**ΠΡΟΟΔΟΣ ΜΑΘ. ΑΝΑΛΥΣΗΣ, ΣΑΤΜ, 8/12/2022**
**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ**

**Θέμα 1. (3,5 μον)**

(1.1) (1,5 μον) Υπολογίστε τα παρακάτω αθροίσματα:

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\dots.$

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!} = 1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\dots.$

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\pi}{1!}-\frac{\pi^3}{3!}+\frac{\pi^5}{5!}-\dots$

(1.2) (0,5 μον) Γιατί η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ αποκλίνει?

(1.3) (0,5 μον) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας $(a_n)$ με $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty$ ενώ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=s\in\mathbb{R}$.

(1.4) (0,5 μον) Είναι δυνατόν η δυναμοσειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ να αποκλίνει για $x=1$ και να συγκλίνει για $x=2$?

(1.5) (0,5 μον) Υπολογίστε την τιμή του ολοκληρώματος $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx$.

*Απόδειξη.* (1.1)

(1) Είναι η δυναμοσειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n = 1+x+x^2+\dots=\frac{1}{1-x}$ για $x=\frac{3}{4}$. Άρα

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=4$$

(2) Είναι η δυναμοσειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$ για $x=-1$, οπότε

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=e^{-x}$$

(3) Είναι η δυναμοσειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(2n+1)!}=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots=\sin x$ για $x=\pi$. Άρα

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sin\pi=0$$

(1.2) Γνωρίζουμε ότι αν μια σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ συγκλίνει τότε $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ ή ισοδύναμα αν η $(a_n)$ δεν συγκλίνει στο 0 τότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ αποκλίνει. Επειδή λοιπόν, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1\neq 0$ η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ αποκλίνει.

(1.3) Αν $a_n=\dfrac{1}{n}$ τότε $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$ ενώ η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

(1.4) Όπως γνωρίζουμε, αν $R$ είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει για $|x| < R$ και αποκλίνει για $|x| > R$. Άρα αν η δυναμοσειρά συνέκλινε για $x = 2$ θα έπρεπε $R \geq 2$ οπότε θα συνέκλινε και για $x = 1$, άτοπο. Άρα η δυναμοσειρά αποκλίνει για $x = 2$.

(1.5) Γνωρίζουμε ότι $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, ισοδύναμα $\int \dfrac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x$. Συνεπώς,

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

□

**Θέμα 2. (3 μον)** Δίνεται η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{5^n n}$.

(2.1) (2 μον) Υπολογίστε την ακτίνα σύγκλισης $R$ της δυναμοσειράς και εξετάστε την σύγκλιση της δυναμοσειράς στα σημεία $x = \pm R$. Για ποιά $x \in \mathbb{R}$ η δυναμοσειρά συγκλίνει και για ποιά αποκλίνει?

(2.2) (1 μον) Βρείτε τον τύπο της $f'$.

*Απόδειξη.* (2.1) Έχουμε $a_n = \dfrac{1}{5^n n}$. Ως γνωστόν, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς δίνεται απο τον τύπο $R = 1/\rho$, όπου

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n n}{5^{n+1}(n+1)} = \frac{n}{5(n+1)} = \frac{1}{5}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{5}$$

και άρα $R = 5$.

Συνεπώς η δυναμοσειρά συγκλίνει για όλα τα $x \in (-5, 5)$ και αποκλίνει όταν $x < -5$ ή $x > 5$. Μένει να εξετάσουμε τη σύγκλιση στα σημεία $x = -5$ και $x = 5$.

Για $x = -5$ παίρνουμε την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-5)^n}{5^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ που είναι η εναλλάσσουσα αρμονική που ως γνωστόν (Κριτήριο Leibnitz) συγκλίνει.

Για $x = 5$ παίρνουμε την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(5)^n}{5^n n} == \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ που είναι η αρμονική που ως γνωστόν αποκλίνει.

Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in [-5, 5)$ και αποκλίνει παντού αλλού.

(2.2) Έχουμε $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\dfrac{x^{n-1}}{5^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n-1}}{5^n} = \dfrac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{x}{5}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{5}\dfrac{1}{1-\frac{x}{5}} = \dfrac{1}{5-x}$.

□

**Θέμα 3. (3,5 μον)**

(3.1) (2,5 μον) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n}$. Ποιό είναι το όριο $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n}$ ?

(3.2) (1 μον) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

*Απόδειξη.* (3.1) Έχουμε $a_n = \dfrac{2^n n!}{n^n}$, οπότε

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} &= 2\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot (n+1) \\
&= 2\frac{n^n}{(n+1)^n} \\
&= 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}
\end{aligned}$$

και άρα

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$$

και συνεπώς η σειρά συγκλίνει. Αφού η σειρά συγκλίνει, έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n} = 0$.

(3.2) Συγκρίνουμε την σειρά με την αρμονική σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$. Επειδή,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \arctan 0}{x-0} = (\arctan x)'|_{x=0} = \frac{1}{1+x^2}|_{x=0} = 1$$

και η αρμονική σειρά αποκλίνει, από το κριτήριο Οριακής Σύγκρισης, η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$ αποκλίνει.

$\square$