Ροή Ελάχιστου Κόστους

Διδάσκοντες: **Αρ. Παγουρτζής, Δ. Φωτάκης,**
Δ. Σούλιου, Παν. Γροντάς

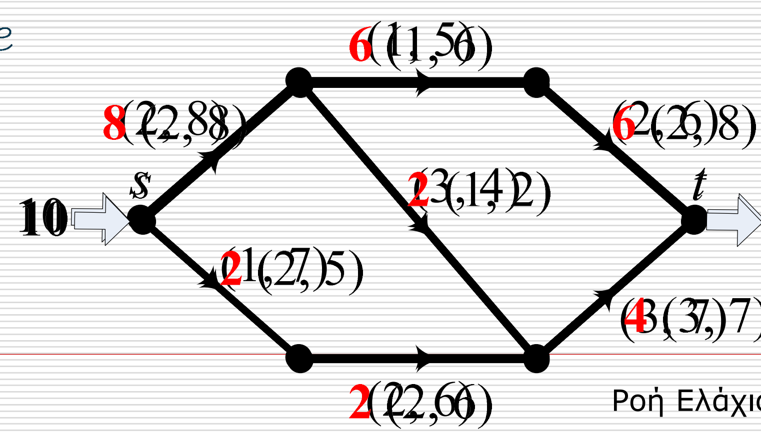
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ροή Ελάχιστου Κόστους

- **Δίκτυο** : κατευθυνόμενο γράφημα *G*(*V*, *E*).
  - Πηγή *s*, προορισμός *t*, απαίτηση *d*.
  - Κόστος c_e και χωρητικότητα b_e ακμής.
- *s* – *t* ροή μεγέθους *d* με ελάχιστο κόστος.
  - Χωρητικότητα: $\forall e \in E \;\; f_e \leq b_e$
  - Διατήρηση: $\forall v \in V \setminus \{s, t\} \;\; \sum_{e \in in(v)} f_e = \sum_{e \in out(v)} f_e$
  - Μέγεθος: $\sum_{e \in out(s)} f_e - \sum_{e \in in(s)} f_e = d$
  - Κόστος: $\sum_{e \in E} c_e f_e$



Ροή Ελάχιστου Κόστους

- Ροή Ελάχιστου Κόστους (Min-Cost-Flow):
  - Δεδομένου δικτύου $G(V, E, s, t, d, b, c)$
  - Υπολόγισε $s - t$ ροή με μέγεθος d και ελάχιστο κόστος.

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{e\in E} c_e f_e & \\
\text{s.t.} & f_e \leq b_e & \forall e \in E \\
& \displaystyle\sum_{e\in out(v)} f_e - \sum_{e\in in(v)} f_e = 0 & \forall v \in V \setminus \{s,t\} \\
& \displaystyle\sum_{e\in out(s)} f_e - \sum_{e\in in(s)} f_e = d & \\
& \displaystyle\sum_{e\in out(t)} f_e - \sum_{e\in in(t)} f_e = -d & \\
& f_e \geq 0 & \forall e \in E
\end{array}
$$

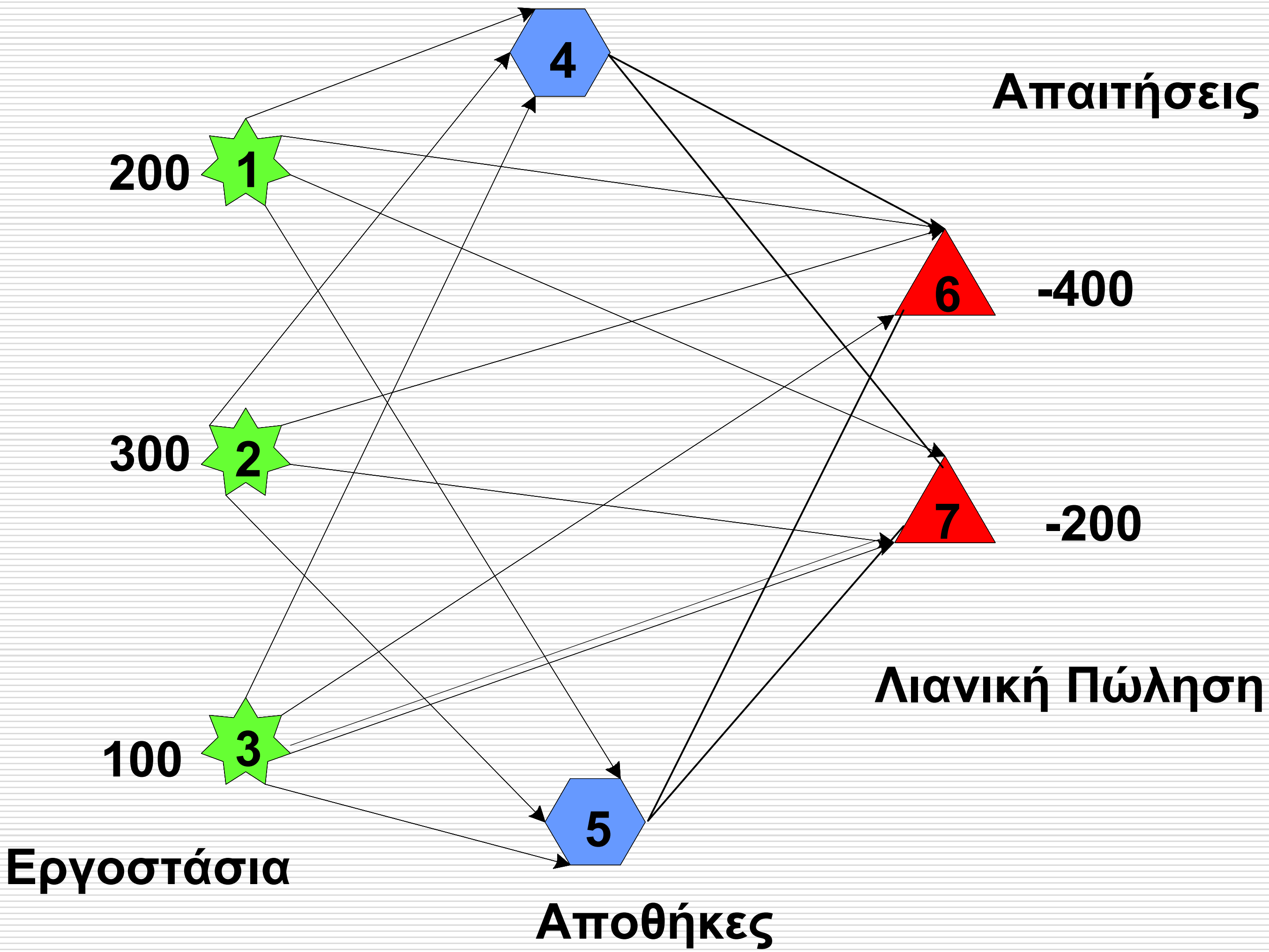
Ροή Ελάχιστου Κόστους: Γενικεύσεις

- Κάθε κορυφή v έχει απαίτηση ροής d(v), με άθροισμα απαιτήσεων = 0.
  - d(v) > 0: v στέλνει ροή προς άλλες κορυφές (source).
  - d(v) < 0: v δέχεται ροή από άλλες κορυφές (sink).
  - d(v) = 0: διατήρηση ροής στη v (intermediate).
  - Υλοποίηση με νέο source s που στέλνει ροή $d(s_i)$ προς κάθε άλλο source s_i, και νέο sink t που δέχεται ροή $d(t_i)$ από άλλο sink t_i.
- d(v) = 0 για όλες τις κορυφές v: **κυκλοφορία** (circulation).
- Κάτω φράγμα $l(e) \geq 0$ στη ροή ακμής e.

Ροή Ελάχιστου Κόστους: Εφαρμογές

- Συντομότερα μονοπάτια από αρχική κορυφή *s*.
- Μέγιστη ροή.
- Προβλήματα ανάθεσης (assignment).
- Προβλήματα μεταφοράς και διανομής.
- Προβλήματα φόρτωσης και εξισορρόπησης.
- Υπολογισμός Wasserstein απόστασης.
- Πολλά πρακτικά προβλήματα μετασχηματίζονται σε στιγμιότυπα min-cost flow.

Ροή Ελάχιστου Κόστους: Εφαρμογές

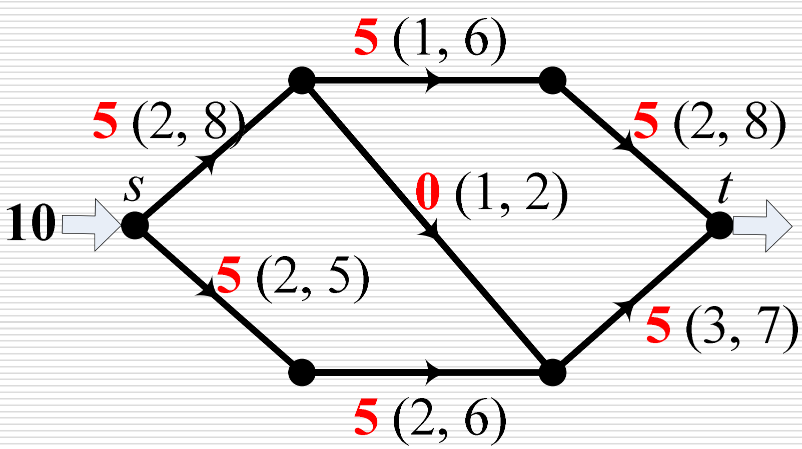


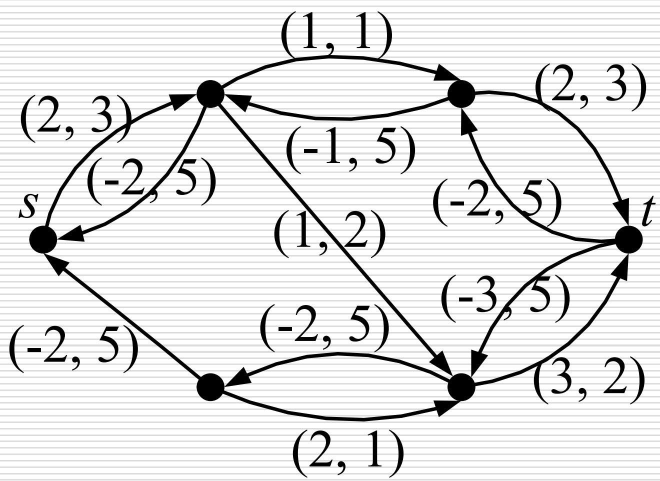
Αποσύνθεση Ροών και Κυκλοφοριών

- Δεδομένου δικτύου *G(V, E, s, t, b)*:
  - Για s – t μονοπάτι p, στοιχειώδης ροή στο p είναι μοναδιαία s – t ροή κατά μήκος ακμών του p.
  - Για κύκλο C, στοιχειώδης ροής στον C είναι μοναδιαία ροή κατά μήκος ακμών του C.
- Ροή *f* είναι (θετικός) γραμμικός συνδυασμός στοιχειωδών ροών s – t μονοπατιών και κύκλων (με ≤ m όρους).
  - Κάθε ακμή e με $f_e > 0$ εμφανίζεται σε ≥ 1 μονοπάτι ή κύκλο.
  - Αν f ακυκλική, τότε γραμμικός συνδυασμός μόνο μονοπατιών.
- Κυκλοφορία f είναι (θετικός) γραμμικός συνδυασμός στοιχειωδών ροών κύκλων (με ≤ m όρους).

Υπολειμματικό Δίκτυο

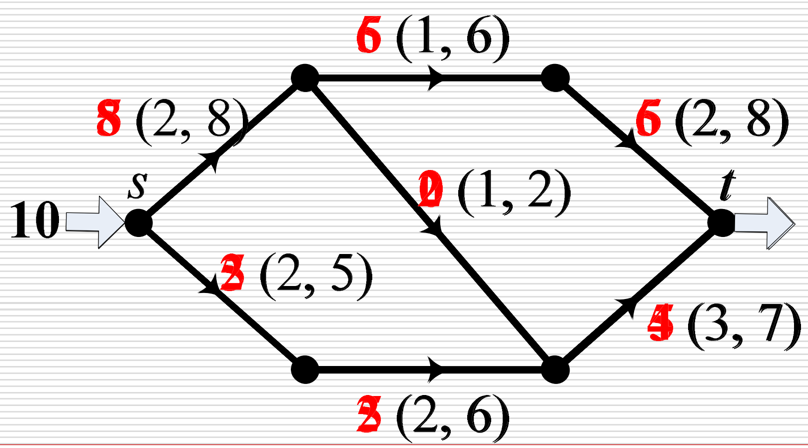
- Δίκτυο *G*(*V*, *E*, *b*, *c*) και ροή *f*.
- Υπολειμματικό δίκτυο $G_f(V, E_f, r_f)$:
  - Χωρητικότητα (μπρος-ακμές): $\forall (u, v) \in E \;\; r_{uv} = b_{uv} - f_{uv}$
    $\tilde{c}_{vu} = c_{vu}$
  - Ροή (πίσω-ακμές): $\forall (u, v) \in E \;\; r_{vu} = f_{uv}$
    $\tilde{c}_{vu} = -c_{uv}$

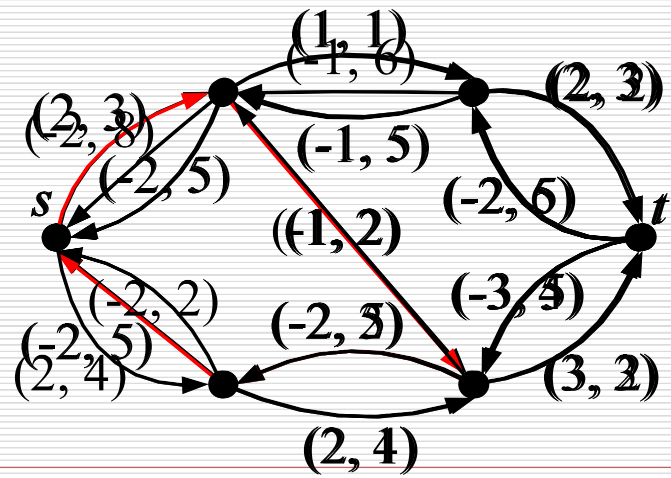




Χαρακτηρισμός Βέλτιστης Ροής

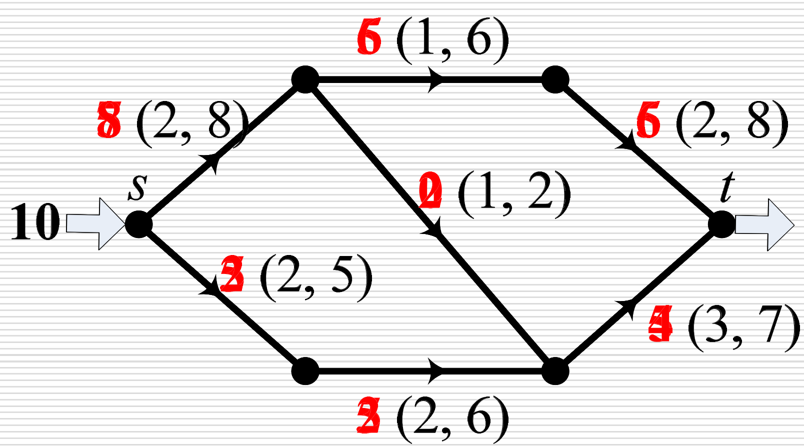
- Ροή ελάχιστου κόστους ανν όχι κύκλος αρνητικού κόστους.
  - Κύκλος κόστους λ: αύξηση ροής κατά δ σε μπρος ακμές και μείωση ροής κατά δ σε πίσω ακμές, μεταβολή κόστους λ·δ.
  - Κύκλος αρνητικού κόστους ⇒ μείωση κόστους ⇒ μη-βέλτιστη ροή.
  - Διαφορά μη-βέλτιστης με βέλτιστη ροή ⇒ κύκλοι, τουλάχιστον ένας αρνητικού κόστους.

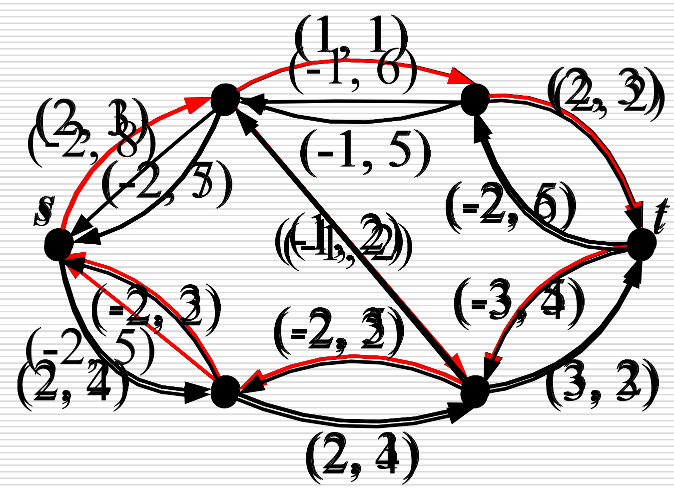




Αλγόριθμος Klein (cycle canceling)

- Ενόσω κύκλος αρνητικού κόστους κ στο υπολειμματικό,
  - Χωρητικότητα κύκλου $\delta \leftarrow \min_{e \in \kappa}\{r_e\}$
  - Αύξηση ροής κατά δ στο κ και ενημέρωση υπολειμματικού δικτύου.
- Κύκλος αρνητικού κόστους με Bellman-Ford.





Χρόνος Εκτέλεσης

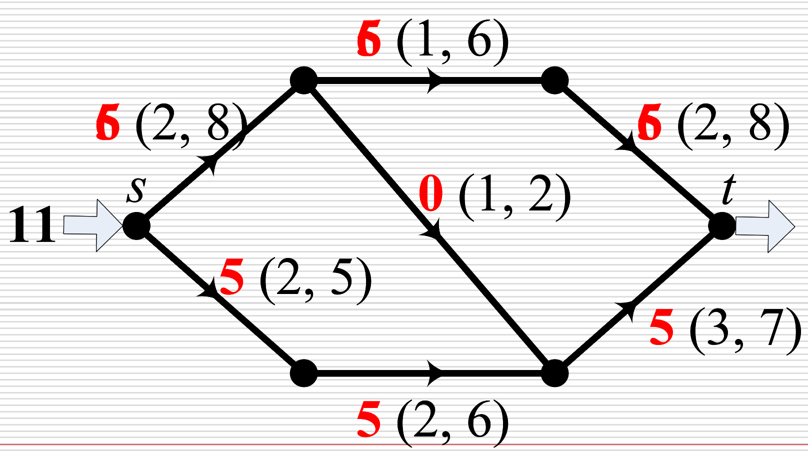
- Ακέραιες χωρητικότητες $\leq U$ και κόστη $\leq C$:
  - #επαναλήψεων O($m\, C\, U$) :
    - Αρχικό κόστος O($m\, C\, U$), μείωση κατά 1 / επανάληψη.
  - Χρόνος εκτέλεσης O($n\, m^2\, C\, U$)
- Δίκτυο με ακέραιες χωρητικότητες, κόστη και απαιτήσεις έχει ακέραιη ροή ελάχιστου κόστους.
- Εκθετικός χρόνος για μεγάλες χωρητικότητες !
- Μπορεί να μην τερματίσει για άρρητες χωρητικότητες (ή μη-βέλτιστη ροή).

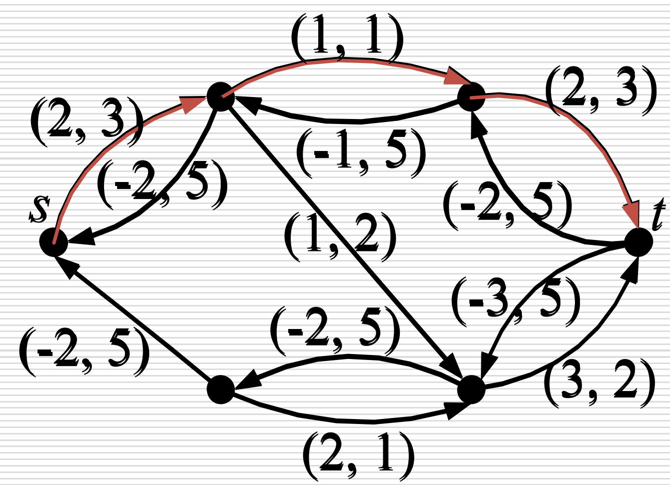
Βελτιώσεις

- Κύκλος με μέγιστη βελτίωση.
  - Ο(m) επαυξήσεις $\Rightarrow$ μέγιστη βελτίωση στο μισό.
    - Κύκλος μέγιστης βελτίωσης **NP-δύσκολο** να υπολογισθεί!
  - Αντί «μέγιστης», «αρκετά μεγάλη» βελτίωση.
  - #επαναλήψεων $O(m \log(m\,C\,U))$.
- Κύκλος με ελάχιστο μέσο κόστος (κόστος / ακμές). (Goldberg, Tarjan, 1986)
  - Υπολογισμός με αλγ. Karp σε χρόνο $O(n\,m)$.
  - #επαναλήψεων $O(n\,m \min\{\log(n\,C), m \log n\})$.

Επαναλαμβανόμενα Συντομότερα Μονοπάτια

- Ενόσω s – t ροή < d, συντομότερο s – t μονοπάτι p στο υπολειμματικό δίκτυο και επαύξηση κατά μήκος του p.
  - Επαύξηση κατά min{ bottleneck χωρητικότητα p, υπολειπόμενη απαίτηση }.
  - Επαυξήσεις κατά μήκος συντομότερων μονοπατιών: όχι κύκλοι αρνητικού μήκους στο υπολειμματικό.
  - Υπολογισμός συντομότερων μονοπατιών και **βελτιστότητα**!





Χρόνος Εκτέλεσης

- #επαναλήψεων (για ακέραιες χωρητικότητες) $\leq d$.
  - Συντομότερα μονοπάτια με Bellman-Ford, χρόνος εκτέλεσης: $O(m\, n\, d)$.
  - Αποτελεί γενίκευση Ford-Fulkerson για max-flow.
- Επιτάχυνση αν συντομότερα μονοπάτια με Dijkstra(?).

Βελτίωση Edmonds – Karp

- Επιτάχυνση αν συντομότερα μονοπάτια με Dijkstra.
  - Χρησιμοποιούμε δυναμικό $\pi(v)$ σε κάθε κορυφή v, ώστε **ανηγμένο** κόστος ακμής $c^\pi(u, v) = c(u, v) + \pi(u) - \pi(v) \geq 0$.
  - Χρήση ανηγμένου κόστους δεν επηρεάζει κόστος ροής (τηλεσκοπικό άθροισμα, βλ. αλγόριθμο Johnson).
  - Ροή ελάχιστου κόστους ανν όχι κύκλος αρνητικού κόστους ανν υπάρχει δυναμικό π ώστε $c^\pi(u, v) \geq 0$ για όλες ακμές.
  - Δυναμικό $\pi(v) = 0$, αρχικά, και $\pi'(v) = dist^\pi(s, v)$, εξασφαλίζει $c^\pi(u, v) \geq 0$ για όλες ακμές.
    - Υπάρχουσες ακμές: «τριγωνική ανισότητα» αποστάσεων. Νέες ακμές: ανηγμένο κόστος 0.
  - Χρόνος εκτέλεσης: $O(d\, m \log n)$. Ταχύτερος combinatorial: $O(m^2 \log^2 n)$ (Orlin, 1993).

Complementary Slackness

- Ροή *f* ελάχιστου κόστους ανν υπάρχει δυναμικό π :

$$\forall (v,u) \in E, \qquad \begin{aligned} c^{\pi}_{vu} > 0 &\Rightarrow f_{vu} = 0 \\ c^{\pi}_{vu} < 0 &\Rightarrow f_{vu} = b_{vu} \\ 0 < f_{vu} < b_{vu} &\Rightarrow c^{\pi}_{vu} = 0 \end{aligned}$$