με **coNP** και **coNP-πλήρη** προβλήματα.
- Έστω προβλήματα  $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathbf{NP}$  ώστε  $\Pi_1 \leq_P \Pi_2$ . Ποιες από τις παρακάτω δηλώσεις αληθεύουν;
  1.  $\Pi_1 \in \mathbf{P} \Rightarrow \Pi_2 \in \mathbf{P}$
  2.  $\Pi_2 \in \mathbf{P} \Rightarrow \Pi_1 \in \mathbf{P}$
  3.  $\Pi_2$  όχι NP-πλήρες  $\Rightarrow \Pi_1$  όχι NP-πλήρες
  4.  $\Pi_1$  NP-πλήρες  $\Rightarrow \Pi_2 \leq_P \Pi_1$



# SAT είναι NP-Πλήρες

---

- **Ικανοποιησιμότητα (SAT):**
  - Δίνεται λογική πρόταση  $\varphi$  σε CNF. Είναι  $\varphi$  ικανοποιήσιμη;
- **SAT  $\in$  NP.**
  - «Μαντεύουμε» ανάθεση τιμών αλήθειας  $a$  σε μεταβλητές  $\varphi$ .
  - Ελέγχουμε ότι ανάθεση  $a$  ικανοποιεί  $\varphi$ .
- **Θεώρημα Cook (1971):**
  - SAT είναι **NP**-πλήρες.
  - Υπολογισμός οποιασδήποτε NTM πολυωνυμικού χρόνου  $N$  με είσοδο  $x$  κωδικοποιείται σε CNF πρόταση  $\varphi_{N,x}$ :
    - $\varphi_{N,x}$  έχει μήκος πολυωνυμικό σε  $|x|$  και  $|N|$ .
    - $\varphi_{N,x}$  υπολογίζεται σε χρόνο πολυωνυμικό σε  $|x|$  και  $|N|$ .
    - $\varphi_{N,x}$  είναι ικανοποιήσιμη αν  $N(x) = \text{YES}$ .

# SAT είναι NP-Πλήρες

---

- Έστω NTM  $N$   $p(n)$ -χρόνου και είσοδος  $x$ ,  $|x| = n$ .
- Για κωδικοποίηση  $N(x)$ , εισάγουμε 3 είδη μεταβλητών:
  - $Q[k, t]$ :  $N(x)$  βρίσκεται στην κατάσταση  $q_k$  την στιγμή  $t$ .
  - $H[j, t]$ : κεφαλή βρίσκεται στη θέση  $j$  την στιγμή  $t$ .
  - $S[j, i, t]$ : θέση  $j$  περιέχει σύμβολο  $s_i$  την στιγμή  $t$ .  
 $0 \leq t \leq p(n), 0 \leq k \leq r, -p(n) \leq j \leq p(n), 0 \leq i \leq |\Gamma|$
- Για κωδικοποίηση  $N(x)$ , εισάγουμε 7 ομάδες όρων:
  - $G_1$ :  $N(x)$  βρίσκεται σε μία μόνο κατάσταση κάθε στιγμή.
  - $G_2$ : κεφαλή σε μία μόνο θέση κάθε στιγμή.
  - $G_3$ : κάθε θέση ταινίας περιέχει ένα μόνο σύμβολο κάθε στιγμή.
  - $G_4$ :  $N(x)$  ξεκινά από αρχική διαμόρφωση  $(q_0, x)$ .
  - $G_5$ :  $N(x)$  βρίσκεται σε κατάσταση YES την στιγμή  $p(n)$ .



# SAT είναι NP-Πλήρες

---

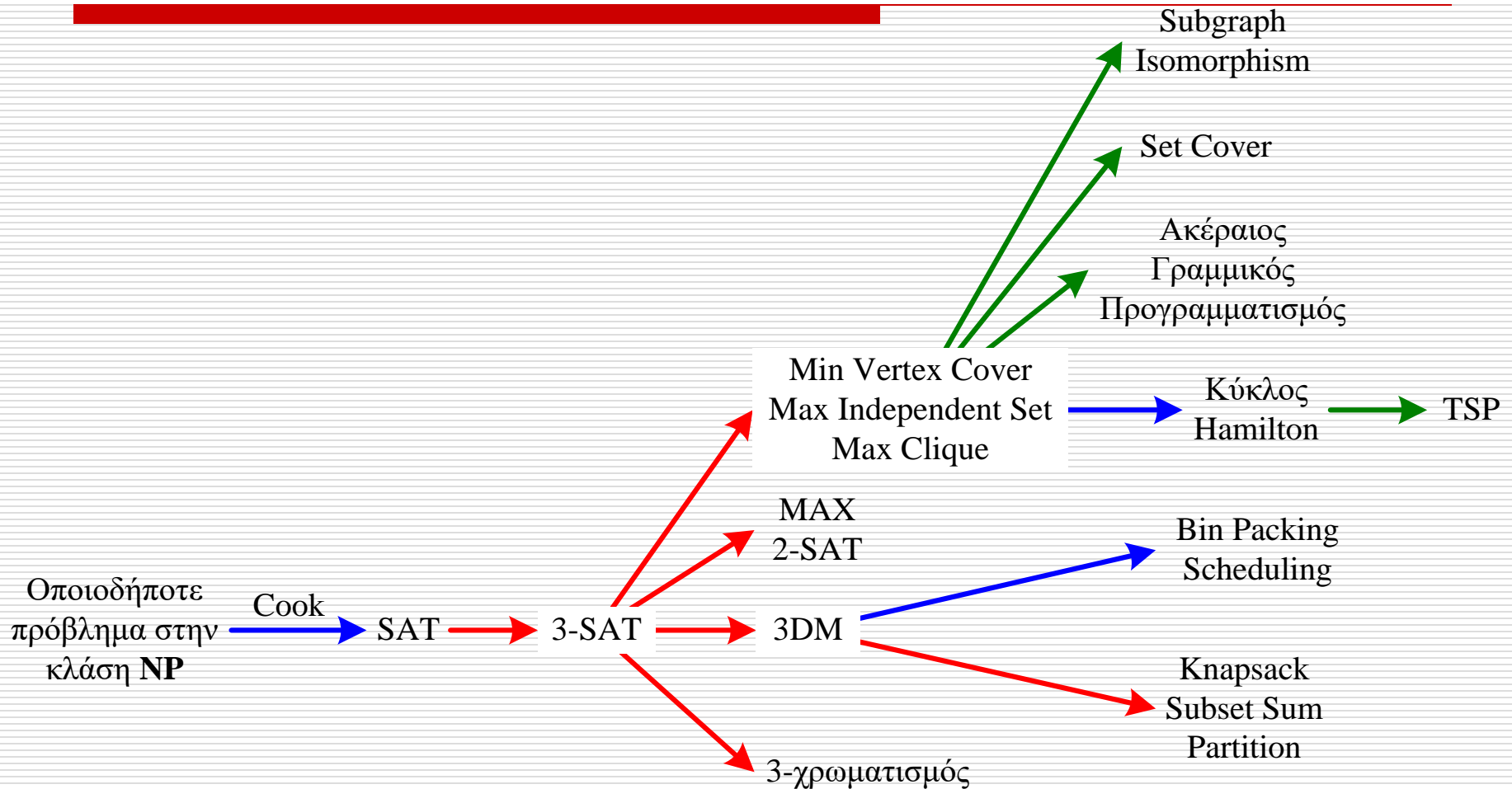
- Για κωδικοποίηση  $N(x)$ , εισάγουμε 7 ομάδες όρων:
  - $G_6$ : για κάθε  $t$ , μόνο το σύμβολο στη θέση όπου βρίσκεται η κεφαλή μπορεί να αλλάξει στην επόμενη στιγμή  $t+1$ .
  - $G_7$ : για κάθε  $t$ , η διαμόρφωση στην επόμενη στιγμή  $t+1$  προκύπτει από την τρέχουσα διαμόρφωση με εφαρμογή της σχέσης μετάβασης  $\Delta$ .
- Τελικά:  $\varphi_{N,x} = G_1 \wedge G_2 \wedge G_3 \wedge G_4 \wedge G_5 \wedge G_6 \wedge G_7$ 
  - $\varphi_{N,x}$  έχει μήκος και κατασκευάζεται σε χρόνο  $O(p^3(n))$ . από περιγραφή  $N$  και είσοδο  $x$ .
  - $\varphi_{N,x}$  είναι ικανοποιήσιμη αν  $N(x) = \text{YES}$ .

# Αποδείξεις NP-Πληρότητας

---

- Απόδειξη ότι πρόβλημα (απόφασης)  $\Pi$  είναι **NP**-πλήρες:
  - Αποδεικνύουμε ότι  $\Pi \in \mathbf{NP}$  (εύκολο, αλλά απαραίτητο!).
  - Επιλέγουμε (κατάλληλο) γνωστό **NP**-πλήρες πρόβλημα  $\Pi'$ .
  - **Ανάγουμε** πολυωνυμικά το  $\Pi'$  στο  $\Pi$  ( $\Pi' \leq_p \Pi$ ):
    - Περιγράφουμε κατασκευή στιγμιότυπου  $R(x)$  του  $\Pi$  από στιγμιότυπο  $x$  του  $\Pi'$ .
    - Εξηγούμε ότι  $R(x)$  υπολογίζεται σε πολυωνυμικό χρόνο.
    - Αποδεικνύουμε ότι  $x \in \Pi' \Leftrightarrow R(x) \in \Pi$ .
- Αναγωγή με γενίκευση.
  - $\Pi$  αποτελεί γενίκευση του  $\Pi'$ , και προφανώς  $\Pi$  είναι τουλάχιστον τόσο δύσκολο όσο το  $\Pi'$ .

# Ακολουθία Αναγωγών



# 3-SAT είναι NP-Πλήρες

- **3-SAT**: λογική πρόταση  $\varphi$  σε **3-CNF**. Είναι  $\varphi$  ικανοποιήσιμη;
- **3-SAT**  $\in$  **NP** (όπως και SAT). Θδο **SAT**  $\leq_p$  **3-SAT**.
  - Έστω πρόταση  $\psi = c_1 \wedge \dots \wedge c_m$  σε CNF.
  - Κατασκευάζουμε  $\varphi_\psi$  σε **3-CNF** αντικαθιστώντας κάθε όρο  $c_j = l_{j_1} \vee \dots \vee l_{j_k}$ ,  $k \geq 4$ , με όρο 
$$c'_j = (l_{j_1} \vee l_{j_2} \vee z_{j_1}) \wedge (\neg z_{j_1} \vee l_{j_3} \vee z_{j_2}) \wedge (\neg z_{j_2} \vee l_{j_4} \vee z_{j_3}) \wedge \dots \wedge (\neg z_{j_{k-4}} \vee l_{j_{k-2}} \vee z_{j_{k-3}}) \wedge (\neg z_{j_{k-3}} \vee l_{j_{k-1}} \vee l_{j_k})$$
  - $c_j$  ικανοποιήσιμος ανν  $c'_j$  ικανοποιήσιμος.  
Αν  $l_p$  πρώτο αληθές literal  $c_j$ , θέτουμε  $z_{j_i} = \begin{cases} 1 & \text{αν } i < p - 1 \\ 0 & \text{αν } i \geq p - 1 \end{cases}$
  - Άρα  $\varphi_\psi$  ικανοποιήσιμη ανν  $\psi$  ικανοποιήσιμη.
  - Και βέβαια, κατασκευή  $\varphi_\psi$  σε πολυωνυμικό χρόνο.

# 3-SAT(3) είναι NP-Πλήρες

- 3-SAT(3): στην  $\varphi$  κάθε μεταβλητή εμφανίζεται  $\leq 3$  φορές:
  - Είτε  $\leq 1$  χωρίς άρνηση και  $\leq 2$  με άρνηση, είτε  $\leq 2$  χωρίς άρνηση και  $\leq 1$  με άρνηση.
- Θδο  $3\text{-SAT} \leq_p 3\text{-SAT}(3)$ .
  - Έστω πρόταση  $\psi = c_1 \wedge \dots \wedge c_m$  σε 3-CNF.
  - $\forall$  μεταβλητή  $x$  που εμφανίζεται  $k > 3$  φορές, αντικαθιστούμε κάθε εμφάνιση  $x$  με διαφορετική μεταβλητή  $x_1, x_2, \dots, x_k$ .
  - Προσθέτουμε όρους που ικανοποιούνται ανν οι  $x_1, x_2, \dots, x_k$  έχουν ίδια τιμή αλήθειας (εμφανίσεις ίδιας μετ/τής  $x$ ):
$$(\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge \dots \wedge (\neg x_{k-1} \vee x_k) \wedge (\neg x_k \vee x_1)$$
  - Έτσι κατασκευάζουμε 3-SAT(3) στιγμιότυπο  $\psi'$ :
    - $\psi'$  ικανοποιήσιμη ανν  $\psi$  ικανοποιήσιμη.

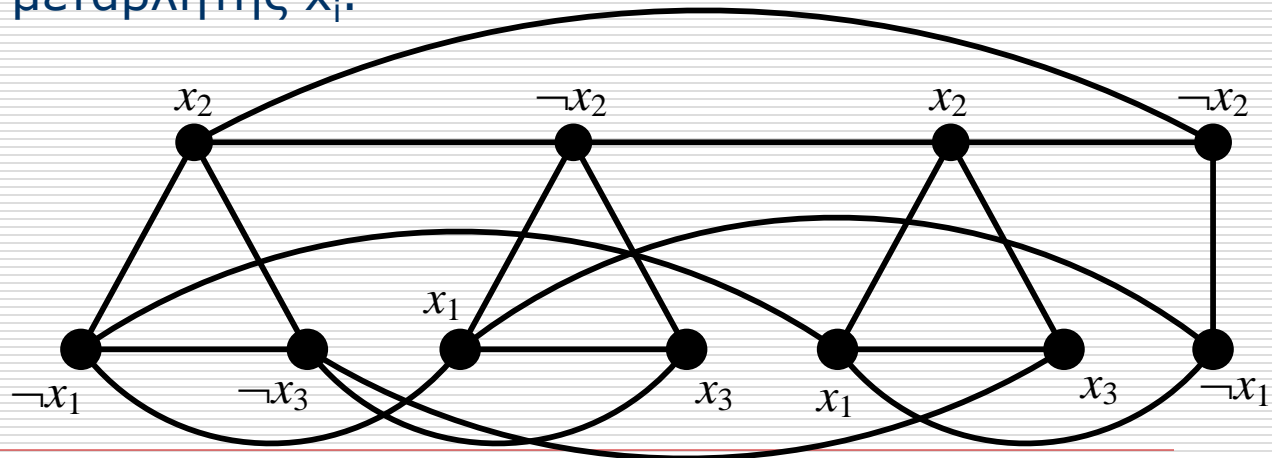
# MAX 2-SAT είναι NP-Πλήρες

- **MAX 2-SAT:** (μη ικανοποιήσιμη)  $\varphi$  σε 2-CNF και  $K < \# \text{όρων}$ . Υπάρχει **ανάθεση** τιμών αλήθειας που **ικανοποιεί**  $\geq K$  όρους;
- MAX 2-SAT  $\in$  **NP**. Θδο **3-SAT**  $\leq_p$  MAX 2-SAT.
  - Έστω  $c_i = x \vee y \vee z, w_i$  μετ/τή,  $(x), (y), (z), (w_i)$   
και ομάδα  $C'_i$  10 2-CNF όρων:  $(\neg x \vee \neg y), (\neg y \vee \neg z), (\neg z \vee \neg x)$   
 $(x \vee \neg w_i), (y \vee \neg w_i), (z \vee \neg w_i)$
  - Ανάθεση **ικανοποιεί**  $c_i$ : επιλέγουμε  $w_i$ , ικανοποιούνται **7** όροι  $C'_i$ .
  - Ανάθεση **δεν** ικανοποιεί  $c_i$ : ικανοποιούνται μόνο **6** όροι  $C'_i$ .
  - Έτσι από  $\psi = c_1 \wedge \dots \wedge c_m$  σε 3-CNF, κατασκευάζουμε  $\varphi_\psi = C'_1 \wedge \dots \wedge C'_m$  σε 2-CNF σε **πολυωνυμικό** χρόνο.
  - $\psi$  **ικανοποιήσιμη** αν υπάρχει ανάθεση τιμών αλήθειας που **ικανοποιεί**  $\geq 7m$  όρους της  $\varphi_\psi$ .

# MIS είναι NP-πλήρες

- **Max Independent Set (MIS)**: Γράφημα  $G(V, E)$  και  $k < |V|$ . Έχει  $G$  ανεξάρτητο σύνολο με  $\geq k$  κορυφές;
- $MIS \in \mathbf{NP}$ . Θδο  $3\text{-SAT} \leq_p MIS$ .
  - Έστω  $\psi = c_1 \wedge \dots \wedge c_m$  σε 3-CNF. Κατασκευάζουμε  $G_\psi$ .
  - Ένα «τρίγωνο»  $t_j$  για κάθε όρο  $c_j = l_{j1} \vee l_{j2} \vee l_{j3}$
  - Μια ακμή  $(x_i, \neg x_i)$  για κάθε ζευγάρι συμπληρωματικών εμφανίσεων μεταβλητής  $x_i$ .

$$\begin{aligned}\psi &= (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \\ &\wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \\ &\wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \\ &\wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2)\end{aligned}$$



# MIS είναι NP-πλήρες

---

- 3-SAT  $\leq_p$  MIS (συνέχεια).
  - Έστω  $\psi = c_1 \wedge \dots \wedge c_m$  σε 3-CNF. Κατασκευάζουμε  $G_\psi$ .
  - Ένα «τρίγωνο»  $t_j$  για κάθε όρο  $c_j = l_{j_1} \vee l_{j_2} \vee l_{j_3}$
  - Μια ακμή  $(x_i, \neg x_i)$  για κάθε ζευγάρι συμπληρωματικών εμφανίσεων μεταβλητής  $x_i$ .
  - Αν  $\psi$  ικανοποιήσιμη, από κάθε «τρίγωνο»  $t_j$  επιλέγουμε μια κορυφή που αντιστοιχεί σε (κάποιο) αληθές literal όρου  $c_j$ .
  - Όχι συμπληρωματικά literals  $\Rightarrow$  ανεξάρτητο σύν.  $m$  κορυφών.
  - Αν  $G_\psi$  έχει ανεξάρτητο σύν.  $m$  κορυφών, αυτό έχει μια κορυφή από κάθε «τρίγωνο»  $t_j$  και όχι «συμπληρωματικές» κορυφές.
  - Θέτουμε αντίστοιχα literals αληθή:  $\psi$  ικανοποιήσιμη.
  - $\psi$  ικανοποιήσιμη αν  $G_\psi$  έχει ανεξάρτητο συν.  $\geq m$  κορυφών.



# MIS(4) είναι NP-πλήρες

---

- Πρόταση  $\psi$  στιγμιότυπο **3-SAT(3)**:
  - Κάθε μετ/τή εμφανίζεται  $\leq 3$  φορές.
  - Είτε  $\leq 1$  χωρίς άρνηση και  $\leq 2$  με άρνηση, είτε  $\leq 2$  χωρίς άρνηση και  $\leq 1$  με άρνηση.
- Στο γράφημα  $G_\psi$ , μέγιστος βαθμός κορυφής = 4.
- MIS παραμένει **NP-πλήρες** για γραφήματα με μέγιστο βαθμό 4!

# Vertex Cover, Independent Set, και Clique

- Min Vertex Cover  $\equiv_p$  Max Independent Set  $\equiv_p$  Max Clique.
  - Vertex cover  $C$  σε γράφημα  $G(V, E)$  ανν independent set  $V \setminus C$  σε γράφημα  $G$  ανν clique  $V \setminus C$  σε συμπληρωματικό γράφημα  $\overline{G}$ .
- Έστω μη κατευθυνόμενο γράφημα  $G(V, E)$ ,  $|V| = n$ . Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:
  - Το  $G$  έχει vertex cover  $\leq k$ .
  - Το  $G$  έχει independent set  $\geq n - k$ .
  - Το συμπληρωματικό  $\overline{G}$  έχει clique  $\geq n - k$ .
- Min Vertex Cover αποτελεί (απλή) ειδική περίπτωση **Ακέραιου Γραμμικού Προγρ. (ILP)**:
$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{s.t.} & x_v + x_u \geq 1 \quad \forall e = \{v, u\} \in E \\ & x_v \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V \end{array}$$

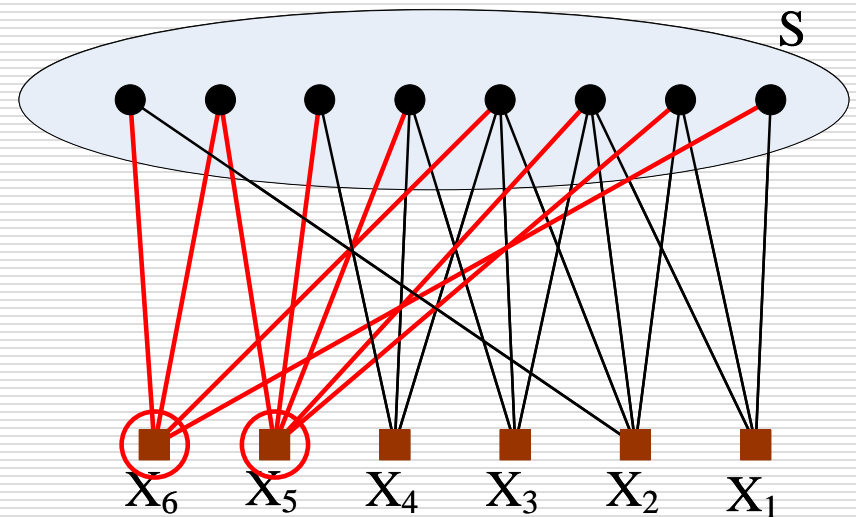
# Set Cover

## □ Κάλυμμα Συνόλου (Set Cover):

- Σύνολο  $S$ , υποσύνολα  $X_1, \dots, X_m$  του  $S$ , φυσικός  $k$ ,  $1 < k < m$ .
- Υπάρχουν  $\leq k$  υποσύνολα που η ένωσή τους είναι το  $S$ .
  - «Κάλυψη» του  $S$  με  $\leq k$  υποσύνολα (από συγκεκριμένα).

## □ Παράδειγμα:

- $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
- $X_1 = \{1, 2, 3\}$   
 $X_2 = \{2, 3, 4, 8\}$   
 $X_3 = \{3, 4, 5\}$   
 $X_4 = \{4, 5, 6\}$   
 $X_5 = \{2, 3, 5, 6, 7\}$   
 $X_6 = \{1, 4, 7, 8\}$
- Βέλτιστη λύση:  $X_5, X_6$



# Set Cover

---

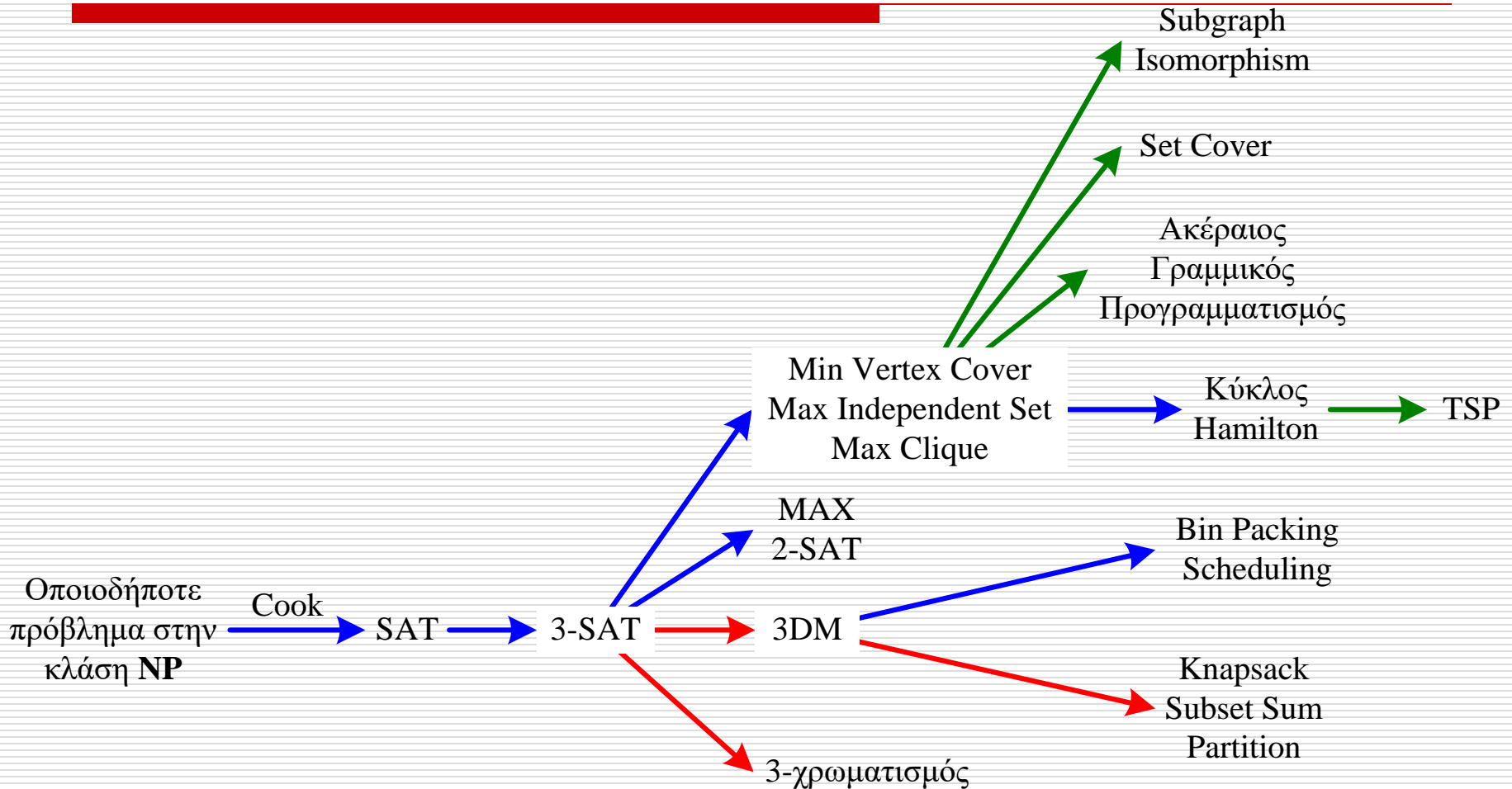
- **Κάλυμμα Συνόλου (Set Cover):**
  - Σύνολο  $S$ , υποσύνολα  $X_1, \dots, X_m$  του  $S$ , φυσικός  $k$ ,  $1 < k < m$ .
  - Υπάρχουν  $\leq k$  υποσύνολα που η ένωσή τους είναι το  $S$ .
    - «Κάλυψη» του  $S$  με  $\leq k$  υποσύνολα (από συγκεκριμένα).
- Set Cover αποτελεί **γενίκευση** του **Vertex Cover**:
  - Vertex Cover προκύπτει όταν κάθε στοιχείο  $e \in S$  ανήκει σε (ακριβώς) δύο υποσύνολα  $X_i$  και  $X_j$ .
    - $S$ : ακμές γραφήματος με  $m$  κορυφές / υποσύνολα.
    - Ακμή  $e \in S$  συνδέει κορυφές / υποσύνολα  $X_i$  και  $X_j$ .

# Subgraph Isomorphism

---

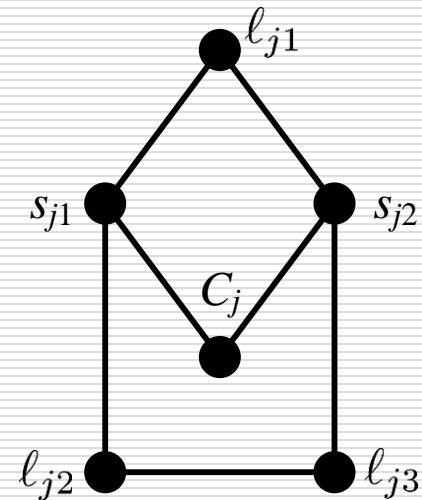
- Subgraph Isomorphism:
  - Γραφήματα  $G_1(V_1, E_1)$  και  $G_2(V_2, E_2)$ ,  $|V_1| > |V_2|$ .
  - Υπάρχει υπογράφημα του  $G_1$  ισομορφικό με το  $G_2$ ;
    - Δηλ. είναι το  $G_2$  υπογράφημα του  $G_1$ ;
- Subgraph Isomorphism αποτελεί γενίκευση MIS (Clique):
  - MIS προκύπτει για  $G_2$  ανεξάρτητο σύνολο  $k$  κορυφών.
  - Clique προκύπτει για  $G_2$  πλήρες γράφημα  $k$  κορυφών.

# Ακολουθία Αναγωγών



# 3-COL είναι NP-πλήρες

- 3-χρωματισμός (3-COL): Γράφημα  $G(V, E)$ .  $\chi(G) = 3$ ;
- 3-COL  $\in$  **NP**. Θδο 3-SAT  $\leq_p$  3-COL.
  - Έστω  $\psi = c_1 \wedge \dots \wedge c_m$  σε 3-CNF. Κατασκευάζουμε  $G_\psi$ .
  - Κορυφή  $b$  και ένα «τρίγωνο»  $[b, x_i, \neg x_i]$  για κάθε μετ/τή  $x_i$ .
  - Ένα gadget  $g_j$  για κάθε όρο  $c_j = l_{j1} \vee l_{j2} \vee l_{j3}$
  - Ακμή μεταξύ κάθε literal  $g_j$  και της αντίστοιχης κορυφής σε b-τρίγωνο.
  - Κορυφή  $a$  και «τρίγωνο»  $[b, a, C_j]$  με κάθε  $g_j$ .



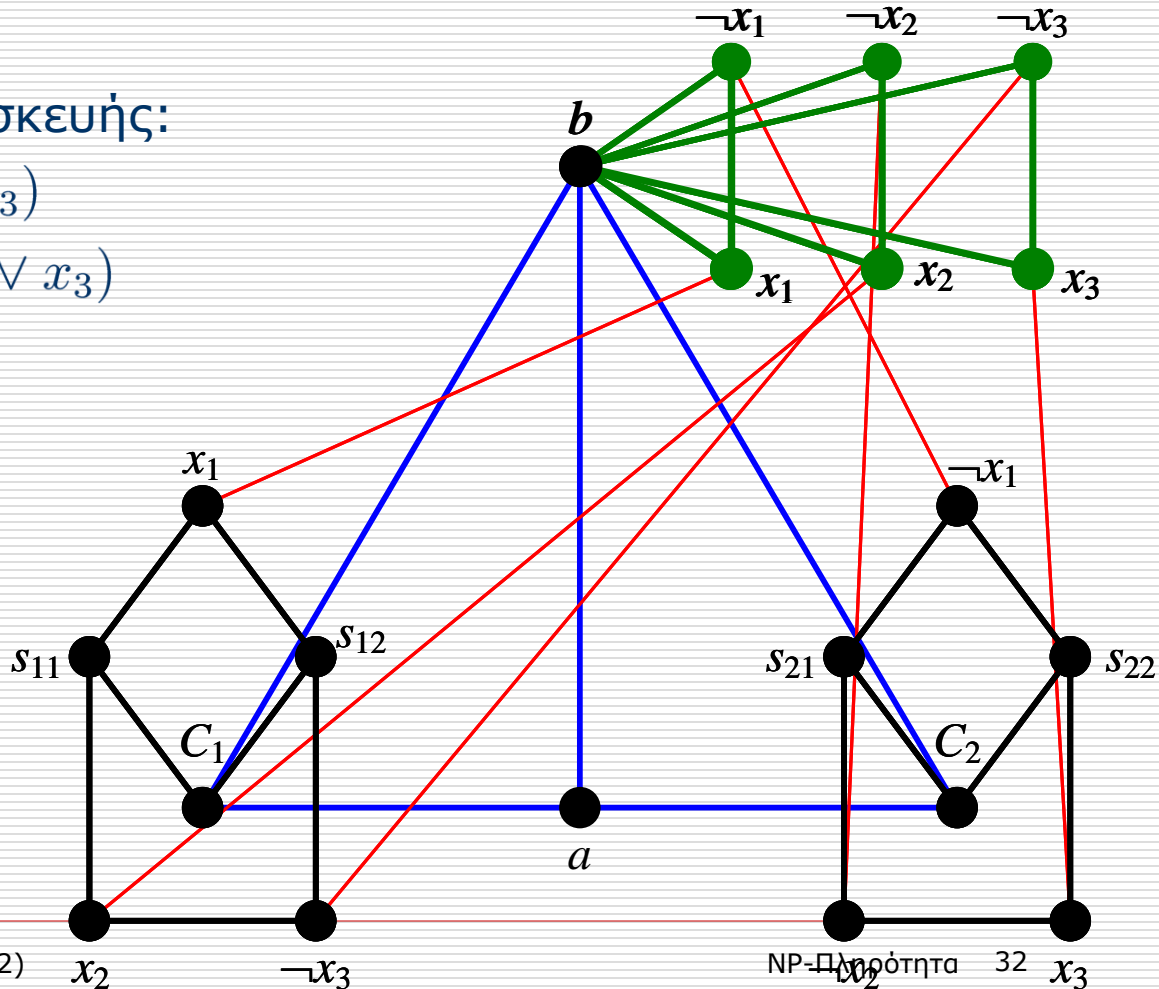
# 3-COL είναι NP-πλήρες

□ 3-SAT  $\leq_p$  3-COL.

■ Παράδειγμα κατασκευής:

$$\psi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

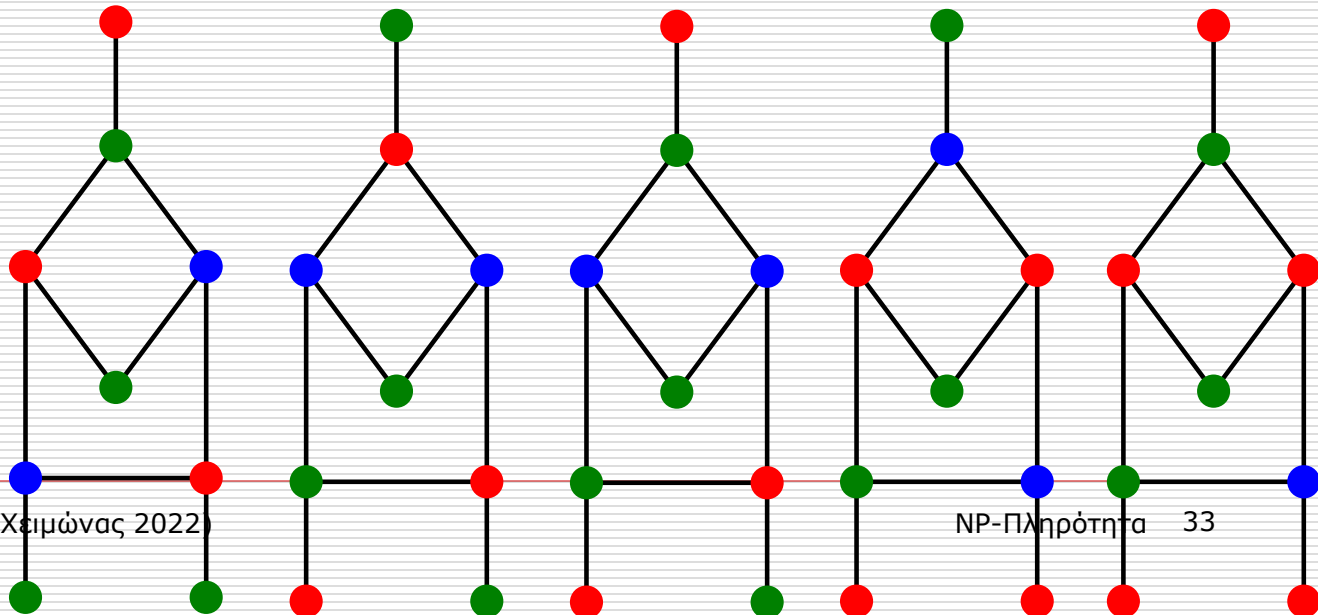
$$\wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$$





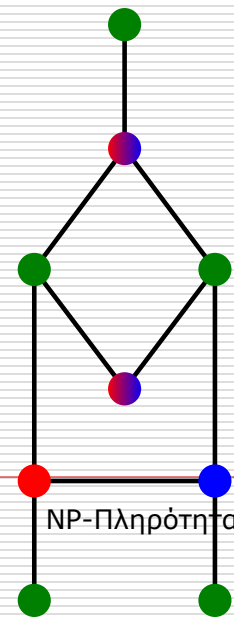
# 3-COL είναι NP-πλήρες

- Θδο  $\psi$  ικανοποιήσιμη ανν  $\chi(G_\psi) = 3$ .
  - Χβτγ, υποθέτουμε ότι  $\chi_r(b) = 2$ ,  $\chi_r(a) = 1$ .  
Έτσι  $\chi(G_\psi) = 3$  ανν  $\chi_r(C_j) = 0$  για κάθε gadget  $g_j$  (όρο  $c_j$ ).
  - Αν  $\psi$  ικανοποιήσιμη,  $\chi_r(x_i) = 1$  και  $\chi_r(\neg x_i) = 0$  αν  $x_i$  αληθής, και  $\chi_r(x_i) = 0$  και  $\chi_r(\neg x_i) = 1$  αν  $x_i$  ψευδής (βλ. b-τριγωνα).
  - Αν όρος  $c_j$  ικανοποιείται: χρωματίζουμε  $g_j$  ώστε  $\chi_r(C_j) = 0$ .



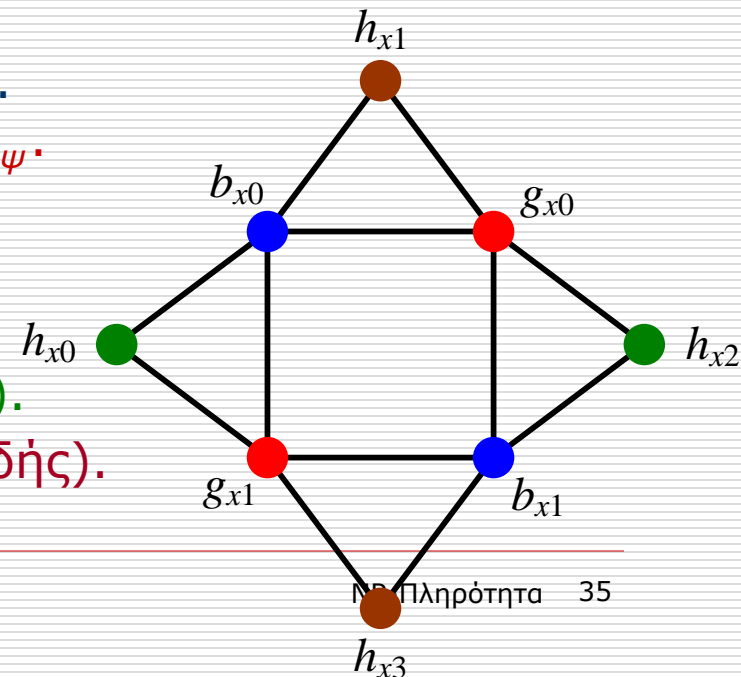
# 3-COL είναι NP-πλήρες

- Θδο  $\psi$  ικανοποιήσιμη ανν  $\chi(G_\psi) = 3$ .
  - Χβτγ, υποθέτουμε ότι  $\chi_r(b) = 2$ ,  $\chi_r(a) = 1$ .  
Έτσι  $\chi(G_\psi) = 3$  ανν  $\chi_r(C_j) = 0$  για κάθε gadget  $g_j$  (όρο  $c_j$ ).
  - Αν  $\chi_r(C_j) = 0$  για κάθε gadget  $g_j$  πρέπει τουλ. μία από 3 «εισόδους»  $g_j$  έχει χρώμα **1** (αντιστοιχεί σε αληθές literal).
  - Θέτουμε  $x_i$  αληθές αν  $\chi_r(x_i) = 1$  και  $\chi_r(\neg x_i) = 0$  και  $x_i$  ψευδές αν  $\chi_r(x_i) = 0$  και  $\chi_r(\neg x_i) = 1$ .
  - Έτσι  $\psi$  ικανοποιείται, αφού υπάρχει τουλ. ένα αληθές literal σε κάθε όρο  $c_j$ .



# 3DM είναι NP-πλήρες

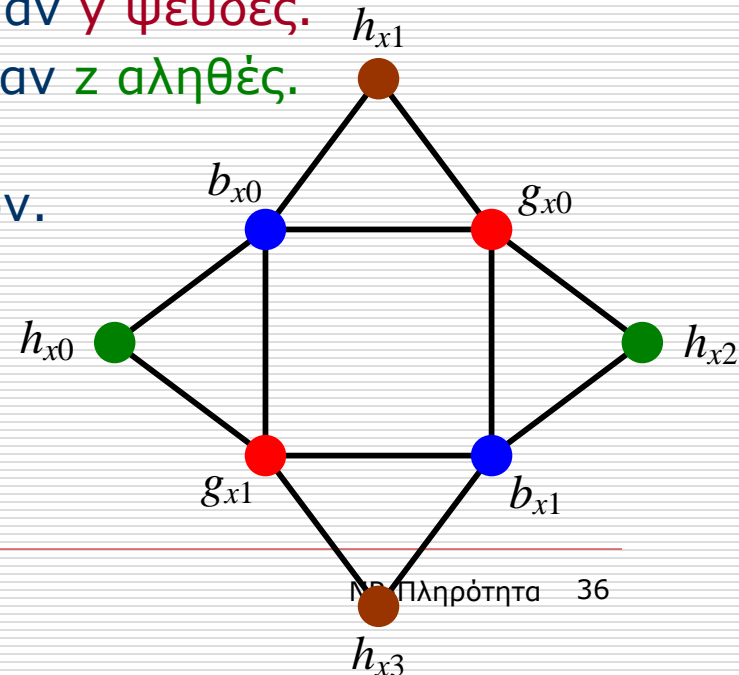
- Τρισδιάστατο Ταίριασμα (3-Dimensional Matching, **3DM**).
  - Ξένα μεταξύ τους σύνολα  $B, G, H$ ,  $|B| = |G| = |H| = n$ , και σύνολο τριάδων  $M \subseteq B \times G \times H$ .
  - Υπάρχει  $M' \subseteq M$ ,  $|M'| = n$ , όπου κάθε στοιχείο των  $B, G, H$  εμφανίζεται μία φορά (δηλ.  $M'$  καλύπτει όλα τα στοιχεία).
- $3DM \in \mathbf{NP}$ . Θδο  $3\text{-SAT}(3) \leq_p 3DM$ .
  - Έστω  $\psi = c_1 \wedge \dots \wedge c_m$  σε 3-CNF(3). Κατασκευάζουμε  $B_\psi, G_\psi, H_\psi$ , και  $M_\psi$ .
  - Για κάθε μετα/τή  $x$ , 2 «αγόρια», 2 «κορίτσια», 4 «σπίτια», και 4 τριάδες.
  - Τριάδες με  $h_{x0}, h_{x2}$  για  $x$  ( $x$  αληθής).
  - Τριάδες με  $(h_{x1}, h_{x3})$  για  $\neg x$  ( $x$  ψευδής).



# 3DM είναι NP-πλήρες

□ 3-SAT(3)  $\leq_p$  3DM.

- $\psi = c_1 \wedge \dots \wedge c_m$  σε 3-CNF(3). Κατασκ.  $B_\psi$ ,  $G_\psi$ ,  $H_\psi$ , και  $M_\psi$ .
- Για κάθε όρο, π.χ.  $c = x \vee \neg y \vee z$ , «ζευγάρι» όρου  $c$  («αγόρι»  $b_c$  και «κορίτσι»  $g_c$ ), και 3 τριάδες:
  - $(b_c, g_c, h_{x1})$  (ή με  $h_{x3}$ ): επιλογή αν  $x$  αληθές.
  - $(b_c, g_c, h_{y0})$  (ή με  $h_{y2}$ ): επιλογή αν  $y$  ψευδές.
  - $(b_c, g_c, h_{z1})$  (ή με  $h_{z3}$ ): επιλογή αν  $z$  αληθές.
- Περιορισμός στον #εμφανίσεων:  
«σπίτια» επαρκούν για τριάδες όρων.
- $4n$  «σπίτια» και  $2n+m$  «ζευγάρια».
  - $2n - m$  «αζήτητα σπίτια»!
- $2n - m$  «εύκολα ζευγάρια» που συνδέονται με όλα τα «σπίτια».



# 3DM είναι NP-πλήρες

□ 3-SAT(3)  $\leq_p$  3DM.

- Ακόμη 4 «εύκολα ζευγάρια» που συνδέονται με όλα τα «σπίτια».

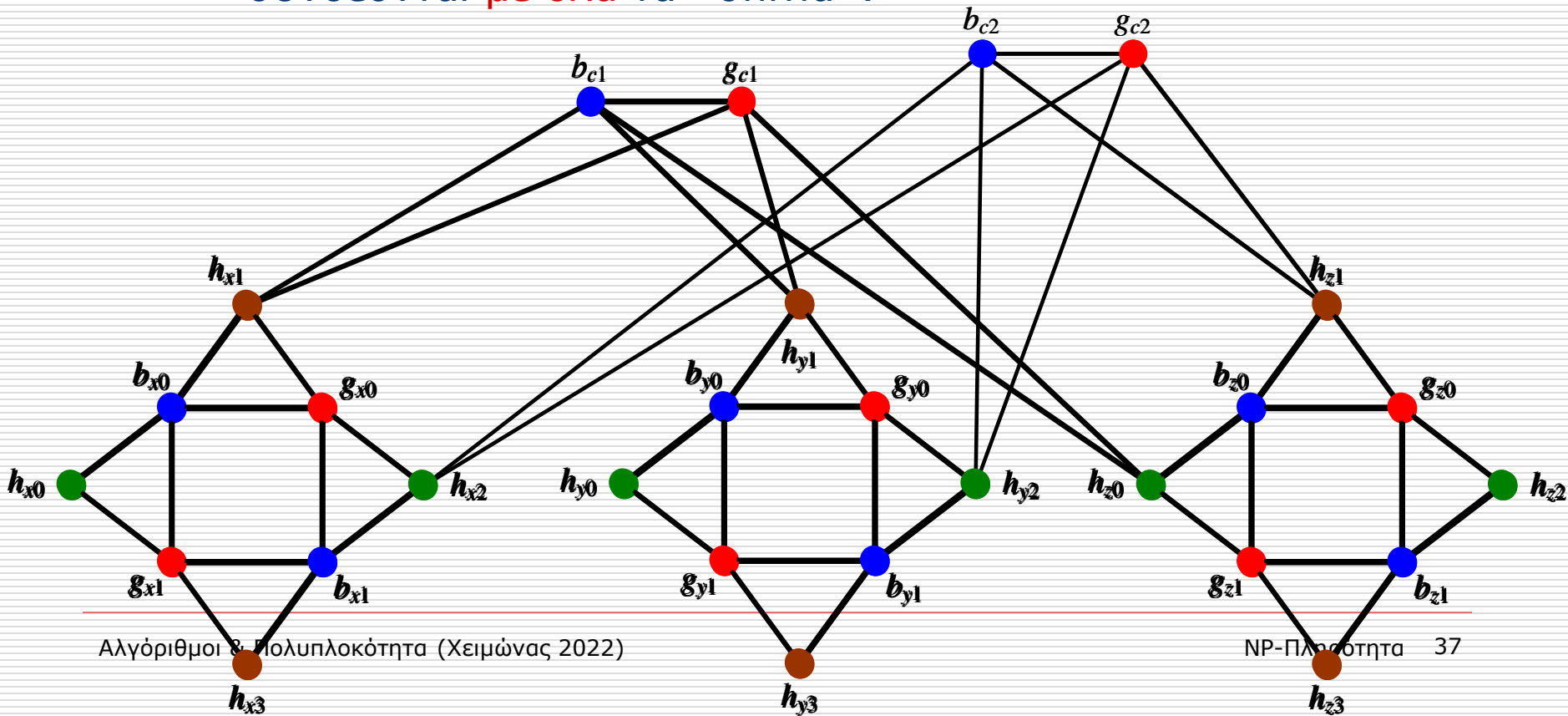
$$\psi = (x \vee y \vee \neg z)$$

$$\wedge (\neg x \vee \neg y \vee z)$$

$$x = F$$

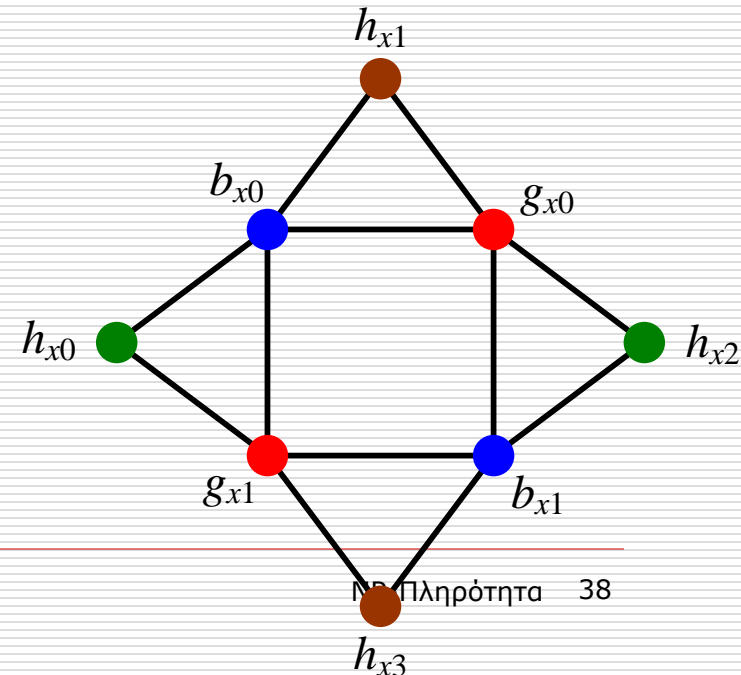
$$y = T$$

$$z = T$$



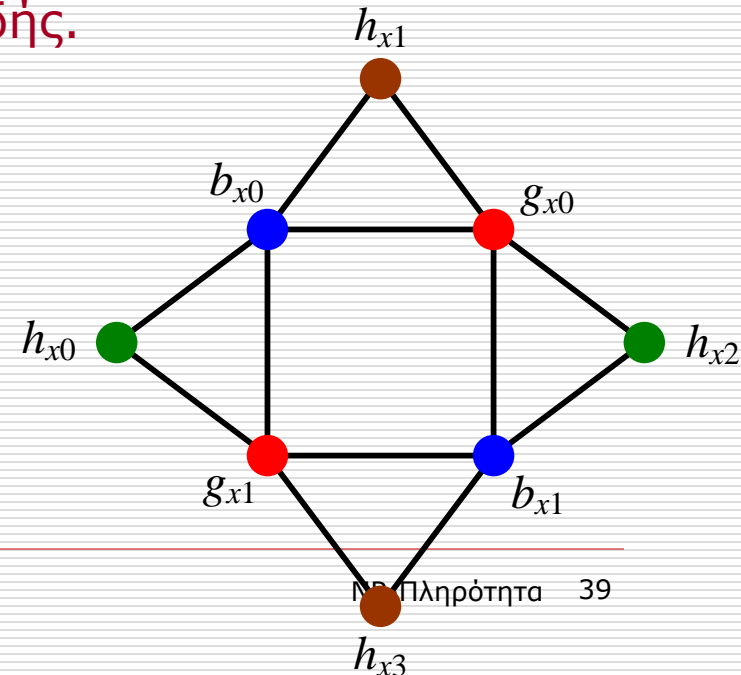
# 3DM είναι NP-πλήρες

- Θδο  $\psi$  ικανοποιήσιμη ανν υπάρχει 3DM  $M' \subseteq M_\psi$ ,  $|M'| = 4n$ .
- Αν  $\psi$  ικανοποιήσιμη:
  - $\forall$  αληθή μετ/τή  $x$ , επιλέγουμε 2  $x$ -τριάδες.
  - $\forall$  ψευδή μετ/τή  $x$ , επιλέγουμε 2  $\neg x$ -τριάδες ( $2n$ ).
  - Τουλ. ένα αληθές literal σε κάθε όρο της  $\psi$ :  
τουλ. ένα «ελεύθερο σπίτι» για  
«ζευγάρι» κάθε όρου ( $m$ ).
  - «Αζήτητα σπίτια» καλύπτονται από  
 $2n - m$  «εύκολα ζευγάρια».



# 3DM είναι NP-πλήρες

- Θδο  $\psi$  ικανοποιήσιμη ανν υπάρχει 3DM  $M' \subseteq M_\psi$ ,  $|M'| = 4n$ .
- Αν υπάρχει 3DM  $M' \subseteq M_\psi$ ,  $|M'| = 4n$ :
  - Εστιάζουμε σε  $2n+m$  «δύσκολα ζευγάρια».
  - Επιλέγονται  $2n$  «ζευγάρια» μεταβλητών:
    - $\forall$  μετ/τη  $x$ , είτε  $2$   $x$ -τριάδες, οπότε  $x$  αληθής, είτε  $2$   $\neg x$ -τριάδες, οπότε  $x$  ψευδής.
  - Επιλέγονται  $m$  «ζευγάρια» όρων:
    - «Ελεύθερο σπίτι» για κάθε όρο.
    - Ανάθεση τιμών αλήθειας δημιουργεί τουλάχιστον ένα αληθές literal σε κάθε όρο.
- Bipartite Matching (2DM)  $\in \mathbf{P}$ .



# Subset Sum και Knapsack

---

- Subset Sum:
  - Σύνολο φυσικών  $A = \{w_1, \dots, w_n\}$  και  $W, 0 < W < w(A)$ .
  - Υπάρχει  $A' \subseteq A$  με  $w(A') = \sum_{i \in A'} w_i = W$ ;
- Knapsack αποτελεί γενίκευση Subset Sum.
  - Subset sum προκύπτει όταν για κάθε αντικείμενο  $i$ , μέγεθος( $i$ ) = αξία( $i$ ) (θεωρούμε μέγεθος σακιδίου =  $W$ ).



# Subset Sum και Partition

---

## □ Partition:

- Σύνολο φυσικών  $A = \{w_1, \dots, w_n\}$  με άρτιο  $w(A) = \sum_{i \in A} w_i$ ;
- Υπάρχει  $A' \subseteq A$  με  $w(A') = w(A \setminus A')$ ;

## □ Subset Sum $\leq_p$ Partition.

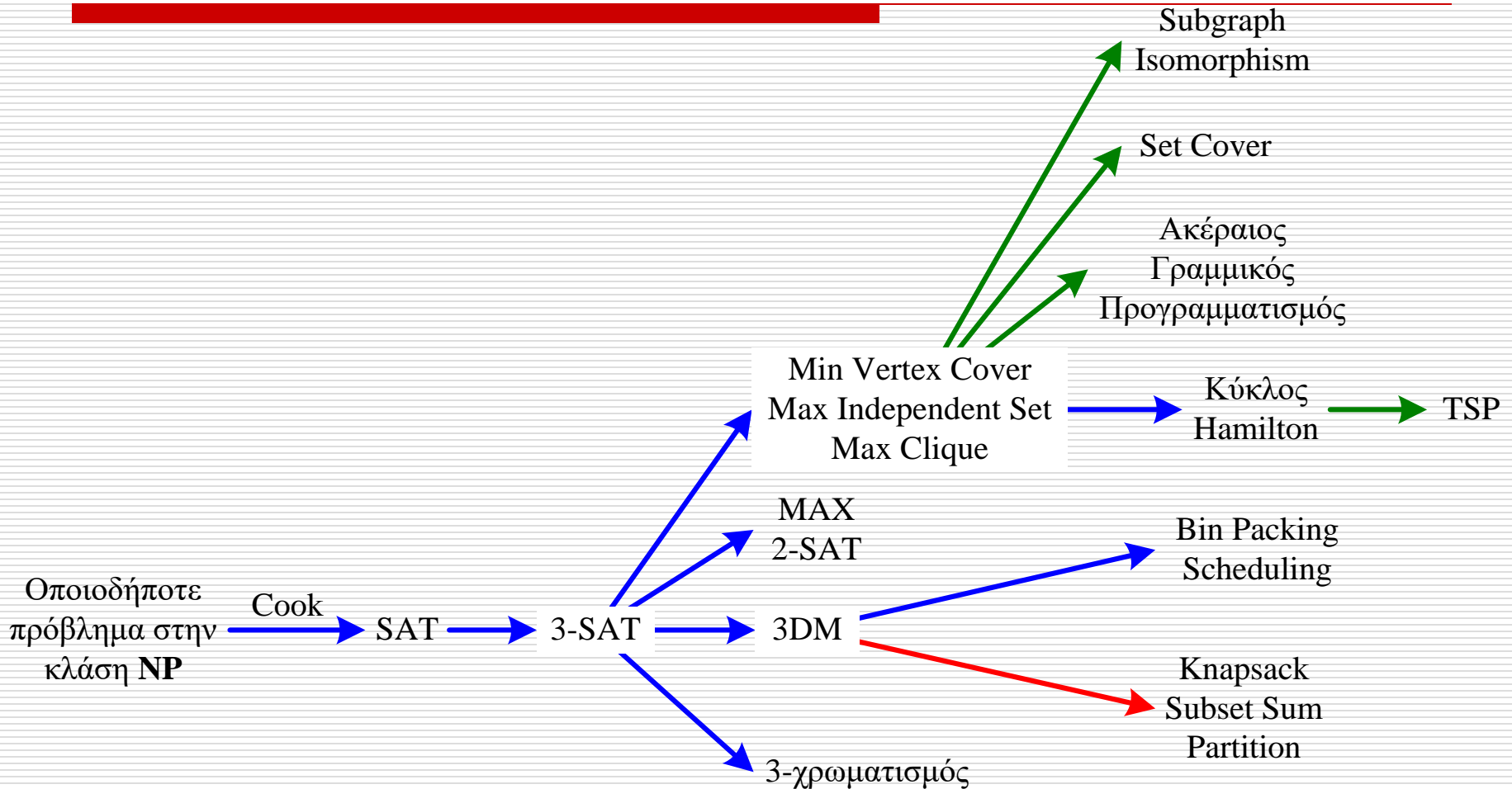
- Έστω σύνολο  $A = \{w_1, \dots, w_n\}$  και  $W$ ,  $0 < W < w(A)$ .
- Χβτγ, θεωρούμε ότι  $W \geq w(A)/2$ .
- Σύνολο  $B = \{w_1, \dots, w_n, 2W - w(A)\}$  με  $w(B) = 2W$ .
- Υπάρχει  $A' \subseteq A$  με  $w(A') = W$  ανν  
υπάρχει  $B' \subseteq B$  με  $w(B') = w(B \setminus B') = W$ .

□ Ένα από τα  $B'$ ,  $B \setminus B'$  είναι υποσύνολο του  $A$ .

## □ Όμως το Subset Sum αποτελεί γενίκευση Partition.

- Τελικά  $\text{Subset Sum} \equiv_p \text{Partition}$ .

# Ακολουθία Αναγωγών



# Subset Sum είναι NP-Πλήρες

- Subset Sum  $\in$  **NP**. Θδο  $3DM \leq_p$  Subset Sum.
  - Έστω  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ ,  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ ,  $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ , και  $M \subseteq B \times G \times H$ ,  $|M| = m$ .
  - Τριάδα  $t_i \in M \rightarrow$  δυαδική συμβ/ρά  $b_i$  μήκους  $3n$  με 3 «άσσους».
    - 1<sup>ος</sup> «άσσος» σε θέση 1 ως  $n$  δηλώνει το «αγόρι».
    - 2<sup>ος</sup> «άσσος» σε θέση  $n+1$  ως  $2n$  δηλώνει το «κορίτσι».
    - 3<sup>ος</sup> «άσσος» σε θέση  $2n+1$  ως  $3n$  δηλώνει το «σπίτι».
    - Π.χ.  $n = 4$ .  $(b_2, g_3, h_1)$ : 0001 0100 0010
  - Υπάρχει  $3DM M' \subseteq M$ ,  $|M'| = n$ , αν υπάρχει  $B' = \{b_{i_1}, \dots, b_{i_n}\}$  που οι «άσσοι» των  $b_{i_\ell} \in B'$  καλύπτουν όλες τις  $3n$  θέσεις.

# Subset Sum είναι NP-Πλήρες

## □ 3DM $\leq_p$ Subset Sum.

- Υπάρχει 3DM  $M' \subseteq M$ ,  $|M'| = n$ , αν υπάρχει  $B' = \{b_{i_1}, \dots, b_{i_n}\}$  που οι «άσσοι» των  $b_{i_\ell} \in B'$  καλύπτουν όλες τις 3n θέσεις.
- ... αν σύνολο  $A = \{w_1, \dots, w_m\}$  με  $w_i = \sum_{j=1}^{3n} b_i(j)2^{j-1}$  έχει υποσύνολο  $A' \subseteq A$  με  $w(A) = 2^{3n} - 1$  (;).
  - **Μπορεί και όχι(!)**: π.χ.  $A = \{0011, 0101, 0111\}$
  - «Επιπλοκή» λόγω κρατούμενου δυαδικής πρόσθεσης.
  - Λύση: ερμηνεύουμε αριθμούς σε βάση  $m+1$  ώστε πρόσθεση  $m$  «άσσων» να μην εμφανίζει κρατούμενο.
- ... αν σύνολο  $A = \{w_1, \dots, w_m\}$  με  $w_i = \sum_{j=1}^{3n} b_i(j)(m+1)^{j-1}$  έχει υποσύνολο  $A' \subseteq A$  με  $w(A) = ((m+1)^{3n} - 1)/m$ .

# Ακολουθία Αναγωγών

