Μέγιστη ροή - ελάχιστη τομή

Βελτιστοποίηση δικτύων

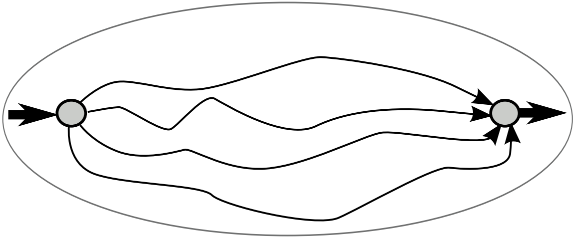
1 Δεκεμβρίου 2022

Το πρόβλημα της μέγιστης ροής
- Ορισμός
- Τομή γράφου
- Αναζήτηση μη αποφραγμένης διαδρομής

Μέγιστη ροή και ελάχιστη τομή
- Το θεώρημα μέγιστης ροής -ελάχιστης τομής
- Ο αλγόριθμος Ford - Fulkerson

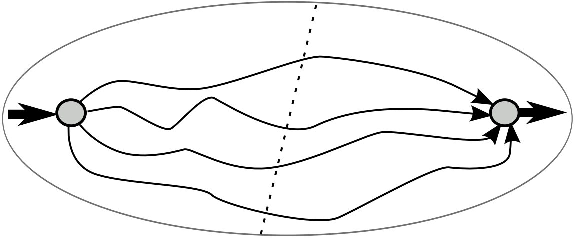
Το πρόβλημα της μέγιστης ροής

- Δίνεται γράφος $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ με όρια ροής $x_{ij} \in [b_{ij}, c_{ij}]$ για κάθε ακμή (i, j) και δύο επιλεγμένους κόμβους s και t.
- Θέλουμε να υπολογίσουμε τη ροή στο γράφο, ώστε να μεγιστοποιείται η απόκλιση του κόμβου s (εξερχόμενη ροή), με την υπόθεση ότι οι αποκλίσεις όλων των κόμβων, εκτός των s και t, είναι μηδενικές.



Μέγιστη ροή - ελάχιστη τομή

- Σχετικό με το πρόβλημα της μέγιστης ροής είναι το *θεώρημα μέγιστης ροής - ελάχιστης τομής*.



Βιβλιογραφία: D. Bertsekas, "Network Optimization", Athena Scientific, Boston, 1998.

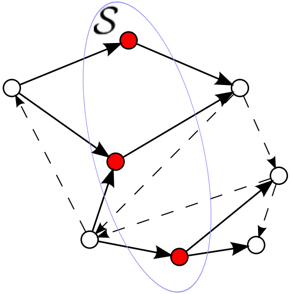
Η βασική ιδέα στον αλγόριθμο μέγιστης ροής

- Μια δυνατή ροή x μπορεί να βελτιωθεί εφόσον εντοπισθεί διαδρομή μεταξύ s και t τέτοια ώστε να μην είναι αποφραγμένη (blocked) από τη ροή x.
- Αντίστροφα, αν δεν υπάρχει τέτοια διαδρομή, η ροή είναι μέγιστη.
- Τόσο το θεώρημα μέγιστης ροής - ελάχιστης τομής, όσο και ο αλγόριθμος Ford-Fulkerson, στηρίζονται στις ιδέες αυτές.

Τομή γράφου

- Τομή Q σε γράφο $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ είναι ένας διαμερισμός του συνόλου των κόμβων $\mathcal{N}$ σε δυο μη κενά σύνολα $\mathcal{S}$ και $\mathcal{N} - \mathcal{S}$.
- Για την παράσταση μιας τομής θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$Q = [\mathcal{S}, \mathcal{N} - \mathcal{S}]$$

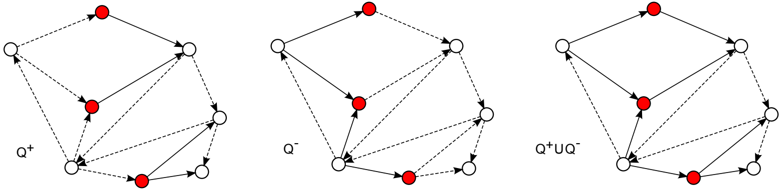


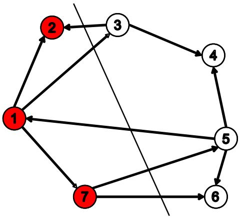
- Το σύνολο Q^+ των εμπρόσθιων ή ορθών (forward) ακμών αποτελείται από ακμές που ξεκινούν από κόμβους του $\mathcal{S}$ και καταλήγουν σε κόμβους του $\mathcal{N} - \mathcal{S}$:

$$Q^+ = \{(i,j) \in \mathcal{A} | i \in \mathcal{S}, j \notin \mathcal{S}\}$$

- Το σύνολο Q^- των ανάστροφων (backward) ακμών αποτελείται από ακμές που καταλήγουν σε κόμβους του $\mathcal{S}$ και ξεκινούν από κόμβους του $\mathcal{N} - \mathcal{S}$:

$$Q^- = \{(i,j) \in \mathcal{A} | i \notin \mathcal{S}, j \in \mathcal{S}\}$$





Παράδειγμα: Έστω $\mathcal{S} = \{1, 2, 7\}$. Άρα

$$\mathcal{N} - \mathcal{S} = \{3, 4, 5, 6\}$$

και

$$Q = \{\{1, 2, 7\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$$

Επίσης

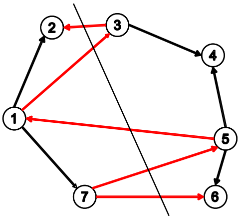
$$Q^{+} = \{(1, 3), (7, 5), (7, 6)\}$$

$$Q^{-} = \{(5, 1), (3, 2)\}$$

Ροή διερχομένη από τομή

Δεδομένου διανύσματος ροής x, η ροή που διέρχεται μέσα από τη μη κενή τομή $Q = [\mathcal{S}, \mathcal{N} - \mathcal{S}]$ ορίζεται ως η συνολική ροή που εξέρχεται από το $\mathcal{S}$, ήτοι

$$F(Q) = \sum_{(i,j) \in Q^+} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in Q^-} x_{ij}$$



Λήμμα: Η ροή $F(Q)$ που διέρχεται από τομή Q είναι ίση με το άθροισμα των αποκλίσεων των κόμβων που περικλείει, δηλ. του συνόλου $\mathcal{S}$. $\square$

$$F(Q) = \sum_{\{(i,j)\in\mathcal{A}|i\in\mathcal{S},j\in\mathcal{N}-\mathcal{S}\}} x_{ij} - \sum_{\{(i,j)\in\mathcal{A}|i\in\mathcal{N}-\mathcal{S},j\in\mathcal{S}\}} x_{ij}$$

άρα

$$F(Q) = \sum_{i\in\mathcal{S}} \left[\sum_{\{j|(i,j)\in\mathcal{A},j\in N-S\}} x_{ij} - \sum_{\{j|(j,i)\in\mathcal{A},j\in N-S\}} x_{ji} \right] \qquad (1)$$

Αλλά για τις ακμές που είναι εσωτερικές στο $\mathcal{S}$

$$\sum_{i\in\mathcal{S}} \left[\sum_{\{j|(i,j)\in\mathcal{A},j\in S\}} x_{ij} - \sum_{\{j|(j,i)\in\mathcal{A},j\in S\}} x_{ji} \right] = 0$$

άρα η (1) ισχύει για όλα τα j

$$F(Q) = \sum_{i \in \mathcal{S}} \left[\sum_{\{j | (i,j) \in \mathcal{A}\}} x_{ij} - \sum_{\{j | (j,i) \in \mathcal{A}\}} x_{ji} \right]$$

και τελικά

$$F(Q) = \sum_{i \in \mathcal{S}} y_i$$

Χωρητικότητα τομής

Δεδομένου ενός άνω ορίου c_{ij} και ενός κάτω ορίου b_{ij} για τη ροή x_{ij} μέσα από την κάθε ακμή (i, j), η συνολική *χωρητικότητα* της μη κενής τομής Q είναι

$$C(Q) = \sum_{(i,j)\in Q^+} c_{ij} - \sum_{(i,j)\in Q^-} b_{ij}$$

και ισχύει

$$F(Q) \leq C(Q)$$

Αν

$$F(Q) = C(Q)$$

η τομή Q λέγεται *κορεσμένη* από τη ροή x.

Πρόταση 1: Έστω διάνυσμα ροής x που τηρεί περιορισμούς χωρητικότητας. Ακριβώς ένα εκ των επομένων ισχύει:

1. Υπάρχει απλή διαδρομή από τον s στον t, που δεν είναι αποφραγμένη από τη ροή x.
2. Υπάρχει μια αποφραγμένη τομή, που διαχωρίζει τον s από τον t.

Η απόδειξη γίνεται με χρήση ενός αλγορίθμου, που τερματίζει βρίσκοντας είτε μια διαδρομή όπως στο 1, είτε μια τομή όπως στο 2. Ο αλγόριθμος είναι ειδική περίπτωση της μεθόδου breadth-first search.[1] Ο αλγόριθμος βρίσκει μια ακολουθία συνόλων κόμβων S_k, που είναι προσιτοί στον s μέσω μιας απλής διαδρομής k βημάτων, αρχίζοντας με $S_0 = \{s\}$.

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Breadth-first_search

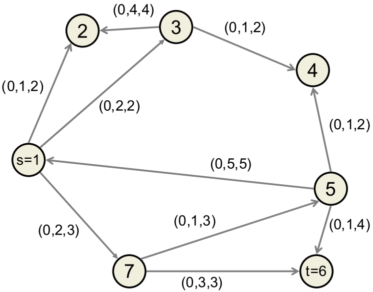
Αλγόριθμος αναζήτησης μη αποφραγμένης διαδρομής

Ο επόμενος αλγόριθμος γεννάει μια ακολουθία συνόλων κόμβων $\{T_k\}$ που περιλαμβάνει κόμβους που είναι προσιτοί από τον s μέσω μιας μη αποφραγμένης διαδρομής k ακμών. Αρχίζει με $T_0 = \{s\}$.

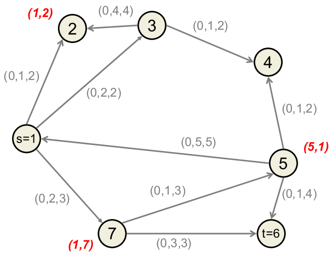
Αλγόριθμος: Για $k = 0, 1, 2, \ldots$ δεδομένου ενός T_k να τερματίσεις αν συμβεί είτε το T_k να είναι κενό είτε να είναι $t \in T_k$· αλλιώς να θέσεις

$$\begin{aligned} T_{k+1} \quad = \quad & \{n \notin \cup_{i=0}^{k} T_i | \text{υπάρχει κόμβος } m \in T_k, \\ & \text{και είτε μια ακμή}(m,n) \text{ με } x_{mn} < c_{mn} \\ & \text{είτε μια ακμή}(n,m) \text{ με } b_{nm} < x_{nm}\} \end{aligned}$$

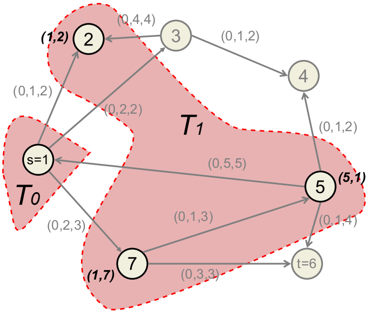
και να σημειώσεις κάθε κόμβο $n \in T_{k+1}$ με επιγραφή "(m,n)" ή "(n,m)", όπου m είναι ο κόμβος του $n \in T_k$ και (m,n) ή (n,m) είναι ακμή με την ιδιότητα που αναγράφεται ανωτέρω, αντίστοιχα.



Παράδειγμα: Πάνω από κάθε ακμή (i, j) είναι σημειωμένη η ροή, καθώς και τα άνω/κάτω φράγματά της με το συμβολισμό (b_{ij}, x_{ij}, c_{ij}).



Η εικόνα αποδίδει την κατάσταση στο τέλος του πρώτου βήματος. Το βήμα αυτό, λαμβάνοντας υπόψη του ότι $T_0 = \{1\}$, εντοπίζει ότι με τον κόμβο 1 συνδέονται οι κόμβοι 2,3,5,7, εκ των οποίων ο 3 συνδέεται με αποφραγμένη ακμή, διότι $x_{13} = 2 = c_{13}$.

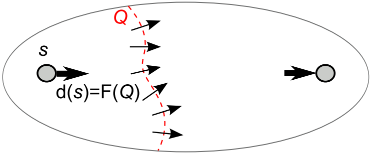


Επομένως $T_1 = \{2, 5, 7\}$. Δίπλα στους κόμβους αυτούς έχουν σημειωθεί οι αντίστοιχες ακμές $(1, 2), (5, 1), (1, 7)$. Μπορείτε να παρατηρήσετε ότι για τον κόμβο 5, που συνδέεται με αντίστροφη ακμή, μη απόφραξη υπάρχει όταν $b_{51} = 0 < x_{51}$. Όταν ο αλγόριθμος τερματίσει (στο επόμενο βήμα) θα δώσει ως λύση μεταξύ άλλων και τη διαδρομή 1,5,6 (κατά μήκος της οποίας μπορεί να γίνει αύξηση της ροής κατά 3).

Τερματισμός

- Εφόσον σε κάθε βήμα εξετάζονται οι κόμβοι T_k που δεν ανήκουν στην ένωση $\cup_{i=0}^{k-1} T_i$ όλων των μέχρι τότε εξετασθέντων κόμβων, κάποτε είτε θα ενσωματωθεί στο σύνολο T_i ο κόμβος t είτε οι κόμβοι θα εξαντληθούν και ο αλγόριθμος θα τερματίσει. Έστω $\mathcal{S} = \cup_{i=0}^{\lambda} T_i$, όπου λ το τελευταίο βήμα.
- Αν το τελικό σύνολο T_λ περιέχει το t, πηγαίνοντας από το τέλος προς την αρχή σε ακμές μη αποφραγμένες μπορεί κανείς να βρει μια απλή διαδρομή s, t συνολικά μη αποφραγμένη.
- Αν το τελικό σύνολο T_λ δεν περιέχει το t, δηλαδή είναι κενό, το σύνολο $\mathcal{S} = \cup_{i=0}^{\lambda} T_i$ δεν περιέχει τον κόμβο t και η τομή $Q = [\mathcal{S}, \mathcal{N} - \mathcal{S}]$ είναι κορεσμένη. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι τότε δεν υπάρχει απλή διαδρομή s, t, γιατί κάθε τέτοια διαδρομή πρέπει να έχει είτε μια ακμή $(m, n) \in Q^+$ με $x_{mn} < c_{mn}$ είτε μια ακμή $(n, m) \in Q^-$ με $x_{nm} > b_{nm}$, που είναι αδύνατο γιατί η τομή Q είναι κορεσμένη.

Μέγιστη ροή και χωρητικότητα μιας τομής Q



- Στο πρόβλημα μέγιστης ροής μεταξύ s και t, λόγω και του λήμματος που λέει ότι η ροή $F(Q)$ που διέρχεται από τομή Q είναι ίση με το άθροισμα των αποκλίσεων των κόμβων που περικλείει, δηλ. του συνόλου $\mathcal{S}$, η απόκλιση του s είναι ίση με τη ροή που διέρχεται από την τομή Q, που με τη σειρά της δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη χωρητικότητα.
- Άρα *η μέγιστη ροή δεν υπερβαίνει τη χωρητικότητα της τομής* Q.

Το θεώρημα μέγιστης ροής -ελάχιστης τομής

Πρόταση 2:

α Αν x^* είναι μια βέλτιστη λύση του προβλήματος μέγιστης ροής, η απόκλιση που εξέρχεται του s και αντιστοιχεί στο x^* είναι ίση με την ελάχιστη από τις χωρητικότητες των τομών που χωρίζουν τον s από τον t.

β Αν όλα τα κάτω φράγματα ροής των ακμών είναι μηδενικά ($b_{ij} = 0$), το πρόβλημα μέγιστης ροής έχει βέλτιστη λύση και η μέγιστη απόκλιση από τον s είναι ίση με την ελάχιστη από τις χωρητικότητες των τομών που χωρίζουν τον s από τον t.

Απόδειξη του (α)

- Έστω F^* η τιμή της μέγιστης ροής, δηλ. η απόκλιση που βγαίνει από τον s και αντιστοιχεί στη ροή x^*. Δεν μπορεί να υπάρχει μη αποφραγμένη διαδρομή P από τον s στον t ως προς τη ροή x^*, γιατί αυξάνοντας τη ροή στις ορθές ακμές της P και μειώνοντας αντίστοιχα στις ανάστροφες κατά το ίδιο θετικό ποσό, θα παίρναμε μια νέα ροή με απόκλιση μεγαλύτερη από την F^*.
- Κατά συνέπεια, και λόγω της Πρότασης 1 (σελ. 13), πρέπει να υπάρχει μια τομή Q κορεσμένη ως προς το x^* που να χωρίζει τα s και t. Η ροή διαμέσου της Q είναι ίση με F^* και είναι επίσης ίση με τη χωρητικότητα της Q. Το τελικό συμπέρασμα προκύπτει αφού γνωρίζουμε ότι η F^* είναι μικρότερη ή ίση με την ελάχιστη χωρητικότητα τομής.

Απόδειξη του (β)

- Το μέρος (α) του θεωρήματος παίρνει ως δεδομένη την ύπαρξη βέλτιστης λύσης. Ωστόσο μπορεί να δειχθεί ότι αν υπάρχει στο πρόβλημα αυτό δυνατή λύση, υπάρχει και βέλτιστη. Η απόδειξη μπορεί να γίνει είτε μέσω της μεθόδου simplex είτε με χρήση του θεωρήματος Weierstrass, που δηλώνει πως μια συνεχής συνάρτηση έχει μέγιστο επί ενός μη κενού και συμπαγούς συνόλου.
- Στην περίπτωσή μας, όπου δηλαδή τα κατώτερα όρια ροών είναι μηδενικά, το πρόβλημα έχει όντως μια δυνατή λύση, την τετριμένη μηδενική.

Ο αλγόριθμος Ford - Fulkerson

Ο κύκλος του αλγορίθμου συνίσταται στα εξής:

- Με χρήση της μεθόδου αναζήτησης μη αποφραγμένης διαδρομής ευρίσκεται ένα (και μόνον ένα) από τα ακόλουθα δύο:
    1. Μια κορεσμένη τομή μεταξύ s και t.
    2. Μια μη αποφραγμένη από τη ροή x διαδρομή P που να αρχίζει από το s και να τελειώνει στο t.
- Στην πρώτη περίπτωση ο αλγόριθμος τερματίζει. Στη δεύτερη, εκτελείται ενίσχυση της ροής κατά μήκος της P και προχωρούμε στο επόμενο βήμα.