**ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι ΣΕΜΦΕ, 31/1/2023**
**ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ ΤΕΣΣΕΡΑ (4) ΑΠΟ ΤΑ ΠΑΡΑΚΑΤΩ 5 ΘΕΜΑΤΑ.**
**Διάρκεια Εξέτασης: 2 h και 15′**

**Θέμα 1.** (1) ***(1 μον.)*** *Έστω $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ μη κενά. Αν το $B$ είναι φραγμένο δείξτε ότι και το $A$ είναι φραγμένο και ισχύουν τα εξής: (i) $\inf B \leq \inf A$ και (ii) $\sup A \leq \sup B$.*

(2) ***(1,5 μον.)*** *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και άνω φραγμένο. (i) Αν $\sup A \notin A$ δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a_1, a_2 \in A$ με $a_1 \neq a_2$ και $|a_1 - a_2| < \varepsilon$. (ii) Ισχύει το ίδιο αν $\sup A \in A$?*

**Απάντηση:** (1) Έστω $m, M \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $m \leq x \leq M$ για όλα τα $x \in B$. Αφού $A \subseteq B$, αν $a \in A$ τότε $a \in B$ και άρα $m \leq a \leq M$. Συνεπώς, κάθε κάτω (και αντίστοιχα κάθε άνω) φράγμα του $B$ είναι κάτω (και αντίστοιχα άνω) φράγμα του $A$. Το $\inf B$ είναι κάτω φράγμα του $B$ και άρα από τα προηγούμενα, είναι και κάτω φράγμα του $A$ οπότε, $\inf B \leq \inf A$ γιατί το $\inf A$ είναι το **μεγαλύτερο** κάτω φράγμα του $A$. Αντίστοιχα, το $\sup B$ είναι άνω φράγμα του $B$ και άρα θα είναι και άνω φράγμα του $A$ οπότε θα πρέπει $\sup A \leq \sup B$ γιατί το $\sup A$ είναι το **μικρότερο** άνω φράγμα του $A$.

(2) Έστω $s = \sup A$ και $\epsilon > 0$. Επειδή $s - \epsilon < s$ και το $s$ είναι το **μικρότερο** άνω φράγμα του $A$, έπεται ότι το $s - \epsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του $A$ και άρα υπάρχει $a_1 \in A$ τέτοιο ώστε $s - \epsilon < a_1 \leq s$. Επειδή $s \notin A$ θα έχουμε

$$s - \epsilon < a_1 < s$$

Ομοίως, αφού $a_1 < s$ το $a_1$ δεν είναι άνω φράγμα του $A$ και άρα υπάρχει $a_2 \in A$ τέτοιο ώστε

$$a_1 < a_2 < s$$

Άρα

$$s - \epsilon < a_1 < a_2 < s$$

που σημαίνει ότι

$$0 < a_2 - a_1 < s - (s - \epsilon) = \epsilon$$

Αν το $\sup A \in A$ (ισοδύναμα το $A$ έχει μέγιστο στοιχείο) τότε δεν ισχύει το ίδιο, πχ. αν το $A$ είναι ένα μονοσύνολο.

**Θέμα 2.** (1) ***(1 μον.)*** *Έστω $(a_n)$ φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. (i) Δείξτε ότι η $(a_n)$ είναι συγκλίνουσα με $\lim_{n\to\infty} a_n \geq 0$. (ii) Αν επιπλέον η ακολουθία $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ είναι συγκλίνουσα με $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

(2) *(i)* ***(0,5 μον.)*** *Δείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.*

*(ii)* ***(1 μον.)*** *Αν $f(t) = \arctan\left(e^{t^2}\right)$ υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^n}{n!} \displaystyle\int_0^{n!/n^n} f(t)\, dt\right)$.*

**Απάντηση:** (1) (i) Η ακολουθία $(a_n)$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη (από το 0) και άρα ως μονότονη και φραγμένη είναι συγκλίνουσα. Επειδή $a_n > 0$ από ιδιότητες διάταξης των ορίων έχουμε $\lim_{n\to\infty} a_n \geq 0$. (ii) Έστω $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Επειδή η $(a_{n+1})$ είναι υπακολουθία της $(a_n)$ έχουμε $a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$. Από το (i), $a \in \mathbb{R}$. Αν $a \neq 0$ τότε από αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{a}{a} = 1$ άτοπο. Άρα $a = 0$.

(2) (i) α′ τρόπος: Μέσω του (1). Έστω $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$. Τότε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1$$

και άρα η $(a_n)$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Επίσης,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$$

Από το (1) έχουμε ότι $a_n \to 0$.

β′ τρόπος: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \ldots (n-1) \cdot n}{n \cdot n \ldots n \cdot n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \cdots \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n} \cdot 1 \cdot 1 \ldots 1$$

δηλαδή $0 \leq \dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το Θεώρημα των Ισοσυγκλινουσών Ακολουθιών έπεται ότι $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

(ii) Θέτουμε $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ και $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού, η $F$ είναι παραγωγίσιμη με $F' = f$. Επίσης από το προηγούμενο ερώτημα $x_n \to 0$. Άρα

$$\lim_{n\to\infty} \left( \frac{n^n}{n!} \int_0^{n!/n^n} f(t)\, dt \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(x_n)}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F(x_n) - F(0)}{x_n - 0} = F'(0) = f(0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

(Η ισότητα $\lim_{n\to\infty} \dfrac{F(x_n) - F(0)}{x_n - 0} = F'(0)$ οφείλεται στην Αρχή Μεταφοράς για όρια. Πράγματι, έχουμε $F'(0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0}$ και από την Αρχή Μεταφοράς αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι για κάθε ακολουθία $(z_n)$ με $z_n \neq 0$ και $z_n \to 0$ ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} \dfrac{F(z_n) - F(0)}{z_n - 0} = F'(0)$).

**Θέμα 3.** (1) ***(1 μον.)*** *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αν $f(q) = 0$ για κάθε $q$ ρητό στο $[a,b]$ δείξτε, με χρήση του ορισμού του ολοκληρώματος, ότι $\int_a^b f(x)\, dx = 0$.*

(2) ***(1,5 μον.)*** *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη με $I = \int_a^b f(t)\, dt \neq 0$ και $\lambda > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ με $\int_a^\xi f(t)\, dt = \lambda \int_\xi^b f(t)\, dt$.*

**Απάντηση:** (1) Επειδή η $f$ είναι ολοκληρώσιμη το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\, dx$ είναι ίσο με το κάτω ολοκλήρωμα $\underline{\int_a^b} f(x)\, dx$ που εξ ορισμού είναι το supremum του συνόλου όλων των κάτω αθροισμάτων της $f$. Τώρα, κα'θε κάτω άθροισμα της $f$ είναι ίσο με το 0. Πράγματι, έστω $P = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a,b]$. Τότε $L(f,P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$ όπου $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Από την πυκνότητα των ρητών σε κάθε $[x_{i-1}, x_i]$ υπάρχουν άπειροι ρητοί και άρα $m_i = 0$ για όλα τα $i = 1, \ldots, n$. Συνοψίζοντας,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup\{L(f,p) : P \text{ διαμέριση του } [a,b]\} = \sup\{0\} = 0$$

(2) Έστω $\lambda > 0$. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$H(x) = \int_a^x f(t)\, dt - \lambda \int_x^b f(t)\, dt$$

Η $H$ είναι συνεχής αφού

$$H(x) = \int_a^x f(t)\, dt - \lambda \left( \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^x f(t)\, dt \right) = (\lambda+1) \int_a^x f(t)\, dt - \lambda \int_a^b f(x)\, dx = (\lambda+1)F(x) - \lambda \int_a^b f(x)\, dx$$

και η $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, είναι συνεχής.

Επειδή $H(a)H(b) = -\lambda \left( \int_a^b f(t)\, dt \right)^2 < 0$ και συνεπώς από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών υπάρχει $\xi \in (a,b)$ με $H(\xi) = 0$, ισοδύναμα, $\int_a^\xi f(t)\, dt = \lambda \int_\xi^b f(t)\, dt$.

**Θέμα 4.** (1) ***(1 μον.)*** *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα* $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+2x+5}\,dx$.

(2) ***(1,5 μον.)*** *Έστω* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *συνεχής συνάρτηση. Αν* $f(a)=\int_a^b f(t)\,dt=0$ *δείξτε ότι υπάρχει* $\xi\in(a,b)$ *τέτοιο ώστε* $f(\xi)=\dfrac{\int_a^\xi f(t)\,dt}{\xi-a}$. *(Υπόδειξη: Θεωρείστε την συνάρτηση* $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ *με* $\phi(a)=0$ *και* $\phi(x)=\dfrac{\int_a^x f(t)\,dt}{x-a}$ *για κάθε* $x\in(a,b]$.*)*

**Απάντηση:** (1) Έχουμε

$$\int \frac{x}{x^2+2x+5}\,dx=\int \frac{x}{x^2+2x+1+4}\,dx=\int \frac{x}{(x+1)^2+4}\,dx=\frac{1}{4}\int \frac{x}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}.$$

Θέτουμε $u=\dfrac{x+1}{2}$ και άρα $x=2u-1$ και $dx=2du$. Οπότε

$$\int \frac{x}{x^2+2x+5}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{2u-1}{u^2+1}\,du=\int \frac{u}{u^2+1}\,du-\frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,du$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\int \frac{u}{u^2+1}\,du=\frac{1}{2}\ln(u^2+1)=\frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right)$$

Για το δεύτερο έχουμε

$$\int \frac{1}{u^2+1}\,du=\arctan u=\arctan\frac{x+1}{2}.$$

Τελικά,

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx=\frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right)+\arctan\frac{x+1}{2}$$

(2) Έστω η συνάρτηση $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $\phi(a)=0$ και $\phi(x)=\dfrac{\int_a^x f(t)\,dt}{x-a}$ για κάθε $x\in(a,b]$. Έστω επίσης $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι η $F$ είναι παραγωγίσιμη (και άρα και συνεχής) με $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in[0,1]$.

(α) Η $\phi$ είναι συνεχής στο $[a,b]$. Πράγματι, για $x\in(a,b]$, $\phi(x)=F(x)/x$, οπότε η $\phi$ είναι συνεχής στο $(a,b]$ ως πηλίκο συνεχών. Επιπλέον, είναι συνεχής και στο $x_0=a$ αφού

$$\lim_{x\to a}\phi(x)=\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=F'(a)=f(a)=\phi(a)$$

(β) Η $\phi$ είναι παραγωγίσιμη στο $(a,b)$. Πράγματι, έστω $x\in(a,b)$. Τότε

$$\phi'(x)=\left(\frac{F(x)}{x}\right)'=\frac{F'(x)\cdot x-F(x)\cdot(x)'}{x^2}=\frac{xf(x)-F(x)}{x^2}$$

(γ) $\phi(a)=\phi(b)=0$.

Από τα (α), (β), (γ) και το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi\in(a,b)$ με $\phi'(\xi)=0$, οπότε

$$\frac{\xi f(\xi)-F(\xi)}{\xi^2}=0\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{F(\xi)}{\xi}=\frac{\int_0^\xi f(t)\,dt}{\xi}.$$

**Θέμα 5.** (1) ***(1 μον.)*** *Έστω η συνάρτηση* $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$, *αν* $x \neq 0$ *και* $f(0) = 0$. *(i) Εξετάστε αν η* $f$ *είναι παραγωγίσιμη. (ii) Υπάρχει το όριο* $\lim_{x\to 0} f'(x)$ ?

(2) ***(1,5 μον.)*** *Έστω* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *συνεχής με* $f(0) = 0$ *και παραγωγίσιμη στο 0 με* $f'(0) = 4$. *Δείξτε ότι υπάρχει* $\delta > 0$ *τέτοιο ώστε* $x^2 < \int_0^x f(t)\, dt < 3x^2$, *για κάθε* $x \in (0, \delta)$.

**Απάντηση:** (1) Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε $f'(x) = 2x\sin\dfrac{1}{x} + x^2\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$.
Επίσης για $x = 0$ έχουμε

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

από Θεώρημα Παρεμβολής, αφού $-x \leq x\sin\dfrac{1}{x} \leq x$. Τέλος, το όριο

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)$$

δεν υπάρχει. Πράγματι, έστω οι ακολουθίες $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ και $y_n = \dfrac{1}{2n\pi+\pi}$. Έχουμε $x_n, y_n \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$ και $\lim_{n\to\infty} f'(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f'(y_n)$ αφού $f'(x_n) = -1$ και $f'(y_n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(2) <u>α΄ τρόπος:</u> Έστω $G(x) = \dfrac{\int_0^x f(t)\, dt}{x^2}$, $x \in (0,1]$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα de l' Hopital έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+} G(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\, dt}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x f(t)\, dt\right)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{2}f'(0) = 2$$

Από τον ορισμό του ορίου έχουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$0 < x < \delta \Rightarrow |G(x) - 2| < \epsilon \Rightarrow 2 - \epsilon < \frac{\int_0^x f(t)\, dt}{x^2} < 2 + \epsilon \Rightarrow (2-\epsilon)x^2 < \int_0^x f(t)\, dt < (2+\epsilon)x^2$$

Το ζητούμενο έπεται για $\epsilon = 1$.

<u>β΄ τρόπος:</u> Έχουμε

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 4$$

Άρα, όπως παραπάνω, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$0 < x < \delta \Rightarrow 4 - \epsilon\frac{f(x)}{x} < 4 + \epsilon \Rightarrow (4-\epsilon)x < f(x) < (4+\epsilon)x$$

Από την ιδιότητα μονοτονίας του ολοκληρώματος,

$$0 < t < x < \delta \Rightarrow (4-\epsilon)t < f(t) < (4+\epsilon)t \Rightarrow (4-\epsilon)\int_0^x t\, dt < \int_0^x f(t)\, dt < (4+\epsilon)\int_0^x t\, dt$$

$$\Rightarrow \frac{4-\epsilon}{2}x^2 < \int_0^x f(t)\, dt < \frac{4+\epsilon}{2}x^2$$

και συνεπώς για $\epsilon = 2$ έχουμε το ζητούμενο.