Εξέταση: Περιγραφική Θεωρία Συνόλων
(Μεταπτυχιακό Μάθημα)

Ιούνιος 2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων
Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών

Διάρκεια εξέτασης:
2 ώρες

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Σημειώσεις.

- Υπάρχουν συνολικά **12 ερωτήματα** και παίρνει **1 μονάδα** το κάθε ένα. Η βαθμολογία του γραπτού σας είναι το $\min\{x, 10\}$, όπου x ο βαθμός που γράψατε. Μπορείτε να απαντήσετε σε **όσα ερωτήματα επιθυμείτε** χωρίς κανέναν περιορισμό.
- Οι απαντήσεις σας πρέπει να είναι πλήρεις και αιτιολογημένες.
- Οι φυσικοί αριθμοί είναι το σύνολο $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Το σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών φυσικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.
- Αν $k, i \in \mathbb{N}$ με τον συμβολισμό $(k)^{(i)}$ εννοούμε την πεπερασμένη ακολουθία $(k, k, \dots, k)$ με μήκος i.
- Υπενθυμίζεται ότι η μετρική $d_{\mathcal{N}}$ του χώρου του Baire $\mathcal{N}$ ικανοποιεί για όλα τα $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$ με $\alpha \neq \beta$ ότι $d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) = 2^{-n}$, όπου n είναι ο ελάχιστος $k \in \mathbb{N}$ με $\alpha(k) \neq \beta(k)$.

Ερώτημα 1. Δείξτε ότι τα ακόλουθα σύνολα με τη σχετική τοπολογία του $\mathbb{R}$ είναι Πολωνικοί χώροι,

$$G_1 = [0, 1], \quad G_2 = (0, 1].$$

Ερώτημα 2. Βρείτε την απόσταση $d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta)$ σε κάθε μία από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \alpha = (3, 4, 5, 0, 0, \dots, 0, \dots), \quad \beta = (3, 0, 0, \dots, 0, \dots) \\ &\text{(ii)} \quad \alpha(n) = (-1)^n, \quad \beta(n) = 0 \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ερώτημα 3. Εξετάστε τις πιο κάτω ακολουθίες $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ και $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ του $\mathcal{N}$ ως προς τη σύγκλιση,

$$\alpha_i = (1)^{(i)} * (0, 0, \dots, 0, \dots), \quad \beta_i = (i)^{(i)} * (0, 0, \dots, 0, \dots), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Στην περίπτωση όπου έχουμε σύγκλιση να δώσετε το όριο της ακολουθίας.

Ερώτημα 4. Θεωρούμε το σύνολο $T = \{\Lambda\} \cup \{(0, 1, 2, \dots, n) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid n \in \mathbb{N}\}$, όπου Λ είναι η κενή ακολουθία. Δείξτε ότι το T είναι δένδρο στο $\mathbb{N}$ και βρείτε το σώμα $[T]$ του T.

Ερώτημα 5. Δίνεται το σύνολο $J = \{(1, 2, 3), (8, 7)\} \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Βρείτε ένα δένδρο T στο $\mathbb{N}$ που ικανοποιεί: α) $J \subseteq T$ και β) για κάθε δένδρο S στο $\mathbb{N}$ με $J \subseteq S$ ισχύει $T \subseteq S$.

Ερώτημα 6. Θεωρούμε το ακόλουθο κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$,

$$C = [-1, 1] \cup \{3 + 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{3\}.$$

Βρείτε τον τέλειο πυρήνα και το διάσπαρτο μέρος του C.

Ερώτημα 7. Αποδείξτε ότι οι κλάσεις $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}^0_n$, όπου $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 1$, είναι κλειστές ως προς συνεχή αντικατάσταση.

Ερώτημα 8. Δίνεται το σύνολο $P \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ με

$$\begin{aligned} \alpha \in P \iff & \text{υπάρχει } i \in \mathbb{N} \text{ έτσι ώστε για άπειρα το πλήθος } j \in \mathbb{N} \\ & \text{ισχύει } \alpha(\langle i, j \rangle) = 0, \end{aligned}$$

όπου $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ και $\langle \cdot \rangle : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ είναι η γνωστή συνάρτηση κωδικοποίησης. Βρείτε έναν φυσικό $n \geq 1$ με $P \in \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}^0_n(2^{\mathbb{N}})$. (Μπορείτε να εφαρμόσετε τον διαγραμματικό συλλογισμό και να πάρετε δεδομένο ότι οι εμπλεκόμενες συναρτήσεις είναι συνεχείς.)

Ερώτημα 9. Αποδείξτε ότι η κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathbb{N}}$.

Ερώτημα 10. Θεωρούμε μια κλάση συνόλων Γ σε Πολωνικούς χώρους που περιέχει όλα τα ανοικτά σύνολα και είναι κλειστή ως προς α) τον τελεστή του συμπληρώματος και β) τον τελεστή $\exists^{\mathcal{N}}$. Δείξτε ότι κάθε $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ σύνολο ανήκει στη Γ, όπου $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 1$.

Ερώτημα 11. Διατυπώστε το Θεώρημα Διαχωρισμού του Lusin και με τη βοήθειά του δείξτε ότι κάθε $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_1$ σύνολο είναι Borel.

Ερώτημα 12. Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και συμβολίζουμε με $\mathcal{X}_p$ τον τέλειο πυρήνα του $\mathcal{X}$. Δείξτε ότι αν το $A \cap \mathcal{X}_p$ ανήκει στην οικογένεια $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{19}(\mathcal{X})$ τότε και το A ανήκει στην $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{19}(\mathcal{X})$.