ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΜΑΘ. ΑΝΑΛΥΣΗΣ, ΣΑΤΜ, 08/02/2023

ΘΕΜΑ Α (**3 μον**) *Επιλέξτε την σωστή απάντηση στις παρακάτω προτάσεις*:

(1) Η σειρά $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots$ (α) συγκλίνει στο $\frac{2}{3}$ (β) συγκλίνει στο 2 (γ) αποκλίνει στο $+\infty$.

Σωστή είναι η (α): Πράγματι, $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}$.

(2) Η σειρά $1-1+1-1+\dots$ (α) συγκλίνει στο 0 (β) ταλαντώνεται (γ) συγκλίνει στο 1.

Σωστή είναι η (β): Πράγματι, η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $1-1+1-1+\dots$ είναι η $s_1=1$, $s_2=0$, $s_3=1$, $s_4=0$, κ.ο.κ. που ταλαντώνεται μεταξύ του 1 και του 0.

(3) Έστω η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ όπου (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών με $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$. Τότε η σειρά (α) θα αποκλίνει (β) θα συγκλίνει (γ) δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν θα συγκλίνει ή όχι.

Σωστή είναι η (γ): Πράγματι, οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ και $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ικανοποιούν την υπόθεση $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ αφού οι ακολουθίες $\left(\frac{1}{n}\right)$ και $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ είναι φθίνουσες αλλά η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ αποκλίνει ενώ η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

(4) Η ακολουθία $a_n=\frac{\sqrt[n]{n}(n+1)^{2n}}{n^{2n}}$ (α) συγκλίνει στο e^2 (β) συγκλίνει στο 0 (γ) συγκλίνει στο 1.

Σωστή είναι η (α): Πράγματι, $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}(n+1)^{2n}}{n^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2=1\cdot e^2=e^2$.

(5) Η ακολουθία $a_n = \dfrac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}$ (α) συγκλίνει στο 0 (β) συγκλίνει στο $\dfrac{1}{3}$ (γ) αποκλίνει στο $+\infty$.

***Σωστή είναι η* (β):** Πράγματι, παρατηρούμε ότι το άθροισμα $\dfrac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}$ γράφεται $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}{n}$ όπου $f(x) = x^2$, και άρα ο a_n είναι ο μέσος όρος των τιμών της συνάρτησης $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$ στα σημεία $0. \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1$. Συνεπώς από Θεωρία Ολοκλήρωσης (αθροίσματα Riemann) έχουμε $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}{n} = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$.

(6) Αν η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ αποκλίνει τότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ είναι (α) γνήσια μεγαλύτερη του 1 (β) γνήσια μικρότερη του 1 (γ) μικρότερη ή ίση με 1.

***Σωστή είναι η* (γ):** Πράγματι, γνωρίζουμε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει για $|x| < R$. Άρα, αν $R > 1$ θα έπρεπε να συγκλίνει στο $x = -1$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού από υπόθεση η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-1)^n$ αποκλίνει.

<u>ΘΕΜΑ Β</u> (3 μον) Δίνεται η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} x^n$.

(1) (1 μον) Υπολογίστε την ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς και εξετάστε την σύγκλιση της δυναμοσειράς στα σημεία $x = \pm R$. Για ποιά $x \in \mathbb{R}$ η δυναμοσειρά συγκλίνει και για ποιά αποκλίνει?

(2) Βρείτε τους τύπους (α) (1 μον) της παραγώγου $f'(x)$ και (β) (1 μον) της ίδιας της $f(x)$.

ΛΥΣΗ (1) Έχουμε $a_n = \frac{1}{2^n n}$ και άρα $\varrho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2}$. Συνεπώς, η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = 1/\varrho = 2$ και η δυναμοσειρά συγκλίνει για $|x| < 2$ και αποκλίνει για $|x| > 2$. Ελέγχουμε τώρα τη σύγκλιση στα σημεία -2 και 2. Για $x = -2$ παίρνουμε την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ η οποία είναι η εναλλάσσουσα αρμονική που ως γνωστόν συγκλίνει (κριτήριο Dirichlet). Για $x = 2$ παίρνουμε την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που είναι η αρμονική σειρά που ως γνωστόν αποκλίνει.

Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in [-2, 2)$ και αποκλίνει παντού αλλού.

(2) (α) Για κάθε $x \in (-2, 2)$, από το Θεώρημα Παραγώγισης δυναμοσειράς, έχουμε $f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{2^3} + \cdots = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \dots \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{1}{2 - x}$.

(β) Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού, έχουμε $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\, dt = \int_0^x \frac{1}{2 - t}\, dt \overset{u=2-x}{=} -\int_2^{2-x} \frac{1}{u}\, du = \ln 2 - \ln(2 - x) = \ln \frac{2}{2 - x}$. Επειδή $f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} x^n |_{x=0} = 0$, έχουμε $f(x) = \ln \frac{2}{2 - x}$, για κάθε $x \in (-2, 2)$.

ΘΕΜΑ Γ (4 μον)

(1) Έστω η συνάρτηση $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. (α) (0,5 μον) Δείξτε ότι $\cosh x \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (β) (1 μον) Βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cosh x - 1}{x^2}$.

(2) (1 μον) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση την σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)$.

(3) (1,5 μον) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 1}\, dx$.

ΛΥΣΗ (1) (α) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Θέτοντας $u = e^x$ έχουμε $u > 0$ και $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \dfrac{u + \frac{1}{u}}{2} = \dfrac{u^2+1}{2u} \geq 1 \overset{u>0}{\Leftrightarrow} u^2 + 1 \geq 2u \Leftrightarrow u^2 - 2u + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (u-1)^2 \geq 0$ που φυσικά ισχύει.

(β) Θα εφαρμόσουμε δύο φορές τον κανόνα de l'Hopital: Έχουμε

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{(\cosh x - 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)'}{(2x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{4} = \frac{1}{2}$$

(2) Από το (1β) έχουμε

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\cosh\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Επειδή ως γνωστόν η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, από το Οριακό Κριτήριο Σύγκλισης έπεται ότι και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)$ συγκλίνει.

(3) Θέτοντας $u = e^x > 0$ και $du = e^x dx = u dx \Rightarrow dx = \dfrac{1}{u} du$, έχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\, dx = \int \frac{u+1}{u^2+1} \cdot \frac{1}{u}\, du = \int \frac{u+1}{u(u^2+1)}\, du &= \int \frac{u}{u(u^2+1)}\, du + \int \frac{1}{u(u^2+1)}\, du \\ &= \int \frac{1}{u^2+1}\, du + \int \frac{1}{u(u^2+1)}\, du \\ &= \arctan u + \int \frac{1}{u(u^2+1)}\, du.\end{aligned}$$

Παρατηρώντας ότι $\dfrac{1}{u(u^2+1)} = \dfrac{1}{u} - \dfrac{u}{u^2+1}$ έχουμε

$$\int \frac{1}{u(u^2+1)}\, du = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+1}\right) du = \int \frac{1}{u}\, du - \int \frac{u}{u^2+1}\, du = \ln u - \frac{1}{2}\ln(u^2+1).$$

Από τα παραπάνω, αφού $e^x = u$, παίρνουμε

$$\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\, dx = \arctan(e^x) + x - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1).$$