Πρόχειρες Σημειώσεις Μαθηματικής Ανάλυσης
ΣΑΤΜ, 2022–2023

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ TAYLOR

Οι πιο απλές πραγματικές συναρτήσεις είναι οι *πολυωνυμικές*, δηλαδή οι συναρτήσεις της μορφής

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

ή γενικότερα της μορφής

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

όπου x_0 και $a_0, a_1, \ldots, a_n$ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Στις πολυωνυμικές συναρτήσεις μπορούμε να βρούμε σχετικά εύκολα τις τιμές τους και γενικά να μελετήσουμε τις ιδιότητές τους. Όμως η πλειονότητα των συναρτήσεων που χρησιμοποιούμε στην πράξη είναι συναρτήσεις που δεν μπορούν να γραφούν ως πολυώνυμα όπως πχ. η εκθετική συνάρτηση e^x, ή οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$ κλπ. Το Θεώρημα Taylor είναι από τα πλέον χρήσιμα εργαλεία της Μαθηματικής Ανάλυσης που δίνουν πολυωνυμικές προσεγγίσεις τέτοιων μη πολυωνυμικών συναρτήσεων.

1. Συμβολισμοί

Για να διατυπώσουμε το Θεώρημα Taylor θα χρειασθούμε τους παρακάτω συμβολισμούς.

Ορισμος 1.1. *Στα επόμενα για κάθε ακέραιο $k \geq 1$ με $k!$ (διαβάζεται "k* ***παραγοντικό****") συμβολίζουμε το γινόμενο όλων των θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι ή ίσοι με το k, δηλαδή*

$$k! = k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Επίσης ορίζουμε

$$0! = 1$$

Πχ. $1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, κοκ. Παρατηρείστε ότι για κάθε ακέραιο $k \geq 0$ ισχύει ότι

$$(k+1)! = (k+1) \cdot k!$$

Ορισμος 1.2. *Αν $f : I \to \mathbb{R}$ είναι μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα διάστημα I του $\mathbb{R}$. Για κάθε ακέραιο $k \geq 1$ με $f^{(k)}$ συμβολίζουμε την παράγωγο k-τάξης της f. Επίσης θέτουμε $f^{(0)} = f$.*

2. Παραγώγιση πολυωνυμικών συναρτήσεων

Έστω $n \geq 0$ ακέραιος και $x_0 \in \mathbb{R}$. Αν

$$p_n(x) = (x - x_0)^n$$

τότε εύκολα βλέπουμε ότι

$$p_n^{(0)}(x) = p_n(x) = (x - x_0)^n, \; p_n^{(1)}(x) = p_n'(x) = n(x - x_0)^{n-1},$$
$$p_n^{(2)}(x) = p_n''(x) = n(n-1)(x - x_0)^{n-2}, \ldots$$

και γενικά,

$$p_n^{(k)}(x) = \begin{cases} n(n-1)\ldots(n-k+1)(x-x_0)^{n-k} & \text{αν } 1 \leq k < n \\ k! & \text{αν } n = k \\ 0 & \text{αν } n < k \end{cases}$$

Άρα για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$p_n^{(k)}(x_0) = \begin{cases} 0 & \text{αν } n \neq k \\ k! & \text{αν } n = k \end{cases} \tag{1.1}$$

Χρησιμοποιώντας την (1.1) και τον καν·ονα παραγ·ωγισης αθροίσματος συναρτήσεων έχουμε την εξής πρόταση.

Πρόταση 1.3. *Έστω $p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$ μια πολυωνυμική συνάρτηση. Τότε*

$$p^{(k)}(x_0) = k! a_k \tag{1.2}$$

για κάθε $k = 0, \ldots, n$.

Από την (1.2) έχουμε ότι για κάθε $0 \leq k \leq n$, ο συντελεστής a_k σχετίζεται με την $p^{(k)}(x_0)$, μέσω του τύπου

$$a_k = \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} \tag{1.3}$$

Συνεπώς το $p(x)$ γράφεται και στην μορφή

$$p(x) = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{p''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{1.4}$$

3. Πολυώνυμα Taylor

Γενικεύοντας τον τύπο (1.4) θέτοντας στην θέση του $p(x)$ μια n-φορές παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση $f(x)$ δίνουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 1.4. *Έστω $n \geq 0$ ακέραιος, I ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in I$ τέτοιο ώστε οι τιμές $f^{(k)}(x_0)$ υπάρχουν και είναι πεπερασμένες για κάθε $k = 0, \ldots, n$. Το πολυώνυμο*

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{1.5}$$

*καλείται **πολυώνυμο Taylor τάξης** n **της** f **με κέντρο το** x_0.*

Παρατηρείστε ότι από τις (1.4) και (1.5) έχουμε ότι αν

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

τότε πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο το x_0 ταυτίζεται με την f.

Χρησιμοποιώντας το σύμβολο του αθροίσματος "$\sum$" και τις συμβάσεις $f^{(0)}(x) = f(x)$ και $0! = 1$, το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο το x_0 γράφεται σύντομα με τον τύπο

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $x_0 = 0$ το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο το $x_0 = 0$ παίρνει την πιο απλή μορφή

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \tag{1.6}$$

Πρόταση 1.5. *Έστω $T_n(x)$ το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο το x_0. Τότε*

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \tag{1.7}$$

για κάθε $k = 0, \dots, n$.

Απόδειξη. Έχουμε $T_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$ όπου

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \tag{1.8}$$

για κάθε $k = 0, \dots, n$.

Επίσης από την Πρόταση 1.3 έχουμε ότι

$$T_n^{(k)}(x_0) = k!a_k \tag{1.9}$$

για κάθε $k = 0, \dots, n$.

Άρα $T_n^{(k)}(x_0) = k!a_k = k!\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = f^{(k)}(x_0)$. □

4. Παραδείγματα

Όταν μια συνάρτηση είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη τότε ορίζονται τα πολυώνυμα Taylor οποιασδήποτε τάξης της f. Πολλές φορές το κέντρο x_0 είναι το μηδέν και τότε όπως είδαμε το πολυώνυμο Taylor τάξης n γράφεται

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Παράδειγμα 1.1. Για κάθε ακέραιο $n \geq 1$ το πολυώνυμο Taylor τάξης n της $f(x) = e^x$ με κέντρο $x_0 = 0$ έχει τύπο

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}. \tag{1.10}$$

Πράγματι, $f^{(k)}(x) = e^x$ και άρα $f^{(k)}(0) = 1$, για κάθε $k \geq 0$.

Επίσης αποδεικνύεται ότι αν η συνάρτηση είναι *άρτια* (δηλαδή $f(-x) = f(x)$) τότε στα πολυώνυμα Taylor της f με κέντρο το $x_0 = 0$ εμφανίζονται μόνο άρτιες δυνάμεις του x (αφού όπως αποδεικνύεται όλες οι παράγωγοι της f περιττής τάξης μηδενίζονται στο 0). Αντίστοιχα, αν η συνάρτηση είναι *περιττή* (δηλαδή $f(-x) = -f(x)$) τότε στα πολυώνυμα Taylor της f με κέντρο το $x_0 = 0$ εμφανίζονται μόνο περιττές δυνάμεις του x. Χαρακτηριστικά είναι τα επόμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.2. Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \cos x$(=*συνημίτονο του* x), $x \in \mathbb{R}$ είναι άρτια ($\cos(-x) = \cos x$) στα πολυώνυμα Taylor της $\cos x$ με κέντρο το $x_0 = 0$ θα εμφανίζονται μόνο άρτιες δυνάμεις του x.

Έχουμε, $f'(x) = (\cos x)' = -\sin x$, $f''(x) = (-\sin x)' = -\cos x$, $f^{(3)}(x) = (-\cos x)' = \sin x$, $f^{(4)}(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$ και άρα $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f^{(3)}(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 1 = f(0)$. Συνεπώς,

$$T_0(x) = T_1(x) = 1, \quad T_2(x) = T_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad T_4(x) = T_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

Γενικά, αποδεικνύεται ότι

$$T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{1.11}$$

για κάθε $n \geq 0$.

Παράδειγμα 1.3. Αντίστοιχα, επειδή η συνάρτηση $f(x) = \sin x$(=*ημίτονο του* x), $x \in \mathbb{R}$ είναι περιττή στα πολυώνυμα Taylor της $\sin x$ με κέντρο το $x_0 = 0$ θα εμφανίζονται μόνο περιττές δυνάμεις του x. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$T_0(x) = 0, \quad T_1(x) = T_2(x) = \frac{x}{1!}, \quad T_3(x) = T_4(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!}$$

Γενικά, αποδεικνύεται ότι

$$T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{1.12}$$

Παράδειγμα 1.4. Τα πολυώνυμα Taylor της $f(x) = \ln(x+1)$, $x \in (-1, +\infty)$ με κέντρο το $x_0 = 0$ είναι τα εξής:

$$T_0(x) = 0, \quad T_1(x) = \frac{x}{1}, \quad T_2(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2}, \quad T_3(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, \quad \ldots$$

και γενικά για $n \geq 1$, αποδεικνύεται ότι

$$T_n(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}. \tag{1.13}$$

5. Το Θεώρημα Taylor

Εν γένει η συνάρτηση f και το το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο το x_0, είναι διαφορετικές συναρτήσεις. Παρατηρείστε όμως ότι από την Πρόταση 1.5 έχουμε ότι η συνάρτηση f και το πολυώνυμο Taylor T_n της f τάξης n με κέντρο το x_0 έχουν την ίδια τιμή και τις ίδιες παραγώγους έως και τάξης n στο σημείο x_0.

Μια εκτίμηση για το πόσο διαφέρει το $f(x)$ από το $T_n(x)$ δίνεται από το ακόλουθο.

Θεωρημα 1.6. *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ μια $(n+1)$-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση, όπου $n \geq 0$ ακέραιος και I διάστημα του $\mathbb{R}$. Έστω $x_0 \in I$ και έστω T_n το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο το x_0. Τότε για κάθε $x \in I$ με $x \neq x_0$ υπάρχει ένας αριθμός ξ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα x_0 και x τέτοιος ώστε*

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \tag{1.14}$$

Ο τύπος (1.14) καλείται και *Τύπος Taylor*. Ο τύπος Taylor γράφεται και ως εξής

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

και άρα για $n = 0$ είναι το κλασικό Θεώρημα Μέσης Τιμής:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi)$$

(θυμηθείτε ότι έχουμε ορίσει $T_0(x) = f(x_0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$). Για τον λόγο αυτόν το Θεώρημα 1.6 καλείται και ***Θεώρημα Μέσης Τιμής ανώτερης τάξης***.

6. Ασκήσεις

Ασκηση 1.1. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι κάθε κρίσιμο σημείο της f είναι αυστηρό ολικό ελάχιστο της f, δηλαδή $f(x_0) < f(x)$ για κάθε $x \neq x_0$.*

Αποδειξη. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ κρίσιμο σημείο της f και $x \neq x_0$. Έχουμε $f'(x_0) = 0$ (αφού το x_0 είναι κρίσιμο και f παραγωγίσιμη) και άρα το πρώτης τάξης πολυώνυμο Taylor της f με κέντρο το x_0 είναι το σταθερό πολυώνυμο $f(x_0)$, αφού

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0). \tag{1.15}$$

Τώρα, από τον τύπο του Taylor, παίρνουμε

$$f(x) - f(x_0) = f(x) - T_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2 \tag{1.16}$$

για κάποιο ξ μεταξύ των x και x_0.

Επειδή η f'' από υπόθεση είναι θετική και $(x - x_0)^2 > 0$, έπεται ότι

$$\frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2 > 0$$

και άρα από την (1.16), $f(x) - f(x_0) > 0 \Leftrightarrow f(x_0) < f(x)$. □

Ασκηση 1.2. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι κάθε κρίσιμο σημείο της f είναι γνήσιο ολικό μέγιστο της f, δηλαδή $f(x_0) > f(x)$ για κάθε $x \neq x_0$.*

Αποδειξη. Αντίστοιχα όπως η Άσκηση 1.1. □

Ασκηση 1.3. *Έστω $n \geq 1$ και έστω*

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

το πολυώνυμο Taylor τάξης n της $f(x) = e^x$ με κέντρο το $x_0 = 0$ (δείτε Παράδειγμα 1.1 παραπάνω). Δείξτε ότι

$$T_n(x) \leq e^x < T_n(x) + \frac{e}{(n+1)!} \tag{1.17}$$

για κάθε $x \in [0,1]$.

Απόδειξη. Έστω $n \geq 1$ ακέραιος και $x \in [0,1]$. Αν $x = 0$ έχουμε $T_n(0) = e^0 (= 1)$ και άρα η (1.17) ισχύει τετριμμένα. Υποθέτουμε για την συνέχεια ότι $x \in (0,1]$. Από το Θεώρημα Taylor υπάρχει $\xi \in (0,x)$ τέτοιο ώστε

$$e^x = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = T_n(x) + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{1.18}$$

Επειδή η $f(x) = e^x > 0$ και $0 < x \leq 1$ έχουμε ότι $\dfrac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} > 0$ και άρα από την (1.18) προκύπτει ότι

$$T_n(x) < e^x \tag{1.19}$$

Από την άλλη μεριά η $f(x) = e^x$ είναι γνησίως αύξουσα και επειδή $0 \leq x \leq 1$ έχουμε ότι

$$\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} < \frac{e}{(n+1)!}$$

και άρα από την (1.18) παίρνουμε ότι

$$e^x < T_n(x) + \frac{e}{(n+1)!}. \tag{1.20}$$

Από τις (1.19) και (1.20) προκύπτει τώρα άμεσα η (1.17). □

Παρατηρηση 1.1. Απο την ανισότητα (1.17) για $n = 9$ και $x = 1$ μπορούμε με πράξεις να συμπεράνουμε ότι

$$2,718281 < e < 2,718282 \tag{1.21}$$

Ασκηση 1.4. *Έστω $n \geq 1$ και έστω*

$$T_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

το πολυώνυμο Taylor τάξης $2n$ της $f(x) = \cos x$ με κέντρο $x_0 = 0$ (δείτε Παράδειγμα 1.2 παραπάνω). Δείξτε ότι

$$|\cos x - T_{2n}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{1.22}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Έστω $n \geq 1$ και έστω $x \in \mathbb{R}$. Επειδή $T_{2n}(0) = \cos 0$ η (1.22) τετριμμένα ισχύει για $x = 0$, οπότε υποθέτουμε για τα επόμενα ότι $x \neq 0$. Απο το Πόρισμα **;;** έχουμε ότι υπάρχει ξ μεταξύ των x και $x_0 = 0$ τέτοιο ώστε

$$\cos x = T_{2n}(x) + \frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}x^{2n+1} \tag{1.23}$$

και άρα

$$|\cos x - T_{2n}(x)| = \left|\frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right| = \frac{\left|f^{(2n+1)}(\xi)\right|}{(2n+1)!}|x|^{2n+1} \tag{1.24}$$

Επειδή η παράγωγος της $f(x) = \cos x$ οποιασδήποτε τάξης είναι μία απο τις συναρτήσεις $\pm\cos x$, $\pm\sin x$, έπεται ότι

$$\left|f^{(2n+1)}(\xi)\right| \leq 1 \tag{1.25}$$

Από τις (1.24) και (1.25) έπεται άμεσα η (1.22). □

Άσκηση 1.5. *Έστω $n \geq 1$ και έστω*

$$T_{2n+1}(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

το πολυώνυμο Taylor τάξης $2n+1$ της $f(x) = \sin x$ με κέντρο το $x_0 = 0$. Δείξτε ότι

$$|\sin x - T_{2n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \tag{1.26}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Αντίστοιχα όπως η Άσκηση 1.4. □

Άσκηση 1.6. *(α) Έστω $c \in \mathbb{R}$. Δώστε τον τύπο του πολυωνύμου Taylor τάξης n της συνάρτησης $f(x) = e^{cx}$ με κέντρο το $x_0 = 0$.*

(β) Δώστε τον τύπο του πολυωνύμου Taylor τάξης n της συνάρτησης $f(x) = e^{-x}$ με κέντρο το $x_0 = 0$.

Απόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι $f'(x) = ce^x$, $f''(x) = c^2e^x$ και γενικά $f^{(n)}(x) = c^ne^x$ για κάθε $n \geq 0$. Άρα $f^{(n)}(x) = c^n$, οπότε το πολυώνυμο Taylor τάξης n της συνάρτησης $f(x) = e^{cx}$ με κέντρο το $x_0 = 0$, δίνεται από τον τύπο

$$T_n(x) = 1 + \frac{c}{1!}x + \frac{c^2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{c^n}{n!}x^n$$

(β) Από το (α) για $c = -1$ έχουμε

$$T_n(x) = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^nx^n}{n!}$$

□

Άσκηση 1.7. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έστω $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ και έστω ότι $|f''(x)| \leq 2$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $|f(x) - x| \leq x^2$, για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Έστω $T_1(x)$ το πολυώνυμο Taylor της f τάξης $n = 1$ με κέντρο το $x_0 = 0$. Τότε

$$T_1(x) = f(0) + f'(0)x = x$$

Από τον τύπο Taylor για $n = 1$ έχουμε ότι για κάθε $x \neq x_0$ υπάρχει ξ μεταξύ των x και x_0 τέτοιο ώστε $f(x) - T_1(x) = \dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2$ και άρα

$$|f(x) - x| = \left|\frac{f''(\xi)}{2!}x^2\right| = \frac{|f''(\xi)|}{2}x^2 \leq x^2$$

□

Άσκηση 1.8. *Έστω* $n \geq 1$ *και* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *άπειρες φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έστω* $T_{n,f}(x)$ *και αντίστοιχα* $T_{n,f'}(x)$ *τα πολυώνυμα Taylor τάξης* n *της* f *και αντίστοιχα της* f' *με κέντρο το* x_0. *Δείξτε ότι το*

$$T'_{n,f}(x) = T_{n-1,f'}(x)$$

για κάθε $n \geq 1$.

Απόδειξη. Με Μαυηματική Επαγωγή. Καταρχήν, η πρόταση ισχύει για $n = 1$:

$$T'_{1,f}(x) = (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))' = f'(x_0) = T_{0,f'}(x)$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $T'_{n,f}(x) = T_{n-1,f'}(x)$ για κάποιο $n \geq 1$ και δείχνουμε ότι αυτό συνεπάγεται ότι $T'_{n+1,f}(x) = T_{n,f'}(x)$. Πράγματι, επειδή

$$T_{n+1,f}(x) = T_{n,f}(x) + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
T'_{n+1,f}(x) &= \left(T_{n,f}(x) + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\right)' \\
&= (T_{n,f}(x))' + \left(\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\right)' \\
&= T_{n-1,f'}(x) + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(n+1)(x - x_0)^{n} \\
&= T_{n-1,f'}(x) + \frac{(f')^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^{n} = T_{n,f'}(x)
\end{aligned}$$

□

Κεφάλαιο 2

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

1. Βασικοί ορισμοί

Κάθε συνάρτηση $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *με πεδίο ορισμού το* $\mathbb{N}$ *και τιμές στο* $\mathbb{R}$ *θα καλείται ακολουθία πραγματικών αριθμών.* Αν $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ μια ακολουθία τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η τιμή της συνάρτησης a στο n θα συμβολίζεται με a_n αντί για $a(n)$, δηλαδή η μεταβλητή n μετατρέπεται σε δείκτη. Έτσι γράφουμε a_1 αντί για $a(1)$, a_2 αντί για $a(2)$ και γενικά a_n αντί για $a(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ο a_1 καλείται ο *πρώτος όρος*, ο a_2 *δεύτερος όρος* κ.ο.κ. Γενικά, ο a_n καλείται ο *n-οστός* (ή *γενικός*) όρος της ακολουθίας. Τον δείκτη n στον όρο a_n θα τον καλούμε πολλές φορές και *τάξη* του όρου. Δηλαδή το 1 είναι η τάξη του a_1, το 2 είναι η τάξη του a_2 κ.ο.κ. Μια ακολουθία $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ θα την συμβολίζουμε συνήθως με

$$(a_n) \quad \text{ή και με} \quad (a_1, a_2, a_3, \dots)$$

Πολλές φορές μια ακολουθία δίνεται απο ένα συγκεκριμένο τύπο πχ. λέμε η ακολουθία $a_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ και εννούμε την ακολουθία $(1, 1/2, 1/3, \dots)$, η λέμε η *σταθερή* ακολουθία $a_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$ και εννοούμε την ακολουθία $(1, 1, 1, \dots)$.

Άλλες φορές η ακολουθία δίνεται με *αναδρομικό* τύπο, δηλαδή μας δίνουν τον πρώτο ή και άλλους αν χρειάζεται όρους της ακολουθίας και ύστερα ένα τύπο που μας λέει πώς προκύπτει ο n-οστός όρος απο τους προηγούμενούς του. Χαρακτηριστικό παράδειγμα εδώ είναι η *ακολουθία Fibonacci* $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$ που είναι η ακολουθία με πρώτο και δεύτερο όρο το 1 όπου για κάθε $n \geq 3$ ο n-οστός όρος υπολογίζεται απο τον τύπο $a_n = a_{n-1} + a_{n-1}$.

Τέλος ορίζονται και ακολουθίες για τις οποίες δεν μπορούμε να βρούμε ούτε κλειστό ούτε αναδρομικό τύπο. Πχ. η ακολουθία (a_n) όπου ο a_n είναι το n-οστό δεκαδικό ψηφίο του αριθμού π.

2. Σύγκλιση-Όριο ακολουθίας

Ορισμος 2.1. *Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και $a \in \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η (a_n)* ***συγκλίνει στο*** *a ή ότι το* ***όριο*** *της είναι ο a και θα γράφουμε*

$$a_n \to a \quad \text{ή} \quad \lim a_n = a$$

αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - a| < \epsilon$ για όλα τα $n \geq n_0$.

Αν $a \in \mathbb{R}$ και $\epsilon > 0$ το ανοικτό διάστημα $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ καλείται *ϵ-περιοχή* του a ή απλά περιοχή του a. Το ϵ καλείται *ακτίνα* της περιοχής. Επειδή

$$x \in (a - \epsilon, a + \epsilon) \Leftrightarrow |x - a| < \epsilon$$

έχουμε ότι η περιοχή $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ αποτελείται από όλα εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ που απέχουν από το a απόσταση μικρότερη του ϵ (το απόλυτο της διαφοράς δύο αριθμών εκφράζει την απόσταση των αριθμών αυτών).

Με την παραπάνω ορολογία ο Ορισμός 2.1 λέει ότι μια ακολουθία συγκλίνει στο $a \in \mathbb{R}$ αν *οποιαδήποτε* περιοχή του a περιέχει *τελικά όλους* (δηλαδή από κάποια τάξη και μετά) τους όρους της ακολουθίας.

Παραδειγμα 2.1. Αν $a_n = c$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $a_n \to c$.

Αποδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε για κάθε $n \geq 1$ (δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $|a_n - c| < \epsilon$ (αφού $|a_n - c| = 0$). Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να θέσουμε $n_0 = 1$. (Εδώ το n_0 δεν εξαρτάται από το ϵ). □

Παραδειγμα 2.2. $\dfrac{1}{n} \to 0$.

Αποδειξη. Έστω $a_n = 1/n$. Έστω $\epsilon > 0$ και έστω $n_0 > 1/\epsilon$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \epsilon$$

Άρα $a_n \to 0$. □

Ορισμος 2.2. *Μια ακολουθία (a_n) θα καλείται* ***συγκλίνουσα*** *αν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.*

Προταση 2.3. *Το όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας είναι μοναδικό.*

Αποδειξη. Έστω ότι μια ακολουθία (a_n) είχε δύο όρια $a \neq a'$. Ας πούμε ότι $a < a'$. Επιλέγοντας κατάλληλα μικρό $\epsilon > 0$ (πχ. $\epsilon = \dfrac{a'-a}{10}$) έχουμε ότι οι περιοχές

$$(a-\epsilon, a+\epsilon) \quad \text{και} \quad (a'-\epsilon, a'+\epsilon)$$

των a και a' είναι ξένες μεταξύ τους, δηλαδή δεν έχουν κοινά σημεία. Τώρα, αφού $a_n \to a$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$a_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)\ \forall n \geq n_0$$

και ομοίως, αφού $a_n \to a'$, υπάρχει $n_0' \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$a_n \in (a'-\epsilon, a'+\epsilon)\ \forall n \geq n_0'$$

Αλλά τότε για $n = \max\{n_0, n_0'\}$ θα είχαμε ότι ο a_n θα περιεχόταν και στις δύο περιοχές, πράγμα αδύνατον αφού τις έχουμε επιλέξει έτσι ώστε να είναι ξένες. □

Το να είναι μια ακολουθία συγκλίνουσα είναι μια σημαντική ιδιότητα της ακολουθίας. Όπως δείχνει και το επόμενο παράδειγμα δεν είναι όλες οι ακολουθίες συγκλίνουσες.

Παραδειγμα 2.3. Η ακολουθία $a_n = (-1)^n$ δεν είναι συγκλίνουσα.

Απόδειξη. Πράγματι, αν υπήρχε $a \in \mathbb{R}$ με $a_n \to a$ τότε (απο τον ορισμό της σύγκλισης) για $\epsilon = 1/2$ θα μπορούσαμε να βρούμε ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - a| < 1/2$ για όλα τα $n \geq n_0$. Ειδικότερα

$$|a_{n_0} - a| < \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad |a_{n_0+1} - a| < \frac{1}{2}$$

Αλλά τότε από την τριγωνική ανισότητα, θα είχαμε

$$|a_{n_0+1} - a_{n_0}| \leq |a_{n_0+1} - a| + |a - a_{n_0}| < 1 \tag{2.1}$$

Όμως αν ο n_0 ήταν άρτιος τότε $a_{n_0} = 1$ και $a_{n_0+1} = -1$ ενώ αν ο n_0 ήταν περιττός τότε $a_{n_0} = -1$ και $a_{n_0+1} = 1$. Άρα, πάντα ισχύει ότι

$$|a_{n_0+1} - a_{n_0}| = 2$$

πού έρχεται σε αντίφαση με την (2.1) □

Το παραπάνω παράδειγμα ουσιαστικά στηρίζεται στην εξής παρατήρηση: Αν μια ακολουθία είναι συγκλίνουσα τότε οι όροι της όσο μεγαλώνει η τάξη τους έρχονται ολοένα και κοντά στο όριο της ακολουθίας και κατά συνέπεια θα πρέπει να έρχονται ολοένα πιο κοντά και μεταξύ τους.

3. Απόκλιση ακολουθίας στο $\pm\infty$

Ορισμος 2.4. *Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θα λέμε ότι η (a_n)* ***αποκλίνει στο*** *$+\infty$ ή ότι* ***το όριο της είναι το*** *$+\infty$ και θα γράφουμε*

$$a_n \to +\infty \quad \text{ή} \quad \lim a_n = +\infty$$

αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n > M$ για όλα τα $n \geq n_0$.

Αντίστοιχα έχουμε και τον ορισμό της σύγκλισης στο $-\infty$:

Ορισμος 2.5. *Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θα λέμε ότι η (a_n)* ***αποκλίνει στο*** *$-\infty$ ή ότι* ***το όριο της είναι το*** *$-\infty$ και θα γράφουμε*

$$a_n \to -\infty \quad \text{ή} \quad \lim a_n = -\infty$$

αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n < -M$ για όλα τα $n \geq n_0$.

Παραδειγμα 2.4. Η ακολουθία $a_n = n$ αποκλίνει στο $+\infty$.

Απόδειξη. Πράγματι, έστω $M > 0$. Αν $M \in \mathbb{N}$ θέτουμε $n_0 = M + 1$. Γενικά, ότι και να είναι ο M (φυσικός ή όχι) επιλέγουμε ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ με

$$n_0 > M$$

(πχ. $n_0 = [M] + 1$, όπου $[M]$ το ακέραιο μέρος του M) Τότε

$$n \geq n_0 \Rightarrow a_n = n \geq n_0 > M$$

δηλαδή $a_n > M$ για όλα τα $n \geq n_0$. Άρα για οποιοδήποτε $M \in \mathbb{R}$ βρήκαμε ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n > M$ για όλα τα $n \geq n_0$ και συνεπώς $a_n \to +\infty$. □

4. Φραγμένες ακολουθίες

Ορισμος 2.6. *Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών.*

(1) Η (a_n) λέγεται ***άνω φραγμένη*** *αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $a_n \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Κάθε αριθμός $M \in \mathbb{R}$ με αυτή την ιδιότητα θα καλείται* ***άνω φράγμα*** *της (a_n).*

(2) Η (a_n) λέγεται ***κάτω φραγμένη*** *αν υπάρχει $m \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $m \leq a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε αριθμός m με αυτή την ιδιότητα θα καλείται* ***κάτω φράγμα*** *της (a_n).*

(3) Η (a_n) θα λέγεται ***φραγμένη*** *αν είναι και άνω και κάτω φραγμένη.*

Παραδειγματα 2.1. (1) Η ακολουθία (a_n) με $a_n = n$ είναι κάτω φραγμένη, αφού ο $m = 0$ είναι ένα κάτω φράγμα της. Η (a_n) όμως δεν είναι άνω φραγμένη. Πράγματι, για κάθε $M \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $M < n = a_n$.

(2) Η ακολουθία $a_n = 1/n$ είναι φραγμένη. Πχ. ο $m = 0$ είναι ένα κάτω φράγμα της και ο $M = 1$ είναι ένα άνω φράγμα της.

Προταση 2.7. *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.*

Αποδειξη. Έστω $a_n \to a$. Για $\epsilon = 1$ υπάρχει n_0 με $|a_n - a| < 1 \Leftrightarrow a_n \in (a-1, a+1)$ για όλα τα $n \geq n_0$. Θέτουμε $m = \min\{a_1, \ldots, a_{n_0-1}, a-1\}$ και $M = \max\{a_1, \ldots, a_{n_0-1}, a+1\}$ (αν $n_0 = 1$ θέτουμε $m = a-1$ και $M = a+1$). Είναι εύκολο τώρα να δούμε ότι $m \leq a_n \leq M$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. □

Παρατηρηση 2.1. Το αντίστροφο της Πρότασης 2.7 δεν ισχύει, δηλαδή δεν είναι κάθε φραγμένη ακολουθία συγκλίνουσα. Πχ. η ακολουθία $a_n = (-1)^n$ είναι προφανώς φραγμένη αλλά όπως είδαμε (Παράδειγμα 2.3)δεν είναι συγκλίνουσα

5. Μονότονες ακολουθίες

Μια σημαντική κλάση ακολουθιών είναι οι μονότονες ακολουθίες.

Ορισμος 2.8. *Μια ακολουθία (a_n) θα λέγεται* ***αύξουσα*** *αν $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$ ισοδύναμα $a_n \leq a_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ειδικότερα θα καλείται* ***γνησίως αύξουσα*** *αν $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ (ισοδύναμα $a_n < a_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$). Αντίστοιχα, η (a_n) θα λέγεται* ***φθίνουσα*** *αν $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$ (ισοδύναμα $a_{n+1} \leq a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$) και* ***γνησίως φθίνουσα*** *αν $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$ (ή $a_{n+1} < a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$). Αν μια ακολουθία είναι αύξουσα ή φθίνουσα τότε καλείται* ***μονότονη****. Ειδικότερα αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα τότε καλείται* ***γνησίως μονότονη****.*

Παραδειγματα 2.2. Η $a_n = 1/n$ είναι γνησίως φθίνουσα, η $a_n = n$ είναι γνησίως αύξουσα.

Αποδεικνύεται η εξής πρόταση.

Προταση 2.9. *Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα.*

Παρατηρηση 2.2. Είναι εύκολο να δούμε ότι αν ένας αριθμός είναι άνω φράγμα μιας ακολουθίας (a_n) τότε και κάθε μεγαλύτερός του είναι πάλι άνω φράγμα της (a_n).

Αντίστοιχα, αν ένας αριθμός είναι κάτω φράγμα της (a_n) τότε και κάθε μικρότερός του είναι πάλι κάτω φράγμα της (a_n). Άρα για μια άνω φραγμένη ακολουθία έχει νόημα να ψάξουμε για το το μικρότερο άνω φράγμα της και αντίστοιχα για μια κάτω φραγμένη για το μεγαλύτερο κάτω φράγμα της. Αποδεικνύεται ότι κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει στο μικρότερο άνω φράγμα της και αντίστοιχα, κάθε φθίνουσα και κάτω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει στο μεγαλύτερο κάτω φράγμα της.

Πχ. η ακολουθία $a_n = \dfrac{1}{n}$ είναι γνησίως φθίνουσα και συγκλίνει στο 0 που είναι το μεγαλύτερο κάτω φράγμα της ενώ η $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ είναι γνησίως αύξουσα και συγκλίνει στο 1 που είναι το μικρότερο άνω φράγμα της.

Πρόταση 2.10. *Αν μία ακολουθία (a_n) είναι αύξουσα και όχι άνω φραγμένη τότε αποκλίνει στο $+\infty$. Αντίστοιχα, αν μία ακολουθία είναι φθίνουσα και όχι κάτω φραγμένη τότε αποκλίνει στο $-\infty$.*

Απόδειξη. Έστω (a_n) αύξουσα και όχι άνω φραγμένη. Έστω επίσης $M > 0$. Αφού η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, το M δεν είναι άνω φράγμα της (a_n) και άρα θα υπάρχει ένας όρος έστω a_{n_0} της (a_n) που θα είναι γνήσια μεγαλύτερος του M. Έχουμε λοιπόν

$$a_{n_0} > M \tag{2.2}$$

Απο την άλλη μεριά αφού η (a_n) είναι αύξουσα έπεται ότι για κάθε $n \geq n_0$ θα έχουμε

$$a_n \geq a_{n_0} \tag{2.3}$$

Από τις (2.2) και (2.3) παίρνουμε ότι $a_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$. Δείξαμε συνεπώς ότι για κάθε $M \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n > M$ για όλα τα $n \geq n_0$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $a_n \to +\infty$.

Παρόμοια αποδεικνύεται ότι αν η ακολουθία είναι φθίνουσα και όχι κάτω φραγμένη τότε αποκλίνει στο $-\infty$. □

Από τις Προτάσεις 2.9 και 2.10 έπεται το εξής.

Πόρισμα 2.11. *Κάθε μονότονη ακολουθία έχει όριο.*

Με χρήση μονότονων ακολουθιών ορίζεται ο αριθμός e. Συγκεκριμένα, θεωρούμε την ακολουθία (a_n) με τύπο

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ισχύει η εξής πρόταση.

Πρόταση 2.12. *Η ακολουθία $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη.*

Από την Πρόταση 2.12 και το Θεώρημα 2.9 έχουμε ότι η ακολουθία $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ συγκλίνει. Το όριό της καλείται ***αριθμός Euler*** και συμβολίζεται με e, δηλαδή

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{2.4}$$

6. Όρια και πράξεις

Πρόταση 2.13. *Έστω $a_n \to a$ και $b_n \to b$ με $a, b \in \mathbb{R}$.*

(1) *Για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda a_n + \mu b_n \to \lambda a + \mu b$.*
(2) *$a_n b_n \to ab$. Ειδικότερα, $a_n^k \to a^k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.*
(3) *Αν $b_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $b \neq 0$ τότε $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$. Ειδικότερα, $\dfrac{1}{b_n} \to \dfrac{1}{b}$.*

Επίσης αποδεικνύεται και η εξής.

Πρόταση 2.14. *Έστω $a_n \geq 0$ και $a_n \to a$, $a \in \mathbb{R}$. Τότε $a \geq 0$ και $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.*

7. Όρια και διάταξη

Πρόταση 2.15. *Έστω $a_n \to a$, $a \in \mathbb{R}$. Αν $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $a \geq 0$. Αντίστοιχα αν $a_n \leq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $a \leq 0$.*

Θεώρημα 2.16. *(Θεώρημα των Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών) Έστω (a_n), (b_n) και (c_n) τρείς ακολουθίες τέτοιες ώστε*

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (ή γενικότερα για κάθε $n \geq m_0$ όπου m_0 ένας φυσικός αριθμός). Αν $\lim a_n = \lim c_n = \ell \in \mathbb{R}$ τότε και $\lim b_n = \ell$.

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Αφού $a_n \to \ell$ υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|a_n - \ell| < \epsilon \Rightarrow \ell - \epsilon < a_n \text{ για κάθε } n \geq n_1 \tag{2.5}$$

Ομοίως, αφού $c_n \to a$ υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|c_n - \ell| < \epsilon \Rightarrow c_n < \ell + \epsilon \text{ για κάθε } n \geq n_2 \tag{2.6}$$

Θέτουμε $n_0 = \max(n_1, n_2, m_0)$ και έστω $n \geq n_0$. Τότε $n \geq n_1, n_2, m_0$ και άρα

$$\ell - \epsilon < a_n < b_n < c_n < \ell + \epsilon \Rightarrow \ell - \epsilon < b_n < \ell + \epsilon \Rightarrow |b_n - \ell| < \epsilon$$

Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|b_n - \ell| < \epsilon$. Συνεπώς, $b_n \to \ell$. □

8. Δύο χρήσιμες ανισότητες

Πρόταση 2.17. *(**Ανισότητα Bernoulli**) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $a > -1$ ισχύει ότι*

$$(1 + a)^n \geq 1 + na \tag{2.7}$$

Ειδικότερα, για κάθε $n \geq 2$ και για κάθε $a > -1$ με $a \neq 0$ ισχύει η γνήσια ανισότητα

$$(1 + a)^n > 1 + na \tag{2.8}$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε μόνο την (2.8) (Η (2.7) προκύπτει εύκολα από την (2.8)). Η απόδειξη της (2.8) θα γίνει με *Μαθηματική Επαγωγή*:

(α) Για $n = 2$ έχουμε $(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2 > 1 + 2a$ (αφού $a^2 > 0$). Άρα η (2.8) ισχύει για $n = 2$.

(β) Δείχνουμε ότι

$$(1+a)^n > 1+na \Rightarrow (1+a)^{n+1} > 1+(n+1)a$$

Πράγματι, επειδή $1+a>0$,

$(1+a)^n > 1+na \Rightarrow (1+a)^n(1+a) > (1+na)(1+a)$

$$(1+a)^{n+1} > 1+a+na+a^2 = 1+(n+1)a+a^2 > 1+(n+1)a$$

Άρα η (2.8) ισχύει για κάθε $n \geq 2$. $\square$

Πορισμα 2.18. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $x>0$ ισχύευι ότι*

$$x^n \geq 1+n(x-1) \tag{2.9}$$

Αποδειξη. Επειδή $x = 1+(1-x)$, θέτοντας $a = 1-x$ στην (2.7) παίρνουμε την (2.9). $\square$

Ορισμος 2.19. *Έστω $a_1, \dots, a_n$ μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί. Ο αριθμός*

$$A_n = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$$

καλείται ***αριθμητικός μέσος*** *των $a_1, \dots, a_n$ και ο αριθμός*

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$$

καλείται ***γεωμετρικός μέσος*** *των $a_1, \dots, a_n$.*

Προταση 2.20. *(**Ανισότητα Γεωμετρικού-Αριθμητικού Μέσου**) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $a_1, \dots, a_n \geq 0$ ισχύει ότι*

$$G_n \leq A_n \tag{2.10}$$

Ισοδύναμα,

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \tag{2.11}$$

ή

$$a_1 \cdot \dots \cdot a_n \leq \left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^n \tag{2.12}$$

Αποδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι

$$A_n^n \geq A_{n-1}^{n-1} a_n \tag{2.13}$$

για κάθε $n \geq 2$ και κάθε $a_1, \dots, a_n \geq 0$. Αν η (2.13) είναι αληθής τότε

$$A_n^n \geq A_{n-1}^{n-1} a_n \geq \left(A_{n-2}^{n-2} a_{n-1}\right) a_n \geq \cdots \geq A_1 a_2 \dots a_n = a_1 a_2 \dots a_n$$

και άρα η (2.12) ισχύει.

Περνάμε στην απόδειξη της (2.13) Έστω $n \geq 2$ και $a_1, \dots, a_n \geq 0$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n \geq 2$ και $a_n > 0$ (αν $a_n = 0$ ή (2.13) είναι προφανής). Έχουμε

$$\begin{aligned} A_n^n = A_{n-1}^n \left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^n &\overset{(2.9)}{\geq} A_{n-1}^n \left(1+n\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}-1\right)\right) \\ &= A_{n-1}^n \frac{A_{n-1}+nA_n-nA_{n-1}}{A_{n-1}} \\ &= A_{n-1}^n \frac{nA_n-(n-1)A_{n-1}}{A_{n-1}} = A_{n-1}^{n-1} a_n \end{aligned}$$

διότι $nA_n = a_1 + \cdots + a_n$ και $(n-1)A_{n-1} = a_1 + \cdots + a_{n-1}$. $\square$

9. Βασικά όρια

Πρόταση 2.21. (1) *Έστω* $0 < \lambda < 1$. *Τότε* $\lambda^n \to 0$.

(2) *Έστω* $a > 0$. *Τότε* $\sqrt[n]{a} \to 1$.

(3) $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Απόδειξη. (1) Από την (2.9) για $x = \dfrac{1}{\lambda}$ παίρνουμε

$$\frac{1}{\lambda^n} \geq 1 + n\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) > n\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) \tag{2.14}$$

Θέτοντας $\mu = \dfrac{1}{\lambda} - 1$ έχουμε ότι $\mu > 0$ και από την (2.14), έχουμε

$$0 < \lambda^n < \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{n} \tag{2.15}$$

Από την (2.15) και το Θεώρημα των Ισοσυγκλινουσών παίρνουμε ότι $\lambda^n \to 0$.

(2) Από την Ανισότητα Γεωμετρικού-Αριθμητικού μέσου, έχουμε

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a} &= \sqrt[n]{a \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1}_{(n-1)-\text{φορές}}} \\ &\overset{(2.11)}{\leq} \frac{a + (n-1)}{n} \\ &= \frac{a}{n} + 1 - \frac{1}{n} < 1 + \frac{a}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Άρα, αν $a \geq 1$ τότε

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq 1 + \frac{a}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτοντας $a_n = 1$, $b_n = \sqrt[n]{a}$ και $c_n = 1 + \dfrac{a}{n}$, έχουμε $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 1$ και άρα, από το Θεώρημα των Ισοσυγκλινουσών (Θεώρημα 2.16) έχουμε $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Αν τώρα $0 < a < 1$ θέτουμε $\beta = 1/a$. Τότε $\beta > 1$ και άρα, από την περίπτωση που μόλις πριν αποδείξαμε, $\sqrt[n]{\beta} \to 1$. Άρα,

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\beta}} \to \frac{1}{1} = 1$$

(3) Από την Ανισότητα Γεωμετρικού-Αριθμητικού μέσου, έχουμε

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{n} &= \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1}_{(n-2)-\text{φορές}}} \\ &\overset{(2.11)}{\leq} \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n} + (n-2)}{n} \\ &= \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 - \frac{2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Επειδή $\sqrt[n]{n} \geq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από τα παραπάνω έχουμε

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \tag{2.16}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτοντας $a_n = 1$, $b_n = \sqrt[n]{n}$ και $c_n = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}$, έχουμε $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 1$ και άρα, από το Θεώρημα των Ισοσυγκλινουσών (Θεώρημα 2.16) έχουμε $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. □

10. Ασκήσεις

Άσκηση 2.1. *Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι αληθείς και ποιές είναι ψευδείς δικαιολογώντας την απάντησή σας.*

(1) *Αν η (a_n) είναι φραγμένη τότε είναι και συγκλίνουσα.*
(2) *Αν η (a_n^2) συγκλίνει τότε και η (a_n) συγκλίνει.*
(3) *Αν η (a_n^3) συγκλίνει τότε και η (a_n) συγκλίνει.*
(4) *Αν η (a_n) είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών τότε η (a_n) συγκλίνει.*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

(1) ΛΑΘΟΣ, πχ. η $a_n = (-1)^n$ είναι φραγμένη αλλά όχι συγκλίνουσα.
(2) ΛΑΘΟΣ, πχ. αν $a_n = (-1)^n$ τότε η (a_n^2) είναι η σταθερή ακολουθία $a_n^2 = 1$ που συγκλίνει στο 1 ενώ η (a_n) δεν συγκλίνει.
(3) ΣΩΣΤΟ, $a_n^3 \to a \Rightarrow \sqrt[3]{a_n^3} \to \sqrt[3]{a} \Rightarrow a_n \to \sqrt[3]{a}$.
(4) ΣΩΣΤΟ, η (a_n) είναι μονότονη και φραγμένη (άνω φραγμένη από τον πρώτο της όρο και κάτω φραγμένη από το μηδέν).

Άσκηση 2.2. *Έστω $a_n \to a$, $a \in \mathbb{R}$. Αν (a'_n) ακολουθία που διαφέρει από την (a_n) σε πεπερασμένο πλήθος όρων δείξτε ότι $a'_n \to a$.*

Απόδειξη. Αφού η (a'_n) διαφέρει από την (a_n) σε πεπερασμένο πλήθος όρων υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$a_n = a'_n \text{ για κάθε } n \geq n_1 \tag{2.17}$$

Έστω τώρα $\epsilon > 0$. Επειδή $a_n \to a$ υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$|a_n - a| < \epsilon \text{ για κάθε } n \geq n_2 \tag{2.18}$$

Θέτουμε $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $n \geq n_1$ και $n \geq n_2$ και άρα ισχυει και η (3.2) και η (6.1). Άρα για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $|a'_n - a| = |a_n - a| < \epsilon$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $|a'_n - a| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$ και άρα $a'_n \to a$. □

Άσκηση 2.3. *(α) Δείξτε ότι $a_n \to a \Leftrightarrow |a_n - a| \to 0$.*
(β) Συμπεράνετε ότι $a_n \to 0 \Leftrightarrow |a_n| \to 0$.
(γ) Δείξτε την συνεπαγωγή $a_n \to a \Rightarrow |a_n| \to |a|$. Ισχύει για $a \neq 0$ η ισοδυναμία;

Απόδειξη. (α) Εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου έχουμε

$$a_n \to a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq n_0 \ \ |a_n - a| < \epsilon \tag{2.19}$$

και αντίστοιχα θέτοντας $b_n = |a_n - a|$,

$$b_n \to 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq n_0 \ \ |b_n - 0| = b_n < \epsilon \tag{2.20}$$

ή ισοδύναμα

$$|a_n - a| \to 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq n_0 \ \ |a_n - a| < \epsilon \tag{2.21}$$

Από (2.19) και (2.21) έχουμε το ζητούμενο.

(β) Προκύπτει από το προηγούμενο ερώτημα για $a = 0$.

(γ) Από την ανισότητα $||x| - |y|| \leq |x - y|$ έχουμε

$$\begin{aligned} a_n \to a &\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq n_0 \ \ |a_n - a| < \epsilon \\ &\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq n_0 \ \ ||a_n| - |a|| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow |a_n| \to |a| \end{aligned}$$

Η αντίστροφη συνεπαγωγή δεν ισχύει, πχ. αν $a_n = (-1)^n$ τότε $|a_n| = 1 \to 1$ αλλά η (a_n) δεν συγκλίνει. □

Άσκηση 2.4. *Βρείτε το όριο (αν υπάρχει) των παρακάτω ακολουθιών:*

(1) $a_n = \dfrac{4n^2 - n + 2}{n^2 + 7n - 3}$.

(2) $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$.

(3) $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$, *όπου* $0 \leq a \leq b \leq c$.

(4) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

(5) $a_n = \left(1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

(6) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$

(7) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

Απόδειξη. (1) Έχουμε

$$\begin{aligned} a_n = \frac{4n^2 - n + 2}{n^2 + 7n - 3} &= \frac{n^2(4 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2})}{n^2(1 + \frac{7}{n} - \frac{3}{n^2})} \\ &= \frac{4 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{7}{n} - \frac{3}{n^2}} \to \frac{4}{1} = 4 \end{aligned}$$

(2) Επειδή

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

από το Θεώρημα Ισοσσυγκλινουσών Ακολουθιών, $\dfrac{\sin n}{n} \to 0$.

(3) Επειδή $0 \le a \le b \le c$, έχουμε ότι

$$c^n \le a^n + b^n + c^n \le c^n + c^n + c^n$$

και άρα

$$c \le \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \le \sqrt[n]{3}c$$

Επειδή $\sqrt[n]{3} \to 1$, από το Θεώρημα Ισοσσυγκλινουσών Ακολουθιών βλέπουμε ότι $\sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \to c$.

(4) Είναι

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\end{aligned}$$

οπότε

$$0 < a_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

και άρα από το Θεώρημα Ισοσσυγκλινουσών Ακολουθιών, έπεται ότι $a_n \to 0$.

(5) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}a_n = \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n &= \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right)^n \\ &= \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^2 \to e^2\end{aligned}$$

αφού $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$.

(6) Έχουμε ότι $1 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα

$$1 < \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} < e$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε παίρνοντας n-οστές ρίζες,

$$1 < \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n < \sqrt[n]{e}$$

Επειδή $\sqrt[n]{a} \to 1$ για κάθε $a > 0$, από το Θεώρημα των Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έπεται ότι $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \to 1$.

(7) Από την Ανισότητα Bernoulli έχουμε

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \ge 1 + n^2\frac{1}{n} = 1 + n$$

και άρα $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \to +\infty$.

□

Άσκηση 2.5. *Έστω (a_n) ακολουθία τέτοια ώστε*

$$\frac{1}{n^2}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n^2} \leq a_n \leq 2n^2\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n^2}.$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $\lim \sqrt[n]{a_n} = e^{-1}$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}\Big[\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n^2}\Big]^{1/n} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n^2}\Big[\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n^2}\Big]^{1/n} \Leftrightarrow\\
&\frac{1}{\big(\sqrt[n]{n}\big)^2}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{2}\big(\sqrt[n]{n}\big)^2\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n} \Leftrightarrow\\
&\frac{1}{\big(\sqrt[n]{n}\big)^2}\Big(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\Big)^{n} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{2}\big(\sqrt[n]{n}\big)^2\Big(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\Big)^{n} \Leftrightarrow\\
&\frac{1}{\big(\sqrt[n]{n}\big)^2}\frac{1}{\big(1+\frac{1}{n}\big)^{n}} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{2}\big(\sqrt[n]{n}\big)^2\frac{1}{\big(1+\frac{1}{n}\big)^{n}}
\end{aligned}$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2} = 1$ και $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\big(1+\frac{1}{n}\big)^n} = e$, έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\big(\sqrt[n]{n}\big)^2}\frac{1}{\big(1+\frac{1}{n}\big)^{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}\big(\sqrt[n]{n}\big)^2\frac{1}{\big(1+\frac{1}{n}\big)^{n}} = 1/e$$

και άρα από το Θεώρημα των Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έπεται ότι $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1/e$. □

Άσκηση 2.6. *Έστω $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\dfrac{x^n}{n!} \to 0$.*

Απόδειξη. Για $x = 0$ είναι προφανές. Έστω $x > 0$ και έστω $n_0 = [x]$, όπου $[x]$ είναι το ακέραιο μέρος του x, δηλαδή ο μοναδικός ακέραιος n_0 με την ιδιότητα

$$n_0 \leq x < n_0 + 1$$

Για κάθε $n \geq n_0 + 1$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{x^n}{n!} &= \left(\frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdots\frac{x}{n_0}\right)\cdot\left(\frac{x}{n_0+1}\cdot\frac{x}{n_0+2}\cdot\cdots\cdot\frac{x}{n}\right)\\
&\leq \left(\frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdots\frac{x}{n_0}\right)\cdot\left(\underbrace{\frac{x}{n_0+1}\cdot\frac{x}{n_0+1}\cdot\cdots\cdot\frac{x}{n_0+1}}_{(n-n_0)-\text{φορές}}\right)\\
&= \frac{x^{n_0}}{n_0!}\cdot\left(\frac{x}{n_0+1}\right)^{n-n_0}\\
&= \frac{(n_0+1)^{n_0}}{n_0!}\cdot\left(\frac{x}{n_0+1}\right)^{n}
\end{aligned}$$

Άρα, θέτοντας

$$c = \frac{(n_0+1)^{n_0}}{n_0!} \quad \text{και} \quad \lambda = \frac{x}{n_0+1} = \frac{x}{[x]+1}$$

έχουμε
$$0 \leq \frac{x^n}{n!} \leq c \cdot \lambda^n$$
για κάθε $n \geq n_0$. Επειδή $0 < \lambda < 1$ (διότι $x < [x] + 1$), έχουμε ότι $\lambda^n \to 0$ και άρα από το Θεώρημα των Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έπεται ότι $\frac{x^n}{n!} \to 0$.

Αν τώρα $x < 0$, θέτοντας $a_n = \frac{x^n}{n!}$ έχουμε ότι $|a_n| = \frac{|x|^n}{n!} \to 0$ και άρα και $a_n \to 0$ (δείτε Άσκηση 2.3). $\square$

Κεφάλαιο 3

ΣΕΙΡΕΣ

Γενικά με τον όρο *σειρά* εννοούμε ένα άπειρο άθροισμα πραγματικών αριθμών,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Τυπικά βέβαια αυτό δεν ορίζεται αφού εξ ορισμού η πράξη της πρόσθεσης είναι μια πράξη που μπορεί να ορισθεί μόνο για πεπερασμένο πλήθος προσθεταίων. Όμως αυτό που εννοούμε εδώ ως άπειρο άθροισμα είναι στην ουσία το όριο

$$\lim_{n\to\infty}(a_1 + \dots + a_n)$$

Για παράδειγμα

$$\begin{aligned} 0,333... &= 0,3 + 0,03 + 0,003 + \dots \\ &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots + \frac{3}{10^n}\right) \end{aligned}$$

Όπως θα δούμε στα επόμενα η ακολουθία

$$s_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \dots + \frac{3}{10^n}$$

συγκλίνει στον αριθμό 1/3. Άρα μπορούμε να πούμε ότι

$$0,3 + 0,03 + 0,003 + \dots = \frac{1}{3}$$

3.1. Βασικές έννοιες και παραδείγματα

Σειρά είναι μια άπειρη παράσταση της μορφής

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

όπου (a_n) είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το άθροισμα

$$s_n = a_1 + \dots + a_n$$

ονομάζεται ***n*-μερικό άθροισμα της σειράς** και η ακολουθία (s_n) που προκύπτει απο αυτά καλείται ***ακολουθία μερικών αθροισμάτων της σειράς***.

Η παραπάνω σειρά γράφεται και με το σύμβολο "$\sum$" του αθροίσματος ως

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

και ομοίως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ γράφεται και το n- μερικό άθροισμα ως

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Ορισμος 3.1. *Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ μια σειρά και $s \in \mathbb{R}$ ή $s = \pm\infty$. Γράφουμε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \quad \text{ή} \quad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = s$$

αν

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

*Ο s καλείται το **όριο** (ή το **άθροισμα**) της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Όπως και στις ακολουθίες μια σειρά θα καλείται ***συγκλίνουσα*** όταν το όριό της είναι πραγματικός αριθμός. Αν μια σειρά δεν είναι συγκλίνουσα τότε θα καλείται ***αποκλίνουσα***. Άρα αποκλίνουσα σημαίνει ότι είτε το όριο της σειράς δεν υπάρχει ή υπάρχει αλλά είναι $\pm\infty$. Στην περίπτωση όπου το όριό της είναι $\pm\infty$, θα λέμε ότι η σειρά ***αποκλίνει*** στο $\pm\infty$.

Παρατηρηση 3.1. Πολλές φορές είναι χρήσιμο η άθροιση σε μια σειρά να ξεκινάει απο το $n = 0$ αντί για το $n = 1$ (αυτό βέβαια σημαίνει ότι η ακολουθία (a_n) ξεκινά με τον a_0). Στην περίπτωση αυτή για τη σειρά γράφουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{ή} \quad a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$$

και τα μερικά αθροίσματα είναι η ακολουθία (s_n) όπου

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

δηλαδή $s_0 = a_0$, $s_1 = a_0 + a_1$, $s_2 = a_0 + a_1 + a_2$, ...

Μερικά βασικά παραδείγματα σειρών είναι τα ακόλουθα:

1) Η ***γεωμετρική σειρά***

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

ή γενικότερα

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = a + ax + ax^2 + ax^3 + \ldots$$

όπου a, x σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Όπως θα δούμε παρακάτω η γεωμετρική σειρά είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν $x \in (-1, 1)$ και στην περίπτωση αυτή το άθροισμα της σειράς δίνεται από τον τύπο

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = \frac{a}{1-x}$$

Πχ. αν $a = 3/10$ και $x = 1/10$ έχουμε την σειρά

$$0,333\dots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

2) Η ***αρμονική σειρά***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

Θα δούμε παρακάτω ότι η αρμονική σειρά αποκλίνει στο $+\infty$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Γενικότερα, ορίζουμε την p-***αρμονική σειρά***,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$$

όπου $p \in \mathbb{R}$. Αποδεικνύεται ότι η p-αρμονική σειρά είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν $p > 1$.

4) Οι ***εναλλάσσουσες σειρές*** δηλαδή σειρές της μορφής

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$$

όπου $a_n > 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Χαρακτηριστικό παράδειγμα εδώ είναι η ***εναλλάσσουσα αρμονική σειρά***

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

Αποδεικνύεται ότι ενώ η αρμονική σειρά αποκλίνει η εναλλάσσουσα αρμονική συγκλίνει και μάλιστα

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \ln 2$$

Επίσης αποδεικνύεται ότι ο αριθμός π γράφεται με τη μορφή της εναλλάσσουσας σειράς ως

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \dots$$

3.2. Συγκλίνουσες σειρές

Η θεωρία των σειρών επικεντρώνεται στην εύρεση κριτηρίων που δείχνουν αν μια σειρά συγκλίνει ή όχι. Στις επόμενες παραγράφους θα αναφέρουμε κάποια κριτήρια σύγκλισης. Πρίν από αυτά έχουμε την επόμενη βασική πρόταση.

Πρόταση 3.2. *Αν μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $a_n \to 0$. Ισοδύναμα, αν η ακολουθία (a_n) δεν συγκλίνει στο 0 τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, $n = 1, 2, \ldots$ η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς. Η υπόθεση ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει σημαίνει εξ ορισμού ότι $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι αυτό συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Πράγματι, έστω $\epsilon > 0$. Έστω $0 < \epsilon' < \epsilon$ (θα το προσδιορίσουμε στην συνέχεια). Αφού $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, υπάρχει $n_0' \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|s_n - s| < \epsilon'$ για κάθε $n \geq n_0'$. Παρατηρούμε ότι

$$a_n = s_n - s_{n-1} \tag{3.1}$$

για κάθε $n \geq 2$ και άρα για κάθε $n \geq n_0' + 1$ έχουμε ότι ισχύει η (3.1) (αφού $n \geq n_0' + 1 \geq 2$) και επιπλέον $|s_n - s|, |s_{n-1} - s| < \epsilon'$ (αφού $n, n-1 > n_0'$). Άρα για κάθε $n \geq n_0' + 1$ έχουμε ότι

$$|a_n| = |s_n - s_{n-1}| = |(s_n - s) + (s - s_{n-1})| \leq |s_n - s| + |s_{n-1} - s| < \epsilon' + \epsilon' = 2\epsilon'$$

Συνεπώς, αν θέσουμε $\epsilon' = \epsilon/2$ και $n_0 = n_0' + 1$, έχουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$, $|a_n - 0| = |a_n| < \epsilon$. Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - 0| < \epsilon$, δηλαδή $a_n \to 0$. $\square$

Παράδειγμα 3.1. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \ldots$ δεν συγκλίνει.

Πράγματι, αν συνέκλινε θα είχαμε ότι η ακολουθία $a_n = (-1)^n$ συγκλίνει στο 0, αλλά όπως είδαμε στο κεφάλαιο των ακολουθιών, η ακολουθία $a_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει σε κανένα $a \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 3.2. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ δεν συγκλίνει. Πράγματι,

$$\lim \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$$

αφού $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \cos 0 = 1$.

Παρατήρηση 3.2. Δεν ισχύει το αντίστροφο της Πρότασης 3.2. Δηλαδή μπορεί $a_n \to 0$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ να μην συγκλίνει. Πχ. $1/n \to 0$ αλλά όπως θα δούμε η αρμονική σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ δεν συγκλίνει.

3.3. Η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Λήμμα 3.3. *Έστω $x \neq 1$. Τότε για κάθε $n \geq 1$*

$$1 + x + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \tag{3.2}$$

Απόδειξη. Με επαγωγή. Για $n = 1$ ισχύει αφού

$$1 + x = \frac{1 - x^2}{1 - x}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι η (3.2) ισχύει για κάποιο $n \geq 1$. Τότε

$$1 + x + \cdots + x^{n+1} = (1 + x + \cdots + x^n) + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}$$

Άρα η ανισότητα ισχύει για $n = 1$ και αν ισχύει για κάποιον φυσικό αριθμό n τότε ισχύει και για τον αμέσως επόμενό του. Από την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής η ανισότητα ισχύει για κάθε $n \geq 1$. $\square$

Πρόταση 3.4. *Η γεωμετρική σειρά* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$ *συγκλίνει μόνο για* $x \in (-1, 1)$ *και στην περίπτωση αυτή*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 3.3 τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ δίνονται από τον τύπο

$$s_n = 1 + x + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} \tag{3.3}$$

Έστω $x \in (-1, 1)$. Τότε $|x| < 1$ και άρα $x^n \to 0$. Οπότε

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{1 - x \cdot \lim_{n\to\infty} x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

και άρα

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-x}$$

Αντίστροφα τώρα αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ συγκλίνει τότε από την Πρόταση 3.2 θα πρέπει $\lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$. Άρα για $\epsilon = 1$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|x^n - 0| = |x|^n < 1$ για κάθε $n \geq 0$. Αυτό όμως δεν μπορεί να συμβαίνει όταν $|x| \geq 1$ αφού τότε $|x|^n \geq 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ συγκλίνει τότε $x \in (-1, 1)$. $\square$

Πόρισμα 3.5. *Αν* $x \in (-1, 1)$ *τότε για κάθε* $a \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = a + ax + ax^2 + \cdots = \frac{a}{1-x}$$

Απόδειξη. Έστω (τ_n) η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} ax^n$. Τότε $\tau_n = a + ax + \cdots + ax^{n+1} = a(1 + x + \cdots + x^n) = as_n$ όπου $s_n = 1 + x + \cdots + x^n$ η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Άρα

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = \lim_{n\to\infty} \tau_n = \lim_{n\to\infty} (as_n) = a \lim_{n\to\infty} s_n = a\frac{1}{1-x} = \frac{a}{1-x}$$

$\square$

3.4. Σειρές με μη αρνητικούς όρους

Είναι εύκολο καταρχάς να δούμε ότι τα μερικά αθροίσματα $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ μιας σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ όπου $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αποτελούν μια αύξουσα ακολουθία αφού

$$s_{n+1} = a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$$

Όπως έχουμε δεί στο Κεφάλαιο των Ακολουθιών, μια αύξουσα ακολουθία είτε συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό είτε αποκλίνει στο $+\infty$. Έχουμε συνεπώς την εξής πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.6. *Μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είτε είναι συγκλίνουσα είτε αποκλίνουσα στο $+\infty$.*

Το πρώτο βασικό κριτήριο σύγκλισης σειρών με μη αρνητικούς όρους είναι το επόμενο.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.7. ***(Κριτήριο Άμεσης Σύγκρισης)*** *Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ σειρές με μη αρνητικούς όρους. Υποθέτουμε ότι*

$$0 \leq a_n \leq b_n \tag{3.4}$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ (ή γενικότερα σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε η (3.4) ισχύει για κάθε $n \geq n_0$). Τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

με την έννοια ότι

(1) *αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$ συγκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ συγκλίνει και $a \leq b$.*
(2) *αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ αποκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$ αποκλίνει.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ και αντίστοιχα $\tau_n = b_1 + \cdots + b_n$ τα μερικά αθροίσματα των σειρών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Επειδή $a_n \leq b_n$ έχουμε $s_n \leq \tau_n$ και άρα $\lim_{n\to\infty} s_n \leq \lim_{n\to\infty} \leq \tau_n \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.3. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ αποκλίνει.

Πράγματι,

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, απο το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ αποκλίνει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.4. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει.

Πράγματι, $0 < \dfrac{1}{n} \cdot \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \leq \dfrac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα επειδή η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.8. ***(Κριτήριο Συμπύκνωσης του Cauchy)*** *Έστω (a_n) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Η απόδειξη του κριτηρίου συμπύκνωσης του Cauchy βασίζεται στην επόμενη ανισότητα:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Πράγματι, επειδή η (a_n) είναι φθίνουσα ακολουθία, ομαδοποιώντας τους όρους με δείκτες στα διαστήματα της μορφής $I_k^+ = [2^k, 2^{k+1})$, $k = 0, 1, \dots$, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + (a_8 + \cdots + a_{15}) + \dots \\ &\leq a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4 + a_4) + (a_8 + \cdots + a_8) + \dots \\ &= a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}\end{aligned}$$

και αντίστοιχα, ομαδοποιώντας τους όρους με δείκτες στα διαστήματα της μορφής $I_k^- = (2^{k-1}, 2^k]$, $k = 0, 1, \dots$, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \dots \\ &\geq a_1 + a_2 + (a_4 + a_4) + (a_8 + a_8 + a_8 + a_8) + \dots \\ &= a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \dots \\ &\geq \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}.\end{aligned}$$

□

Πρόταση 3.9. *Η αρμονική σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *αποκλίνει.*

Απόδειξη. Η ακολουθία $a_n = 1/n$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών όρων και άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το Κριτήριο Συμπύκνωσης του Cauchy. Επειδή

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \cdots = +\infty$$

η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει. □

Πρόταση 3.10. *Αν* $p > 1$ *τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη. Αν $p > 1$ τότε η ακολουθία $a_n = 1/n^p$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών όρων. Έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^n)^{p-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{p-1})^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n$$

Επειδή $0 < \dfrac{1}{2^{p-1}} < 1$ η γεωμετρική σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n$ συγκλίνει και άρα η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ συγκλίνει.

□

Παραδειγμα 3.5. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n}$ αποκλίνει. Πράγματι,

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\frac{1}{2^n\cdot\ln(2^n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$$

Προταση 3.11. ***(Κριτήριο Οριακής Σύγκρισης)*** *Έστω $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ σειρές με $a_n\geq 0$ και $b_n>0$ για όλα τα $n\in\mathbb{N}$. Αν*

$$\lim\frac{a_n}{b_n}=L \quad \mu\epsilon \quad 0<L<+\infty$$

τότε η $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ συγκλίνει.

Παραδειγμα 3.6. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ αποκλίνει.

Πράγματι, $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)>0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και

$$\lim\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Επειδή η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ αποκλίνει, απο το οριακό κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ αποκλίνει.

Παραδειγμα 3.7. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ συγκλίνει.

Πράγματι, $\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)>0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και

$$\lim\frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Επειδή η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, απο το οριακό κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ συγκλίνει.

Παραδειγμα 3.8. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+5n+7}$ αποκλίνει.

Πράγματι,

$$\frac{n+1}{n^2+5n+7} = \frac{n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}\right)} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}}$$

και άρα

$$\lim\frac{\frac{n+1}{n^2+5n+7}}{\frac{1}{n}} = \lim\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}} = 1$$

Επειδή η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ αποκλίνει, απο το οριακό κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+5n+7}$ αποκλίνει.

Το επόμενο κριτήριο (που καλείται και *Κριτήριο Λόγου*) προκύπτει από την σύγκριση μιας σειράς $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ με την γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n$. Στηρίζεται στην εξής απλή παρατήρηση:

Αν $a_n>0$ και $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\to\lambda$ τότε για αρκετά μεγάλα $n\in\mathbb{N}$ θα έχουμε $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\backsimeq\lambda$, που σημαίνει ότι η (a_n) για μεγάλα n, θα μοιάζει με την γεωμετρική πρόοδο με λόγο λ. Επειδή όπως έχουμε δεί η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n$ συγκλίνει αν $|\lambda|<1$ είναι αναμενόμενο ότι στην περίπτωση αυτή και η "παρόμοια" σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ θα πρέπει να συγκλίνει. Αποδεικνύεται ότι όντως αυτό συμβαίνει και πιο συγκεκριμένα ισχύει το εξής:

Πρόταση 3.12. ***(Κριτήριο Λόγου του D' Alembert)*** *Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ με $a_n>0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Έστω επίσης ότι*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda$$

(1) *Αν $\lambda>1$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty$.*
(2) *Αν $\lambda<1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει.*

Παρατήρηση 3.3. Το Κριτήριο Λόγου δεν μπορεί να αποφανθεί αν $\lambda=1$. Πχ. και για τις δύο σειρές $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ και $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ έχουμε

$$\lim\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

και αντίστοιχα

$$\lim\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \left(\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1$$

αλλά, όπως θα δούμε, η πρώτη αποκλίνει ενώ η δεύτερη συγκλίνει.

Παραδειγμα 3.9. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ συγκλίνει. Πράγματι,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{2}{n+1}$$

και άρα

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

Παραδειγμα 3.10. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ συγκλίνει. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} &= \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot (n+1) \\ &= \frac{n^n}{(n+1)^n} \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \end{aligned}$$

και άρα

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

Το επόμενο κριτήριο (που καλείται και *Κριτήριο Ρίζας του Cauchy*) προκύπτει πάλι από την σύγκριση μιας σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με την γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$. Αυτή την φορά εξετάζουμε το $\lim \sqrt[n]{a_n}$. Αν $\sqrt[n]{a_n} \to \lambda$ τότε για αρκετά μεγάλα $n \in \mathbb{N}$ θα έχουμε $\sqrt[n]{a_n} \backsimeq \lambda \Leftrightarrow a_n \backsimeq \lambda^n$, που σημαίνει ότι η (a_n) για μεγάλα n, θα μοιάζει πάλι με την γεωμετρική πρόοδο με λόγο λ.

Προταση 3.13. ***(Το κριτήριο Ρίζας του Cauchy)*** *Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω επίσης ότι*

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lambda$$

1. *Αν $\lambda > 1$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.*
2. *Αν $\lambda < 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.*

Παρατηρηση 3.4. Όπως και το κριτήριο λόγου, το κριτήριο ρίζας δεν μπορεί να αποφανθεί αν $\lambda = 1$. Πχ. και για τις δύο σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ έχουμε έχουμε

$$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{n}} = 1$$

και ομοίως

$$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{n^2}} = \frac{1}{\lim \left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = \frac{1}{\left(\lim \sqrt[n]{n}\right)^2} = 1$$

αλλά η πρώτη αποκλίνει ενώ η δεύτερη συγκλίνει.

Παραδειγμα 3.11. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{5n+4}\right)^n$ συγκλίνει. Πράγματι,

$$\lim \sqrt[n]{\left(\frac{3n}{5n+4}\right)^n} = \lim \frac{3n}{5n+4} = \lim \frac{3}{5+4/n} = 3/5 < 1.$$

Παρατηρηση 3.5. Είναι γνωστό ότι για μια ακολουθία (a_n) θετικών όρων

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$$

Άρα, όπου αποφαίνεται το κριτήριο Λόγου αποφαίνεται και το κριτήριο Ρίζας (με τον ίδιο τρόπο). Υπάρχουν όμως περιπτώσεις όπου δεν υπάρχει το $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, αλλά υπάρχει το $\lim \sqrt[n]{a_n}$ και άρα το Κριτήριο Λόγου δεν μπορεί να εφαρμοστεί ενώ της Ρίζας μπορεί. Πχ. για την σειρά

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\cdots = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\right) = 2$$

το $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ δεν υπάρχει διότι

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = 1 \ \text{ ενώ } \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = 1/2$$

και άρα το κριτήριο Λόγου δεν εφαρμόζεται. Όμως, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1/2 < 1$.

3.5. Εναλλάσσουσες σειρές

Αν $a_n > 0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots$ καλείται *εναλλάσσουσα*.

Προταση 3.14. *(Κριτήριο Leibniz) Έστω (a_n) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών με $a_n \to 0$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots$ συγκλίνει.*

Παραδειγμα 3.12. Η *εναλλάσσουσα αρμονική* σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$$

συγκλίνει, αφού η $(1/n)$ είναι φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών αριθμών.

Παραδειγμα 3.13. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots$ συγκλίνει, αφού η $(1/n!)$ είναι φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών αριθμών.

3.6. Σειρές με γενικούς όρους

Λέμε ότι μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***συγκλίνει απολύτως*** αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ συγκλίνει. Αποδεικνύεται ότι ισχύει η εξής πρόταση.

Προταση 3.15. *Αν μια σειρά συγκλίνει απολύτως τότε συγκλίνει και κανονικά.*

Παρατηρηση 3.6. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Πχ. η εναλλάσσουσα αρμονική συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως.

Με την χρήση της Πρότασης 3.15 το κριτήριο του λόγου και το κριτήριο ρίζας γενικεύονται ως εξής.

Πρόταση 3.16. ***(Γενικό Κριτήριο Λόγου)*** *Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω επίσης ότι*

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$$

1. *Αν $\lambda > 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει (που σημαίνει είτε δεν έχει όριο είτε αποκλίνει στο $\pm\infty$).*
2. *Αν $\lambda < 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.*

Πρόταση 3.17. ***(Γενικό κριτήριο Ρίζας)*** *Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και έστω ότι*

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$$

1. *Αν $\lambda > 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει (που σημαίνει είτε δεν έχει όριο είτε αποκλίνει στο $\pm\infty$).*
2. *Αν $\lambda < 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.*

Παράδειγμα 3.14. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$ συγκλίνει. Πράγματι, έστω $x \in \mathbb{R}$. Αν $x = 0$ τότε η σειρά είναι η $1 + 0 + 0 + 0 + \dots$ και άρα συγκλίνει στο 1. Αν $x \neq 0$ τότε θέτοντας $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$ έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

και άρα από το γενικό κριτήριο λόγου η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ συγκλίνει.

3.7. Ασκήσεις

Άσκηση 3.1. *Δείξτε ότι η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots$$

συγκλίνει στο 1.

Απόδειξη. Επειδή

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

έχουμε

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

Συνεπώς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1$$

□

Άσκηση 3.2. *Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών τέτοια ώστε η ακολουθία $(n^2 a_n)$ είναι άνω φραγμένη. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έχουμε ότι υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $0 < n^2 a_n \leq M \Leftrightarrow a_n \leq \dfrac{M}{n^2}$. Επειδή η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, από το Κριτήριο Άμεσης Σύγκρισης έπεται ότι και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. □

Άσκηση 3.3. *Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} n a_n = 1$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.*

Απόδειξη. Η υπόθεσή μας γράφεται ισοδύναμα

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = 1$$

και άρα, αφού η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, από το Κριτήριο Οριακής Σύγκρισης έπεται ότι και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει. □

Άσκηση 3.4. *Έστω (a_n) ακολουθία με θετικούς όρους. Αν $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Απόδειξη. Επειδή $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, από το Κριτήριο Λόγου η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και συνεπώς (Πρόταση 3.2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. □

Άσκηση 3.5. *Δείξτε ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n+7}$ αποκλίνει.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Κριτήριο Οριακής σύγκρισης με την σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ αφού

$$\frac{\sqrt{n}+1}{n+7} = \frac{\sqrt{n}\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n\left(1+\frac{7}{n}\right)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{7}{n}}$$

και άρα

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}+1}{n+7}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{7}{n}} = 1$$

Επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ αποκλίνει (άμεση σύγκριση με την $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, αφού $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$) από το Κριτήριο οριακής Σύγκρισης έχουμε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{n+7}$ αποκλίνει. $\square$

Άσκηση 3.6. *Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n$.

Απόδειξη. Επειδή $\sqrt[n]{(\sqrt[n]{n}-1)^n} = \sqrt[n]{n}-1 \to 0$, από το Κριτήριο Ρίζας η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n$ συγκλίνει. $\square$

Άσκηση 3.7. *Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{e}-1)$.

Απόδειξη. Έχουμε $\sqrt[n]{e} = e^{\frac{1}{n}}$ και άρα

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{e}-1}{\frac{1}{n}} = \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ αποκλίνει, από το Κριτήριο Οριακής Σύγκρισης έχουμε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{e}-1)$ αποκλίνει. $\square$

Άσκηση 3.8. *Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)$.

Απόδειξη. Η ακολουθία $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ είναι γνησίως αύξουσα και συγκλίνει στον e και $e < 3 \leq n$, για κάθε $n \geq 3$. Άρα

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < n \Rightarrow 1+\frac{1}{n} < \sqrt[n]{n} \Rightarrow \sqrt[n]{n}-1 > \frac{1}{n}$$

για κάθε $n \geq 3$. Από το κριτήριο Άμεσης Σύγκρισης, $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1) \geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty$, και άρα η $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)$ αποκλίνει. $\square$

Άσκηση 3.9. *Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την σειρά* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$.

Απόδειξη. Θέτουμε $a_n = \frac{\ln n}{n^2}$, $n \geq 2$. Η $(a_n)_{n=2}^{\infty}$ είναι θετική και φθίνουσα (γιατί;) και συνεπώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο Συμπύκνωσης του Cauchy. Έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}2^n\frac{\ln 2^n}{(2^n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\ln 2}{2^n}$$

Τώρα, θέτοντας $b_n = \dfrac{n \ln 2}{2^n}$ με εφαρμογή του Κριτηρίου Λόγου, βλέπουμε ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln 2}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ συγκλίνει οπότε το ίδιο ισχύει και για την $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$. □

Άσκηση 3.10. *Έστω μια σειρά* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *με* $a_n > 0$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. *Εξετάστε αν είναι σωστές ή όχι οι παρακάτω προτάσεις:*

(α) Αν $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *τότε η σειρά συγκλίνει.*

(β) Αν $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *τότε η σειρά αποκλίνει.*

Απόδειξη. (α) Η πρόταση είναι λάθος. Η υπόθεση απλά σημαίνει ότι η (a_n) είναι μια γνησίως φθίνουσα ακολουθία, πχ. η αρμονική σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει αλλά η $a_n = 1/n$ είναι γνησίως φθίνουσα.

(β) Η πρόταση είναι σωστή. Πράγματι, η υπόθεση $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ σημαίνει ότι η (a_n) είναι αύξουσα. Ειδικότερα, $a_n \geq a_1 > 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq a_1 + a_1 + a_1 + \cdots = +\infty$. □

Κεφάλαιο 4

ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

Μια παράσταση της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

όπου (a_n) μια δεδομένη ακολουθία πραγματικών αριθμών και $x_0 \in \mathbb{R}$ καλείται *δυναμοσειρά*. Το σημείο x_0 καλείται *κέντρο* της δυναμοσειράς και οι αριθμοί a_n, $n \in \mathbb{N}$ καλούνται *συντελεστές* της δυναμοσειράς. Αν το κέντρο είναι το $x_0 = 0$ η δυναμοσειρά παίρνει την πιο απλή μορφή

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

4.1. Σύγκλιση Δυναμοσειράς

Ένα από τα πρώτα ερωτήματα που αφορούν τις δυναμοσειρές είναι για ποιά $x \in \mathbb{R}$ η δυναμοσειρά συγκλίνει. Παρατηρούμε εύκολα ότι κάθε δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ συγκλίνει για $x = x_0$. Το θέμα είναι αν συγκλίνει και για άλλα $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1. *Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ μια δυναμοσειρά. Τότε μία ακριβώς από τις παρακάτω τρείς περιπτώσεις ισχύει:*

(1) *Η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο για $x = x_0$.*
(2) *Η δυναμοσειρά συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.*
(3) *Υπάρχει $0 < R < +\infty$ τέτοιο ώστε η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x-x_0| < R$ και αποκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x-x_0| > R$.*

Ο αριθμός R στην περίπτωση (3) του Θεωρήματος 4.1 καλείται ***ακτίνα σύγκλισης*** της δυναμοσειράς. Αν η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο στο κέντρο της λέμε ότι η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = 0$ ενώ όταν συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ λέμε ότι η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = +\infty$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4.1. Παρατηρείστε ότι στην περίπτωση (3) το Θεώρημα 4.1 δεν αποφαίνεται αν η δυναμοσειρά συγκλίνει ή όχι στα σημεία $x_0 \pm R$. Οι περιπτώσεις αυτές εξετάζονται για κάθε δυναμοσειρά ξεχωριστά.

Χρησιμοποιώντας το Κριτήριο Λόγου ή Ρίζας αποδεικνύεται το επόμενο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2. *Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ μια δυναμοσειρά. Αν*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \varrho \ \Big(\text{ή} \ \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \varrho \Big) \tag{4.1}$$

τότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 1/\varrho$ *(με τις συμβάσεις* $R = +\infty$ *αν* $\varrho = 0$ *και* $R = 0$ *αν* $\varrho = +\infty$*).*

Παρατηρηση 4.2. Όπως έχουμε αναφέρει (δείτε Παρατήρηση 3.5) αν το όριο $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ υπάρχει τότε υπάρχει και το $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ και είναι ίσα μεταξύ τους. Έτσι δεν υπάρχει περίπτωση να καταλήξουμε σε διαφορετικά R.

Παραδειγμα 4.1. Βρείτε την ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n = 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + \dots \tag{4.2}$$

Αποδειξη. Έχουμε $a_n = n!$. Άρα

$$\varrho = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$$

και συνεπώς $R = 1/\rho = 1/+\infty = 0$. Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο στο κέντρο της δηλαδή για $x = 0$. □

Παραδειγμα 4.2. Βρείτε την ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \tag{4.3}$$

Αποδειξη. Έχουμε $a_n = \frac{1}{n!}$. Άρα

$$\varrho = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

και συνεπώς $R = 1/\rho = 1/0 = +\infty$. Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. □

Παραδειγμα 4.3. Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n}$. Για ποια $x \in \mathbb{R}$ η δυναμοσειρά συγκλίνει και για ποιά αποκλίνει;

Αποδειξη. Έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ με $a_n = \frac{2^n}{n}$. Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς δίνεται απο τον τύπο $R = 1/\rho$, όπου

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = 2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 2$$

Άρα $R = 1/2$ και η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\cdot x^n$ συγκλίνει για όλα τα $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και αποκλίνει για $x < -\frac{1}{2}$ και $x > \frac{1}{2}$. Μένει να εξετάσουμε τη σύγκλιση στα σημεία $x = -\frac{1}{2}$ και $x = \frac{1}{2}$.

Για $x = -\frac{1}{2}$ παίρνουμε την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ που είναι η εναλλάσσουσα αρμονική που ως γνωστόν (Κριτήριο Leibnitz) συγκλίνει.

Για $x = \frac{1}{2}$ παίρνουμε την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που είναι η αρμονική που ως γνωστόν αποκλίνει.

Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και αποκλίνει παντού αλλού. □

4.2. Παραγώγιση και ολοκλήρωση δυναμοσειράς

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε ότι η παραγώγιση και η ολοκλήρωση μιας δυναμοσειράς γίνεται όπως και στις πολυωνυμικές συναρτήσεις δηλαδή όρο πρός όρο.

4.2.1. Παραγώγιση δυναμοσειράς.

Θεωρημα 4.3. *Έστω $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} \tag{4.4}$$

για κάθε $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Αποδεικνύεται ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ είναι η ίδια με της $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$. Συνεπώς, η παράγωγος μιας δυναμοσειράς είναι πάλι δυναμοσειρά με την ίδια ακτίνα σύγκλισης και άρα εφαρμόζοντας πάλι το Θεώρημα 4.3 για την $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ αντί για την $f(x)$ θα έχουμε ότι

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-x_0)^{n-2}$$

Με Επαγωγή έπεται το εξής.

Πορισμα 4.4. *Έστω $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$. Τότε η f είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη και ισχύει ότι*

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n (x-x_0)^{n-k} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (x-x_0)^{n-k} \end{aligned} \tag{4.5}$$

για κάθε $k \geq 0$.

Θέτοντας $x = x_0$ στην (4.5) παίρνουμε ότι $f^{(k)}(x_0) = k! a_k$ και άρα

Πορισμα 4.5. *Έστω $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$. Τότε*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \tag{4.6}$$

για κάθε $n \geq 0$.

Παραδειγμα 4.4. (α) Δείξτε ότι $\dfrac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$ για κάθε $x \in (-1,1)$.

(β) Αν $g(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ βρείτε την $g^{(2022)}(0)$.

(γ) Υπολογίστε το άθροισμα της σειράς $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$.

Αποδειξη. (α) Έχουμε $\dfrac{1}{(1-x)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ για κάθε $x \in (-1,1)$ και άρα

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

(β) Από το (α) έχουμε $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$ και άρα

$$a_n = n + 1 = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \Rightarrow g^{(n)}(0) = (n+1)n! = (n+1)!$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα $g^{(2022)}(0) = 2023!$.

(γ) Για $x = 1/2$, έχουμε

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$$

και άρα $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 4$. □

4.2.2. Ολοκλήρωση δυναμοσειράς. Έστω $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$. Θεωρούμε την δυναμοσειρά

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} = a_0(x-x_0) + a_1 \frac{(x-x_0)^2}{2} + a_2 \frac{(x-x_0)^3}{3} + \dots$$

Από το Θεώρημα 4.3, προκύπτει άμεσα ότι για κάθε $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, $F'(x) = f(x)$, δηλαδή η F είναι μια αρχική (ή αντιπαράγωγος) της f.

Ισοδύναμα,

$$\int f(x)\, dx = F(x)$$

ή πιο συγκεκριμένα, από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού,

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-x_0)^n\right) dt = F(x) - F(x_0) = F(x)$$

αφού $F(x_0) = 0$.

Θεωρημα 4.6. *Έστω* $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ *με ακτίνα σύγκλισης* $R > 0$. *Τότε*

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-x_0)^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$$

για κάθε $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Ασκηση 4.1. *(α) Αναπτύξτε σε δυναμοσειρά με κέντρο το* $x_0 = 0$ *την συνάρτηση* $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $x \in (-1,1)$.

(β) Δείξτε ότι $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$, *για κάθε* $x \in (-1,1)$.

Αποδειξη. (α) Έστω $x \in (-1,1)$. Τότε $-x \in (-1,1)$ και άρα

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

(β) Έχουμε

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\right)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

□

Παρατηρηση 4.3. Αποδεικνύεται ότι το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά της $\ln(x+1)$, $x \in (-1,1)$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$ ισχύει και στο σημείο $x = 1$ δηλαδή

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots \tag{4.7}$$

με άλλα λόγια το άθροισμα της εναλλάσσουσας αρμονικής σειράς ισούται με τον $\ln 2$.

4.3. Δυναμοσειρές και Απεριόριστα παραγωγίσιμες συναρτήσεις

Από το Πόρισμα 4.4 έχουμε ότι κάθε δυναμοσειρά με θετική ακτίνα σύγκλισης είναι μια απεριόριστα παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αντίστροφα τώρα, ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια συνάρτηση που είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη. Μήπως μπορούμε να γράψουμε την συνάρτηση υπό μορφή δυναμοσειράς; Γενικά αυτό δεν γίνεται και μάλιστα όπως αποδεικνύεται, οι συναρτήσεις που γράφονται ως δυναμοσειρά αποτελούν ένα πολύ μικρό μέρος των απεριόριστα παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Στην περίπτωση όμως που μια απεριόριστα παραγωγίσιμη συνάρτηση f γράφεται ως δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, τότε από το Πόρισμα 4.5 έπεται ότι η δυναμοσειρά αυτή είναι μοναδική και οι συντελεστές της δίνονται από τον τύπο $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Με άλλα λόγια η μόνη δυναμοσειρά που είναι υποψήφια για να αναπαραστήσει μια απεριόριστα παραγωγίσιμη συνάρτηση f είναι η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \tag{4.8}$$

Η δυναμοσειρά (4.8) καλείται *σειρά Taylor της f με κέντρο το x_0*. Αν το $x_0 = 0$ τότε η σειρά Taylor της f γράφεται πιο απλά,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots \tag{4.9}$$

που συνήθως καλείται *σειρά Maclaurin της* f.

Αποδεικνύεται ότι οι συναρτήσεις e^x, $\sin x$, $\cos x$ γράφονται υπό μορφή δυναμοσειράς. Πιό συγκεκριμένα, ισχύει το εξής θεώρημα, που είναι συνέπεια του Θεωρήματος Taylor (για μια άλλη απόδειξη δείτε τις Ασκήσεις παρακάτω).

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.7. *Για κάθε* $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \tag{4.10}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \tag{4.11}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \tag{4.12}$$

4.4. Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 4.2. *Έστω η δυναμοσειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *και έστω* $0 < x_1 < x_2$. *Είναι δυνατόν η δυναμοσειρά να αποκλίνει στο* x_1 *και να συγκλίνει στο* x_2 ?

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Όχι! Αν η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ αποκλίνει για $x = x_1 > 0$ τότε αποκλίνει για όλα τα $x > x_1$. Πράγματι, έστω R η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς. Γνωρίζουμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για όλα τα $x \in (-R, R)$ (στα άκρα $-R$ και $+R$ μπορεί να συγκλίνει ή όχι). Αφού λοιπόν η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ αποκλίνει για $x = x_1 > 0$, δεν μπορεί να είναι $x_1 < R$ και άρα αναγκαστικά θα έχουμε $x_1 \geq R$. Άρα αν $x_2 > x_1$, τότε και $x_2 > R$ και συνεπώς η δυναμοσειρά αποκλίνει στο x_2 αφού ως γνωστόν αποκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x| > R$. □

ΑΣΚΗΣΗ 4.3. *Δίνεται η δυναμοσειρά* $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

(1) *Δείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης είναι* $R = 1$.
(2) *Δείξτε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε* $x \in [-1, 1)$ *και αποκλίνει παντού αλλού.*
(3) *Δείξτε ότι* $f'(x) = \dfrac{1}{1-x}$, *για κάθε* $x \in (-1, 1)$.
(4) *Δείξτε ότι* $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$, *για κάθε* $x \in (-1, 1)$.
(5) *Δείξτε ότι* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \ln 2$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (1) Έχουμε $\varrho = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Άρα $R = 1/\varrho = 1$.

(2) Επειδή $R = 1$ και $x_0 = 0$ η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in (-1, 1)$ και αποκλίνει για $x < -1$ ή $x > 1$. Μένει να εξετάσουμε τα σημεία $x = -1$ και $x = 1$. Στο $x = -1$ η δυναμοσειρά παίρνει την μορφή $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ που είναι η εναλλάσσουσα

αρμονική η οποία συγκλίνει ενώ για $x = 1$ παίρνει την μορφή $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που είναι η αρμονική η οποία αποκλίνει. Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in [-1, 1)$ και αποκλίνει παντού αλλού.

(3) Είναι $f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$, για κάθε $x \in (-1, 1)$.

(4) Επειδή

$$\left(\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)' = (-\ln(1-x))' = \frac{1}{1-x}$$

οι συναρτήσεις $f(x)$ και $\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$ έχουν την ίδια παράγωγο για κάθε $x \in (-1, 1)$. Άρα

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) + c$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$. Επειδή $f(0) = 0 = \ln\left(\frac{1}{1-0}\right)$ έχουμε $c = 0$ και άρα

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$.

(5) Παρατηρούμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2)^n}{n} = f(1/2)$. Επειδή $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$ για κάθε $x \in (-1, 1)$, έπεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = \ln 2$. □

Άσκηση 4.4. *Θεωρώντας γνωστό ότι η συνάρτηση e^x είναι η μοναδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες $f' = f$ και $f(0) = 1$, δείξτε ότι*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \tag{4.13}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R = +\infty$ (Παράδειγμα 4.2) και άρα η f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$. Από το Θεώρημα 4.3,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x)$$

Επίσης $f(0) = 1$. Άρα $e^x = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. □

Άσκηση 4.5. *Θεωρώντας γνωστό ότι η συνάρτηση $\sin x$ είναι η μοναδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες $f'' = -f$, $f'(0) = 1$ και $f(0) = 0$, δείξτε ότι*

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \tag{4.14}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R = +\infty$ και άρα η f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$. Επιπλέον, $f(0) = 0$ και από το Θεώρημα 4.3,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

οπότε $f'(0) = 1$. Επιπλέον,

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -f(x)$$

□

Άσκηση 4.6. *Δείξτε ότι*

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \tag{4.15}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Πράγματι,

$$\cos x = (\sin x)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

□

Κεφάλαιο 5

ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

5.1. Οι συναρτήσεις υπερβολικό συνημίτονο, υπερβολικό ημίτονο και υπερβολική εφαπτομένη

Οι συναρτήσεις

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ x \in \mathbb{R} \tag{5.1}$$

καλούνται αντίστοιχα *υπερβολικό συνημίτονο* και *υπερβολικό ημίτονο*. Επίσης η συνάρτηση

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \ x \in \mathbb{R} \tag{5.2}$$

καλείται *υπερβολική εφαπτομένη*.

Οι παραπάνω συναρτήσεις πήραν αυτήν την ονομασία από την σχέση τους με την ισοσκελή υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$. Πράγματι, είναι εύκολο με πράξεις να επαληθεύσουμε την ταυτότητα

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1, \ \forall t \in \mathbb{R} \tag{5.3}$$

Συνεπώς για κάθε $t \in \mathbb{R}$ το σημείο $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ με

$$\begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sinh t \end{cases} \tag{5.4}$$

ανήκει στην ισοσκελή υπερβολή. Μάλιστα, όπως θα δούμε στην συνέχεια, για κάθε

$$\cosh t \geq 1, \ \forall t \in \mathbb{R} \tag{5.5}$$

και άρα κάθε σημείο (x, y) που ικανοποιεί την (5.4), ειδικότερα ανήκει στον δεξί κλάδο της ισοσκελούς υπερβολής. Αποδεικνύεται τώρα ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ο δεξιός κλάδος της ισοσκελούς υπερβολής αποτελείται ακριβώς από εκείναι τα σημεία (x, y) του επιπέδου που γράφονται στην μορφή (5.4). Επίσης, ο αριθμός t που ικανοποιεί την (5.4) και το εμβαδόν E του επίπεδου χωρίου που καθορίζεται από (α) τον άξονα των x, (β) την ημιευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο (x, y) και (γ) το τόξο του δεξί κλάδου της υπερβολής $x^2 - y^2 = 1$ με άκρα τα σημεία $(1, 0)$ και (x, y), συνδέονται με την σχέση $E = t/2$. Αυτό το γεγονός έρχεται σε αναλογία με τα σημεία (x, y) του μοναδιαίου κύκλου του οποίου τα σημεία δίνονται από τις εξισώσεις

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \tag{5.6}$$

όπου και πάλι το εμβαδό του αντίστοιχου κυκλικού τομέα με κεντρική γωνία t, ισούται με $t/2$. Επιπλέον όπως θα δούμε οι υπερβολικές συναρτήσεις ικανοποιούν παρόμοιες ταυτότητες με αυτές της τριγωνομετρίας (με καποιες διαφορές στα πρόσημα).

5.2. Ιδιότητες των υπερβολικών συναρτήσεων

5.2.1. Η συνάρτηση $\cosh x$, $x \in \mathbb{R}$, είναι *άρτια*, αφού

$$\cosh(-x) = \cosh x, \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{5.7}$$

Πράγματι,

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \cosh x$$

Επίσης,

$$\cosh x \geq 1, \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{5.8}$$

αφού αν θέσουμε $y = e^x$ τότε $y > 0$ και

$$\cosh x = \frac{y + \frac{1}{y}}{2} = \frac{y^2 + 1}{2y} \geq 1 \Leftrightarrow y^2 + 1 \geq 2y \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (y-1)^2 \geq 0$$

Ακόμη, επειδή ο μέσος όρος δύο πραγματικών αριθμών είναι πάντα μεταξύ των αριθμών αυτών έχουμε ότι

$$e^{-x} < \cosh x < e^{x}, \ \forall x > 0 \tag{5.9}$$

και αντίστοιχα

$$e^{x} < \cosh x < e^{-x}, \ \forall x < 0 \tag{5.10}$$

Επίσης,

$$(\cosh x)' = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

Παρατηρούμε ότι $(\cosh x)' < 0$ για $x < 0$ και $(\cosh x)' > 0$ για $x > 0$. Άρα η $\cosh x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ με $\cosh(0) = 1$ να είναι η ελάχιστη τιμή της. Επιπλέον είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\lim_{x \to -\infty} \cosh x = \lim_{x \to +\infty} \cosh x = +\infty. \tag{5.11}$$

και άρα το σύνολο τιμών της $\cosh x$ (δηλαδή το σύνολο $\{\cosh x : x \in \mathbb{R}\}$) είναι το $[1, +\infty)$. Η καμπύλη που σχηματίζει η γραφική παράσταση της $\cosh x$ μοιάζει με της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$ και καλείται *αλυσσοειδής* γιατί είναι το σχήμα που παίρνει μια αλυσίδα όταν την κρεμάσουμε οριζόντια απο τα δύο άκρα της.

5.2.2. Η συνάρτηση $\sinh x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι *περιττή* αφού

$$\sinh(-x) = -\sinh x \tag{5.12}$$

Επίσης,

$$\lim_{x \to -\infty} \sinh x = -\infty \text{ και } \lim_{x \to +\infty} \sinh x = +\infty \tag{5.13}$$

και

$$(\sinh x)' = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

Η $\sinh x$ είναι γνησίως αύξουσα, το σύνολο τιμών της είναι όλο το $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση μοιάζει με της συνάρτησης $f(x) = x^3$.

5.2.3. Αντίστοιχα, για την $\tanh x$ έχουμε

$$\tanh(-x) = -\tanh x,\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{5.14}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \tanh x = -1 \text{ και } \lim_{x\to+\infty} \tanh x = +1 \tag{5.15}$$

$$-1 < \tanh x < 1,\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{5.16}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} \tag{5.17}$$

Η $\tanh x$ είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το $(-1, 1)$, με τις ευθείες $y = -1$ και $y = 1$ να αποτελούν οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης.

5.2.4. Μερικές βασικές ταυτότητες που ικανοποιούν οι υπερβολικές συναρτήσεις είναι οι παρακάτω:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{5.18}$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \tag{5.19}$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \tag{5.20}$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y} \tag{5.21}$$

Ειδικότερα,

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 y = 2\sinh^2 x + 1 = 2\cosh^2 x - 1 \tag{5.22}$$

$$\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x \tag{5.23}$$

$$\tanh(2x) = \frac{2\tanh x}{1 + \tanh^2 x} \tag{5.24}$$

5.3. Αντίστροφες Τριγωνομετρικές

Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι οι αντίστροφες των των περιορισμών τους σε κατάλληλα διαστήματα του $\mathbb{R}$). Οι βασικότερες από αυτές ονομάζονται *τόξο ημιτόνου, τόξο συνημιτόνου και τόξο εφαπτομένης* και δίνουν την γωνία θ σε ακτίνια όταν δίνεται ο αντίστοιχος τριγωνομετρικός αριθμός της.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τις εφαρμογές παρουσιάζουν οι παράγωγοι των συναρτήσεων αυτών οι οποίες υπολογίζονται με το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.1. *(Θεώρημα Παραγώγου Αντίστροφης Συνάρτησης) Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη και συνεχής. Έστω $x \in I$ και έστω $y = f(x)$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x και $f'(x) \neq 0$ τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο y και ισχύει ότι* $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

5.3.1. Η συνάρτηση τόξο ημιτόνου. Έστω $f(x) = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Η f είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και με σύνολο τιμών το $[-1, 1]$. Άρα ορίζεται η αντίστροφή της f^{-1} που την συμβολίζουμε με $\arcsin x$, (διαβάζεται "τόξο ημιτόνου x"). Η συνάρτηση $\arcsin x$ έχει πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$, σύνολο τιμών το $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα.

Η συνάρτηση $\arcsin x$ αντιστοιχεί σε κάθε $x \in [-1, 1]$ το μοναδικό τόξο $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ με $\sin y = x$. Πχ. $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Έστω $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και $y = \sin x$. Τότε $\cos x > 0$ και από το Θεώρημα 5.1, παίρνουμε

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Συνεπώς, θέτοντας x αντί για y,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \ \forall x \in (-1, 1) \tag{5.25}$$

ισοδύναμα,

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = \arcsin x, \ \forall x \in (-1, 1) \tag{5.26}$$

5.3.2. Η συνάρτηση τόξο συνημιτόνου x. Έστω $f(x) = \cos x$, $x \in [0, \pi]$. Η f είναι συνεχής, γνησίως φθίνουσα και με σύνολο τιμών το $[-1, 1]$. Άρα ορίζεται η αντίστροφή της που την συμβολίζουμε με $\arccos x$, (διαβάζεται "τόξο συνημιτόνου x"). Η συνάρτηση $\arccos x$ έχει πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$, σύνολο τιμών το $[0, \pi]$, είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα.

Η συνάρτηση $\arccos x$ αντιστοιχεί σε κάθε $x \in [-1, 1]$ το μοναδικό $y \in [0, \pi]$ με $\cos y = x$. Πχ. $\arccos 0 = \pi/2$, $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos 1 = 0$, $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Έστω $x \in (0, \pi)$ και $y = \cos x$. Τότε $\sin x > 0$ και άρα, από το Θεώρημα 5.1, παίρνουμε

$$(\arccos y)' = \frac{1}{(\cos x)'} = \frac{1}{-\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Συνεπώς, θέτοντας x αντί για y,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \ \forall x \in (-1, 1) \tag{5.27}$$

ισοδύναμα,

$$\int -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = \arccos x, \ \forall x \in (-1, 1) \tag{5.28}$$

5.3.3. Η συνάρτηση τόξο εφαπτομένης x. Έστω $f(x) = \tan x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Η f είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και με σύνολο τιμών όλο το $\mathbb{R}$. Άρα ορίζεται η αντίστροφή της που την συμβολίζουμε με $\arctan x$, (διαβάζεται "τόξο εφαπτομένης x"). Συνεπώς, η συνάρτηση $\arctan x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, σύνολο τιμών το $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα.

Η $\arctan x$ αντιστοιχεί σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ το μοναδικό τόξο $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με εφαπτομένη x. Πχ. $\arctan 0 = 0$, $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$, $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

Αν $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και $y = \tan x$ τότε $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x \neq 0$. Άρα, από το Θεώρημα 5.1,

$$(\arctan y)' = \frac{1}{(\tan x)'} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

οπότε, θέτοντας x αντί για y,

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{5.29}$$

ισοδύναμα,

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ dx = \arctan x,\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{5.30}$$

5.4. Ασκήσεις

Άσκηση 5.1. *Δείξτε ότι η αντίστροφη της συνάρτησης $\sinh x$ δίνεται από τον τύπο*

$$\sinh^{-1} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right),\ \forall y \in \mathbb{R} \tag{5.31}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση: Πράγματι, έστω $y = \sinh x$. Τότε $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Άρα, θέτοντας $w = e^x$, έχουμε

$$y = \frac{w - \frac{1}{w}}{2} = \frac{w^2-1}{2w} \Leftrightarrow w^2 - 2yw - 1 = 0$$

Απορρίπτοντας την αρνητική ρίζα (αφού $w = e^x > 0$) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} w = y + \sqrt{y^2+1} &\Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2+1} \\ &\Leftrightarrow x = \sinh^{-1} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) \end{aligned}$$

Άσκηση 5.2. *Δείξτε ότι*

$$\left(\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ισοδύναμα,

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Λύση: Πράγματι, από τον κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης έχουμε

$$\begin{aligned}\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)' &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)' \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot(x^2+1)'\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.\end{aligned}$$

Άσκηση 5.3. *Δείξτε ότι η αντίστροφη της συνάρτησης* $\tanh x$ *δίνεται από τον τύπο*

$$\tanh^{-1} y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right),\ \forall y\in(-1,1) \tag{5.32}$$

Πράγματι, έστω $y=\tanh x$. Τότε

$$y=\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\Leftrightarrow e^{2x}=\frac{1+y}{1-y}\Leftrightarrow x=\tanh^{-1}y=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

Άσκηση 5.4. *Αναπτύξτε σε δυναμοσειρά τις συναρτήσεις*

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\quad \textit{και}\ \sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

Λύση: Από το Θεώρημα 4.7 έχουμε

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n \tag{5.33}$$

για όλα τα $x\in\mathbb{R}$ και άρα

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n \tag{5.34}$$

για όλα τα $x\in\mathbb{R}$. Συνεπώς,

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n!}+\frac{(-1)^n}{n!}\right)x^n=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Ομοίως δείχνουμε ότι

$$\sinh x=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Άσκηση 5.5. *Αναπτύξτε σε δυναμοσειρά με κέντρο το* $x_0=0$ *την συνάρτηση* $\arctan x$ $x\in\mathbb{R}$.

Απόδειξη. Έχουμε $\arctan x=\int\frac{1}{1+x^2}\,dx$ και άρα

$$\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\,dt=\arctan x-\arctan 0=\arctan x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επιπλέον,

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1-(-t^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-t^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right)\,dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots\end{aligned}$$

για κάθε $x \in (-1,1)$. □

Άσκηση 5.6. *Υπολογίστε τον αριθμό* $\sin\left(\arccos\dfrac{3}{5}\right)$.

Λύση: Έστω $y = \arccos(3/5)$. Τότε $y \in [0,\pi]$ και $\cos y = 3/5$. Άρα $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = 4/5$. Οπότε $\sin(\arccos(3/5)) = \sin y = 4/5$.

Άσκηση 5.7. *Ομοίως για τον* $\tan\left(\arcsin\dfrac{12}{13}\right)$.

Λύση: Έστω $y = \arcsin(12/13)$. Τότε $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ και $\sin y = 12/13$. Άρα $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = 5/13$. Οπότε

$$\tan\left(\arcsin\frac{12}{13}\right) = \tan y = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{5}{13}$$

Άσκηση 5.8. *Δείξτε ότι αν* $x \neq 0$ *τότε*

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{αν } x > 0$$

και

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{αν } x < 0$$

Λύση: Θα δείξουμε την περίπτωση όπου $x > 0$ (Η περίπτωση $x < 0$ αντιμετωπίζεται αναάλογα). Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}, \quad x > 0$$

είναι σταθερή και ίση με $\pi/2$. Έχουμε

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

που σημαίνει ότι η $f(x), x > 0$ είναι σταθερή συνάρτηση. Επειδή

$$f(1) = \arctan 1 + \arctan 1 = 2\arctan 1 = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

έπεται ότι $f(x) = f(1) = \pi/2$ δηλαδή $\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

Κεφάλαιο 6

ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

6.1. Βασικοί Ορισμοί

Έστω $[a, b]$ ένα κλειστό φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$. Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του $[a, b]$ που περιέχει τα a, b

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

θα καλείται ***διαμέριση*** του $[a, b]$. Αν $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a, b]$, τότε για κάθε $i = 1, \ldots, n$, θέτουμε

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},$$

δηλαδή Δx_i είναι το μήκος του διαστήματος $[x_{i-1}, x_i]$. Η ***λεπτότητα*** της P ορίζεται να είναι το μέγιστο από τα μήκη Δx_i και συμβολίζεται με $\lambda(P)$, δηλαδή

$$\lambda(P) = \max\{\Delta x_i : i = 1, \ldots, n\}$$

Δεδομένης μιας διαμέρισης $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a, b]$, ένα υποσύνολο $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ του $[a, b]$ τέτοιο ώστε $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ για όλα τα $i = 1, \ldots, n$ θα καλείται ***επιλογή ενδιάμεσων σημείων ως προς την*** P.

Ορισμός 6.1. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a, b]$ και $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ επιλογή ενδιάμεσων σημείων ως προς την P. Το άθροισμα*

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = f(t_1)(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(t_n)(x_n - x_{n-1})$$

*καλείται **άθροισμα Riemann της** f **ως προς την διαμέριση** P **και την επιλογή** T και συμβολίζεται με $R(f, P, T)$.*

Ορισμός 6.2. *Μία συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ καλείται **ολοκληρώσιμη** αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός I με την εξής ιδιότητα : Για κάθε ακολουθία (P_n, T_n) όπου για κάθε $n \in \mathbb{N}$, P_n είναι μια διαμέριση του $[a, b]$ και T_n μια επιλογή ενδιάμεσων σημείων ως προς την P_n, αν $\lambda(P_n) \to 0$ τότε $\lim\limits_{n\to\infty} R(f, P_n, T_n) = I$.*

Ο αριθμός I με την παραπάνω ιδιότητα αν υπάρχει είναι μοναδικός και καλείται **ολοκλήρωμα Riemann** ή απλά **ολοκλήρωμα** της f και συμβολίζεται με $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$.

Πρόταση 6.3. *Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε*

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)}{n} \tag{6.1}$$

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έστω $P_n = \{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < 1\}$ και $T_n = \{\frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < 1\}$. Τότε

$$R(f, P_n, T_n) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})}{n}$$

Αφού $\lambda(P_n) \to 0$ θα πρέπει $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})}{n} = \int_0^1 f(x)\, dx.$ □

Παραδειγμα 6.1. Η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^k$, όπου $k \in \mathbb{N}$ είναι ολοκληρώσιμη (ως συνεχής). Από τον τύπο (6.1) εύκολα προκύπτει ότι

$$\int_0^1 x^k\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}$$

και άρα επειδή (όπως θα δούμε) $\displaystyle\int_0^1 x^k\, dx = \frac{1}{k+1}$ έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν είναι ολοκληρώσιμες. Μια τέτοια συνάρτηση είναι η συνάρτηση Dirichlet, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ αν } x \text{ ρητός} \\ 0, \text{ αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα αθροίσματα Riemann δεν συγκλίνουν καθώς η λεπτότητα των διαμερίσεων τείνει στο 0. Πράγματι, παρατηρούμε ότι για κάθε διαμέριση P, έχουμε

$$R(f, P, T) = \begin{cases} 0, & \text{αν η } T \text{ αποτελείται από άρρητους} \\ b - a, & \text{αν η } T \text{ αποτελείται από ρητούς} \end{cases}$$

Το παρακάτω θεώρημα είναι το πρώτο σημαντικό αποτέλεσμα στην θεωρία ολοκλήρωσης.

Θεωρημα 6.4. *Κάθε συνεχής συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη.*

Αξίζει να σημειώσουμε εδώ ότι υπάρχουν και ασυνεχείς ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Πχ. αποδεικνύεται ότι κάθε μονότονη συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη ασχέτως αν είναι συνεχής ή όχι.

6.2. Βασικές Ιδιότητες του ολοκληρώματος

Οι βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος είναι οι παρακάτω:

Προταση 6.5. *(Προσθετικότητα) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $c \in (a,b)$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στα $[a,c]$ και $[c.b]$ και ισχύει ότι*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

Πρόταση 6.6. *(Μονοτονία) Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Αν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ τότε*

$$\int_a^b f\ dx \leq \int_a^b g\ dx$$

Πρόταση 6.7. *(Γραμμικότητα) Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε η συνάρτηση $\lambda f + \mu g$ είναι ολοκληρώσιμη και*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)\ dx = \lambda \int_a^b f\ dx + \mu \int_a^b g\ dx$$

6.3. Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού

Θεώρημα 6.8. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν υπάρχει $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b) και τέτοια ώστε*

$$F'(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in (a, b)$$

τότε

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

Την διαφορά $F(b) - F(a)$ θα την συμβολίζουμε στην συνέχεια με $[F(x)]_a^b$.

Παράδειγμα 6.2. $\displaystyle\int_0^1 x^2\ dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$. Γενικότερα, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 x^k\ dx = \left[\frac{x^k}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1}$$

Παράδειγμα 6.3. $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\ dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$.

Παράδειγμα 6.4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

Το Θεώρημα 6.8 αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων. Μας λέει ότι για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ μιας συνάρτησης f αρκεί να βρούμε μια αντιπαράγωγό (ή αρχική) της, δηλαδή μια συνάρτηση F με $F' = f$ και τότε το ολοκλήρωμα που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι απλώς η διαφορά των τιμών της συνάρτησης F στα άκρα a και b του διαστήματος ολοκλήρωσης.

Αν $f : I \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, (όπου I διάστημα του $\mathbb{R}$), το *αόριστο ολοκλήρωμα* (ή *γενικό ολοκλήρωμα*) της f ορίζεται να είναι το σύνολο όλων των αντιπαραγώγων της f. Το αόριστο ολοκλήρωμα της f θα συμβολίζεται με $\int f(x)\ dx$. Επειδή δύο αντιπαράγωγοι της f διαφέρουν κατά σταθερά, έχουμε ότι αν F είναι μια αντιπαράγωγος της f τότε

$$\int f(x)\ dx = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$$

Στα επόμενα για απλότητα θα γράφουμε

$$\int f(x)\ dx = F(x) + c \quad \text{ή} \quad \int f(x)\ dx = F(x)$$

Άρα

$$\int f(x)\ dx = F(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Πχ.

$$\int x^2\ dx = \frac{x^3}{3}$$

$$\int \cos x\ dx = \sin x$$

$$\int \sin x\ dx = -\cos x$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\ dx = \arctan x$$

$$\int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x|\ (\text{διότι } \ln|x|)' = \frac{1}{x} \text{ για κάθε } x \neq 0)$$

Σχετικά με τις συνεχείς συναρτήσεις και την ύπαρξη αντιπαραγώγου τους αποδεικνύεται το εξής θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.9. *Κάθε $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής έχει αντιπαράγωγο. Ειδικότερα αν $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με $F(a) = 0$ και $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$, $\forall x \in (a,b]$ τότε $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$.*

Παρατηρείστε ότι το Θεώρημα 6.9 δίνει το Θεώρημα 6.8 για f συνεχή.

6.4. Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

6.4.1. Ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Η πρώτη μέθοδος Ολοκλήρωσης είναι το ανάλογο του κανόνα παραγώγισης του γινομένου δύο συναρτήσεων: $(fg)' = f'g + fg'$ και καλείται *Ολοκλήρωση κατά παράγοντες*.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.10. *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες με συνεχή παράγωγο. Τότε*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\ dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\ dx \tag{6.2}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ έχουμε ότι $f' \cdot g = (f \cdot g)' - f \cdot g'$. Άρα από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος,

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)g(x)\ dx &= \int_a^b (f(x)g(x))'\ dx - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\ dx \\ &= [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\ dx.\end{aligned}$$

□

Παραδειγμα 6.5.

$$\begin{aligned}
\int_1^e \ln x \ dx = \int_1^e (x)' \ln x \ dx &= [x\ln x]_1^e - \int_1^e x(\ln x)' \ dx \\
&= [x\ln x]_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x} \ dx \\
&= [x\ln x]_1^e - \int_1^e 1 \ dx \\
&= [x\ln x]_1^e - [x]_1^e = [x\ln x - x]_1^e = [x(\ln x - 1)]_1^e
\end{aligned}$$

Παραδειγμα 6.6. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \ dx = \frac{\pi}{2}$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \ dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x(\sin x)' \ dx &= [\cos x \sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)' \sin x \ dx \\
&= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)' \sin x \ dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin x \ dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \ dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos^2 x\right) \ dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \ dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \ dx = \pi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x
\end{aligned}$$

Άρα θέτοντας $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \ dx$ έχουμε ότι $I = \pi - I \Leftrightarrow 2I = \pi \Leftrightarrow I = \dfrac{\pi}{2}$.

6.4.2. Ολοκλήρωση με αντικατάσταση. Η δεύτερη μέθοδος ολοκλήρωσης είναι το αντίστοιχο του κανόνα παραγώγισης της σύνθεσης δύο συναρτήσεων (κανόνας αλυσίδας): $(F \circ \phi)'(x) = F'(\phi(x))\phi'(x)$ και καλείται *ολοκλήρωση με αντικατάσταση* (ή *ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής*).

Θεωρημα 6.11. *Έστω $\phi : [c, d] \to [a, b]$ με $\phi(c) = a$ και $\phi(d) = b$, παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε*

$$\int_c^d f(\phi(x)) \cdot \phi'(x) \ dx = \int_a^b f(u) \ du \tag{6.3}$$

Αποδειξη. Έστω $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια αντιπαράγωγος της f (υπάρχει από το Θεώρημα 6.9). Τότε

$$\int_a^b f(u) \ du = F(b) - F(a) \tag{6.4}$$

Από την άλλη μεριά, από τον κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_c^d f(\phi(x))\cdot\phi'(x)\ dx &= \int_c^d F'(\phi(x))\cdot\phi'(x)\ dx \\ &= \int_c^d (F\circ\phi)'(x)\ dx \\ &= F\circ\phi\ (d) - F\circ\phi\ (c) \\ &= F(b)-F(a)\end{aligned} \tag{6.5}$$

Από (6.4) και (6.5) έπεται το συμπέρασμα. □

Στην πράξη για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 6.11, θέτουμε

$$\text{“}u=\phi(x)\text{” και “}du=\phi'(x)\ dx\text{”}$$

Οι μέθοδοι ολοκλήρωσης για αόριστα ολοκληρώματα παίρνουν την μορφή

$$\int f'(x)g(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx$$

και

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\ dx \overset{u=\phi(x),\ du=\phi'(x)dx}{=} \int f(u)\ du$$

Παραδειγμα 6.7.

$$\int_a^b f(x)f'(x)\ dx \overset{u=f(x),\ du=f'(x)\ dx}{=} \int_{f(a)}^{f(b)} u\ du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_a^b = \left[\frac{f^2(x)}{2}\right]_a^b$$

Πχ.

$$\begin{aligned}\int_a^b \cos x\sin x\ dx &= \int_a^b \sin x(\sin x)'\ dx \\ &\overset{u=\sin x,\ du=\cos x\ dx}{=} \int_{\sin a}^{\sin b} u\ du = \frac{\sin^2 b-\sin^2 a}{2}\end{aligned}$$

Παραδειγμα 6.8. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής με $f(x)>0$ για κάθε $x\in[a,b]$. Τότε

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx \overset{u=f(x),\ du=f'(x)\ dx}{=} \int_{f(a)}^{f(b)} \frac{du}{u}\ dt = [\ln u]_{f(a)}^{f(b)} = \ln f(b) - \ln f(a)$$

Πχ.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/3} \tan x\ dx = \int_0^{\pi/3}\frac{\sin x}{\cos x}\ dx &= -\int_0^{\pi/3}\frac{(\cos x)'}{\cos x}\ dx \\ &\overset{u=\cos x}{=} -\int_1^{1/2}\frac{du}{u} = \int_{1/2}^1 \frac{du}{u} = [\ln u]_{1/2}^1 = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2\end{aligned}$$

Παραδειγμα 6.9.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arctan x \; dx = \int_1^e (x)' \arctan x \; dx &= [x\arctan x]_0^1 - \int_0^1 x(\arctan x)' \; dx \\ &= [x\arctan x]_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{x^2+1} \; dx \\ &\overset{(u=x^2+1)}{=} [x\arctan x]_0^1 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{u} \; du \\ &= [x\arctan x]_0^1 - [\ln u]_1^2 \\ &= [x\arctan x]_0^1 - \left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 \\ &= \left[x\arctan x - \ln(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \ln 2\end{aligned}$$

Ο τύπος της ολοκλήρωσης με αντικατάσταση (6.3), χρησιμοποιείται και από δεξιά προς τα αριστερά ως εξής: Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\; dx$. Αν $\phi : [c,d] \to [a,b]$ παραγωγίσιμη με $\phi(c) = a$ και $\phi(d) = b$ τότε ο τύπος (6.3) γράφεται ισοδύναμα

$$\int_a^b f(x)\; dx = \int_c^d f(\phi(t))\phi'(t)\; dt \tag{6.6}$$

Στην πράξη, θέτουμε

$$x = \phi(t) \text{ και } dx = \phi'(t)\; dt$$

και γράφουμε

$$\int_a^b f(x)\; dx = \int_c^d f(\phi(t))\phi'(t)\; dt$$

Το δύσκολο εδώ είναι να βρούμε την κατάλληλη συνάρτηση $\phi : [c,d] \to [a,b]$.

Παραδειγμα 6.10. Βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\; dx$. Τι απεικονίζει γεωμετρικά το ολοκλήρωμα αυτό;

Αποδειξη. Θέτουμε $x = \sin t$, $t \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Τότε

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\; dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\; (\sin t)'\; dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\; dt = \frac{\pi}{2}$$

όπως προκύπτει από το Παράδειγμα 6.6. Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\; dx$ είναι το εμβαδόν κάτω από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ που είναι το ημικύκλιο κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας 1 και άρα απεικονίζει το μισό του εμβαδού του κύκλου με ακτίνα 1. □

Παραδειγμα 6.11. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x+\sin x}\; dx$.

Λύση : Θέτουμε

$$x = 2\arctan t \Leftrightarrow t = \tan\frac{x}{2}$$

και άρα

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\; dt$$

Από γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες έχουμε

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{και} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

Με τις παραπάνω αντικαταστάσεις το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\ dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\ dt = \ln 2.$$

6.5. Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

6.5.1. Ανάλυση σε απλά κλάσματα. Με τον όρο *ρητή συνάρτηση* εννοούμε μια συνάρτηση της μορφής $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ όπου $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα. Αν ο βαθμός του $P(x)$ είναι γνήσια μεγαλύτερος από τον βαθμό του $Q(x)$ τότε από την ταυτότητα της διαίρεσης των πολυωνύμων έχουμε ότι υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ (*το πηλίκο*) και $R(x)$ (*το υπόλοιπο*) με τον βαθμό τοψ $R(x)$ να είναι γνήσια μικρότερος του βαθμού του $Q(x)$ τέτοια ώστε $P(x) = \pi(x) \cdot Q(x) + R(x)$ και άρα

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \pi(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \tag{6.7}$$

Επειδή το ολοκλήρωμα ενός πολυωνύμου υπολογίζεται εύκολα, αφού

$$\begin{aligned}\int (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)\ dx &= a_n \int x^n\ dx + \cdots + a_1 \int x\ dx + a_0 \int dx \\ &= \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \cdots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x\end{aligned}$$

από την σχέση (6.7) βλέπουμε ότι η ολοκλήρωση μιας ρητής συνάρτησης ανάγεται στην ολοκλήρωση μιας ρητής συνάρτησης όπου ο βαθμός του αριθμητή είναι *γνήσια μικρότερος* του βαθμού του παρονομαστή. Τέτοιες ρητές συναρτήσεις τις καλούμε *γνήσιες*.

Αποδεικνύεται ότι κάθε πολυώνυμο $Q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ με βαθμό $n \geq 1$ και συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου $a_{n+1} = 1$ γράφεται με μοναδικό τρόπο στην μορφή γινομένου $Q(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x)$ όπου

$$Q_1(x) = \prod_{i=1}^{m} (x-\rho_i)^{n_i} \text{ και } Q_2(x) = \prod_{j=1}^{\ell} (x^2 + b_j x + c_j)^{k_j} \tag{6.8}$$

όπου $\rho_i, b_j, c_j \in \mathbb{R}$ και $\Delta_j = b_j^2 - 4c_j < 0$ για κάθε $j = 1, \ldots, \ell$.

Θεωρημα 6.12. *Έστω* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *μία γνήσια ρητή συνάρτηση και έστω*

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{m} (x-\rho_i)^{n_i} \cdot \prod_{j=1}^{\ell} (x^2 + b_j x + c_j)^{k_j}$$

η ανάλυση του $Q(x)$.

Τότε

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{m} F_i(x) + \sum_{j=1}^{\ell} G_j(x) \tag{6.9}$$

όπου

$$F_i(x) = \frac{A_1^i}{x-\rho_i} + \frac{A_2^i}{(x-\rho_i)^2} + \cdots + \frac{A_{n_i}^i}{(x-\rho_i)^{n_i}}$$

και

$$G_j(x) = \frac{B_1^j + C_1^j x}{x^2 + b_j x + c_j} + \frac{B_2^j + C_2^j x}{(x^2 + b_j x + c_j)^2} + \cdots + \frac{B_k^j x + C_k^j}{(x^2 + b_j x + c_j)^{k_j}}$$

Για παράδειγμα,

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\frac{x^2+5x+1}{(x-1)(x+1)^2(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+2x+5}$$

Από το Θεώρημα 6.12 έχουμε ότι η ολοκλήρωση των γνήσια ρητών συναρτήσεων ανάγεται στην ολοκλήρωση κλασμάτων της μορφής

$$\frac{1}{(x-\rho)^n} \quad \text{και} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k} \text{ με } b^2-4c<0$$

Τα κλάσματα των παραπάνω μορφών καλούνται *απλά κλάσματα* και η ανάλυση (6.9) *ανάλυση της* $P(x)/Q(x)$ *σε άθροισμα απλών κλασμάτων*.

Παραδειγμα 6.12. Να αναλυθεί η συνάρτηση $\dfrac{10x}{(x+1)(x^2+9)}$ σε απλά κλάσματα.

Έχουμε

$$\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+9} \tag{6.10}$$

Για να βρούμε τις σταθερές A, B, C εργαζόμαστε ως εξής: Κάνοντας ομώνυμα τα κλάσματα και εκτελώντας τις πράξεις στο δεξί μέλος της (6.10) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+9}\\ &= \frac{A(x^2+9)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+9)}\\ &= \frac{(A+B)x^2+(B+C)x+9A+C}{(x+1)(x^2+9)}\end{aligned}$$

και άρα

$$(A+B)x^2+(B+C)x+9A+C = 10x$$

Συνεπώς έχουμε το σύστημα

$$A+B=0, B+C=10, 9A+C=0$$

απ΄ όπου συμπεραίνουμε ότι

$$A=-1, B=1, C=9$$

Άρα

$$\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} = -\frac{1}{x+1} + \frac{x+9}{x^2+9}$$

6.5.2. Ολοκλήρωση απλών κλασμάτων. Ολοκληρώματα της μορφής $\int \frac{1}{(x-\rho)^n}\, dx$ είναι εύκολο να υπολογισθούν αφού κάνοντας την αντικατάσταση

$$u = x - \rho \text{ και } dx = du$$

έχουμε

$$\int \frac{1}{(x-\rho)^n}\, dx = \int \frac{1}{u^{-n}}\, du = \begin{cases} \ln u = \ln(x-\rho), & \text{αν } n = 1 \\ \dfrac{u^{-n+1}}{-n+1} = -\dfrac{1}{n-1} \cdot \dfrac{1}{(x-\rho)^{n-1}}, & \text{αν } n \geq 2 \end{cases}$$

Ολοκληρώματα της μορφής $\int \frac{Bx+c}{(x^2+bx+c)^k}\, dx$ με κατάλληλη αντικατάσταση $x = \phi(t)$ μετατρέπονται εύκολα (δείτε Ασκήσεις 6.1 και 6.2 παρακάτω) σε ένα γραμμικό συνδυασμό ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^k}\, dt \text{ και } \int \frac{1}{(x^2+1)^k}\, dt$$

Τα ολοκληρώματα της πρώτης μορφής υπολογίζονται ως εξής:

Θέτουμε

$$u = x^2 + 1 \quad du = 2xdx$$

οπότε

$$\int \frac{x}{(x^2+1)}\, dt = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln u = \ln \sqrt{x^2+1}$$

και για $k \geq 2$,

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^k}\, dt = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-k+1}}{-k+1} = -\frac{1}{2(k-1)} \cdot \frac{1}{u^{k-1}} = -\frac{1}{2(k-1)} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^{k-1}}$$

Τα ολοκληρώματα της δεύτερης μορφής υπολογίζονται αναδρομικά. Συγκεκριμένα έχουμε την εξής πρόταση.

Πρόταση 6.13. *(α)* $\int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \arctan x.$

(β) Αν θέσουμε $I_k = \frac{1}{(x^2+1)^k}\, dx$ *τότε*

$$I_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{2k}\right) I_k + \frac{1}{2k} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^k}.$$

Απόδειξη. (α) Άμεσο, αφού $(\arctan x)' = \frac{1}{x^2+1}$.

(β) Παρατηρούμε ότι

$$\left(\frac{1}{(x^2+1)^k}\right)' = -\frac{k(x^2+1)^{k-1}2x}{(x^2+1)^{2k}} = -2k \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{k+1}} \tag{6.11}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2+1)^{k+1}}\,dx &= \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^{k+1}} \\
&= \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{k+1}}\,dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{k+1}}\,dx \\
&= \int \frac{1}{(x^2+1)^{k}}\,dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{k+1}}\,dx \\
&= I_k - \int x \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{k+1}}\,dx \\
&\overset{(6.11)}{=} I_k + \frac{1}{2k}\int x \cdot \left(\frac{1}{(x^2+1)^{k}}\right)'\,dx \\
&= I_k + \frac{1}{2k}\left(x \cdot \frac{1}{(x^2+1)^{k}} - \int (x)' \cdot \frac{1}{(x^2+1)^{k}}\,dx\right) \\
&= I_k + \frac{1}{2k}\left(\frac{x}{(x^2+1)^{k}} - I_k\right) \\
&= \left(1-\frac{1}{2k}\right) I_k + \frac{1}{2k}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{k}}.
\end{aligned}$$

□

Άσκηση 6.1. *Να βρεθεί το ολοκλήρωμα* $\displaystyle\int \frac{10x}{(x+1)(x^2+9)}\,dx.$

Λύση: Από την Άσκηση 6.12 έχουμε

$$\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} = -\frac{1}{x+1} + \frac{x+9}{x^2+9}$$

Άρα

$$\int \frac{10x}{(x+1)(x^2+9)}\,dx = -\int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{x+9}{x^2+9}\,dx \tag{6.12}$$

Έχουμε

$$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1|.$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+9}{x^2+9}\, dx &= \frac{1}{9}\int \frac{x+9}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\, dx \\
&\overset{u=x/3, dx=3du}{=} \frac{1}{9}\int \frac{3u+9}{u^2+1}\, 3\, dt \\
&= \int \frac{u+3}{u^2+1}\, dt \\
&= \int \frac{u}{u^2+1}\, dt + \int \frac{3}{u^2+1}\, dt \\
&\overset{v=u^2+1, dv=2u\ du}{=} \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v} + 3\int \frac{1}{u^2+1}\, du \\
&= \frac{1}{2}\ln|v| + 3\arctan u = \frac{1}{2}\ln(u^2+1) + 3\arctan u \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{9}+1\right) + 3\arctan\left(\frac{x}{3}\right) = \ln\sqrt{\frac{x^2}{9}+1} + 3\arctan\left(\frac{x}{3}\right).
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} &= -\ln|x+1| + \ln\sqrt{\frac{x^2}{9}+1} + 3\arctan\left(\frac{x}{3}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{x^2}{9}+1}}{|x+1|}\right) + 3\arctan\left(\frac{x}{3}\right)
\end{aligned}$$

Άσκηση 6.2. *Βρείτε το ολοκλήρωμα* $\int \frac{1}{x^2+2x+5}\, dx$.

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+2x+5}\, dx &= \int \frac{1}{x^2+2x+1-1+5} \\
&= \int \frac{1}{(x+1)^2+4} \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\, dx \\
&\overset{u=\frac{x+1}{2},\ du=dx/2}{=} \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\, du = \frac{1}{2}\arctan u \\
&= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Άσκηση 6.3. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα* $\int \frac{1}{x^3+x}\, dx$.

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3+x}\, dx &= \int \frac{1}{x(x^2+1)}\, dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)\, dx \\ &= \int \frac{1}{x}\, dx - \int \frac{x}{x^2+1}\, dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\end{aligned}$$

Άσκηση 6.4. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα*

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\, dx$$

Λύση: Έχουμε

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\, dx = \int \frac{x}{x^2+4x+4+1}\, dx = \int \frac{x}{(x+2)^2+1}\, dx.$$

Θέτουμε $u = x+2$ και άρα $x = u-2$ και $dx = du$. Οπότε

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\, dx = \int \frac{u-2}{u^2+1}\, dy = \int \frac{u}{u^2+1}\, du - 2\int \frac{1}{u^2+1}\, du$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα θέτουμε $v = u^2+1$ και άρα $dv = 2udu \Rightarrow udu = dv/2$. Συνεπώς,

$$\int \frac{u}{u^2+1}\, du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{v}\, dv = \frac{1}{2}\ln v = \frac{1}{2}\ln(u^2+1) = \frac{1}{2}(\ln(x+2)^2) = \ln|x+2|.$$

Για το δεύτερο έχουμε

$$\int \frac{1}{u^2+1}\, du = \arctan u = \arctan(x+2).$$

Τελικά,

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\, dx = \ln|x+2| + \frac{\arctan(x+2)}{2}.$$

Άσκηση 6.5. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα* $\int \frac{1}{x^3+x}\, dx.$

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3+x}\, dx &= \int \frac{1}{x(x^2+1)}\, dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)\, dx \\ &= \int \frac{1}{x}\, dx - \int \frac{x}{x^2+1}\, dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\end{aligned}$$

Άσκηση 6.6. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα* $\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\, dx.$

Λύση: Κάνουμε την αντικατάσταση $u = e^x$ και $du = e^x dx = u dx$, οπότε

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{u+1}{u^2+1}\cdot\frac{1}{u}\,du = \int \frac{u+1}{u(u^2+1)}\,du &= \int \frac{u}{u(u^2+1)}\,du + \int \frac{1}{u(u^2+1)}\,du \\ &= \int \frac{1}{u^2+1}\,du + \int \frac{1}{u(u^2+1)}\,du \\ &= \arctan u + \int \frac{1}{u(u^2+1)}\,du.\end{aligned}$$

Παρατηρώντας ότι

$$\frac{1}{u(u^2+1)} = \frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+1}$$

έχουμε

$$\int \frac{1}{u(u^2+1)}\,du = \int \Big(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+1}\Big)\,du = \int \frac{1}{u}\,du - \int \frac{u}{u^2+1}\,du = \ln u - \frac{1}{2}\ln(u^2+1).$$

Από τα παραπάνω και αφού $e^x = u$, παίρνουμε

$$\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\,dx = \arctan(e^x) + x - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1).$$

Άσκηση 6.7. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα*

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx$$

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}\sin x\,dx &= \int \frac{1}{1-\cos^2 x}\sin x\,dx \\ &\overset{u=\cos x,\ du=-\sin x dx}{=} -\int \frac{1}{1-u^2}\,du \\ &= -\int \frac{1}{(1+u)\cdot(1-u)}\,du \\ &= -\frac{1}{2}\Big(\int \frac{1}{1+u}\,du + \int \frac{1}{1-u}\,du\Big) \\ &= -\frac{1}{2}\big(\ln|1+u| - \ln|1-u|\big) = -\frac{1}{2}\ln\frac{|1+u|}{|1-u|} \\ &= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|.\end{aligned}$$

Άσκηση 6.8. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα*

$$\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$$

Λύση: Θέτοντας $x = t^2$, $dx = 2tdt$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}\ dx &= 2\int \frac{\arctan t}{t(1+t^2)} t\ dt \\ &= 2\int \frac{\arctan t}{1+t^2}\ dt \\ &= 2\int \arctan t(\arctan t)'\ dt \\ &= \int \left((\arctan t)^2\right)'\ du \\ &= (\arctan t)^2 = (\arctan x)^2.\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6.9. *(α) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \cosh^2 x\ dx$.*

(β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \sqrt{1+x^2}\ dx$.

Λύση: (α) Θέτουμε

$$I = \int \cosh^2 x\ dx$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}I = \int \cosh x \cosh x\ dx = \int \cosh x(\sinh x)'\ dx &= \cosh x \sinh x - \int (\cosh x)' \sinh x\ dx \\ &= \cosh x \sinh x - \int \sinh^2 x\ dx \\ &= \cosh x \sinh x - \int (\cosh^2 x - 1)\ dx \\ &= \cosh x \sinh x - \int \cosh^2 x\ dx + x \\ &= \cosh x \sinh x - I + x\end{aligned}$$

και άρα

$$I = \int \cosh^2 x\ dx = \frac{1}{2}(\cosh x \sinh x + x)$$

(β) Θέτοντας $x = \sinh t$ και $dx = (\sinh t)'dt = \cosh t\ dt$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2}\ dx = \int \sqrt{1+\sin^2 t}\cosh t\ dt &= \int \cosh^2 t\ dt \\ &= \frac{1}{2}(\cosh t \sinh t + t)\end{aligned}$$

όπου όπως έχουμε δεί στο Κεφάλαιο με τις Υπερβολικές Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$t = \sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

6.6. Γεωμετρικές Εφαρμογές του ολοκληρώματος

6.6.1. Εμβαδά επίπεδων χωρίων. Αποδεικνύεται το εξής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.14. *Το εμβαδό του επίπεδου χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις δύο συνεχών συναρτήσεων $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ και τις κάθετες ευθείες $x = a$ και $x = b$ δίνεται από τον τύπο*

$$E = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

Ειδικότερα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και των κάθετων $x = a$ και $x = b$ δίνεται από τον τύπο

$$E = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.13. Έστω $a, b > 0$. Η συνάρτηση $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ έχει γραφική παράσταση το τμήμα της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, που βρίσκεται πάνω από τον x-άξονα. Επομένως το εμβαδό της έλλειψης είναι

$$E = 2\int_{-a}^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 2ab\int_0^\pi \cos^2 t\, dt = \pi ab.$$

6.6.2. Μήκος επίπεδης καμπύλης. Με τον όρο *(επίπεδη) καμπύλη* θα εννοούμε ένα υποσύνολο του Γ του $\mathbb{R}^2$ για το οποίο υπάρχει ένα κλειστό φραγμένο διάστημα $[a, b]$ του $\mathbb{R}$ και δύο συνεχείς συναρτήσεις $x(t), y(t) : [a, b] \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε το Γ να είναι το σύνολο όλων των $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ με $x = x(t)$ και $y = y(t)$ με $t \in [a, b]$, δηλαδή

$$\Gamma = \{(x(t), y(t)) : t \in [a, b]\}$$

Το ζεύγος $(x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, των συναρτήσεων $x(t), y(t)$ λέγεται *παραμετρική αναπαράσταση* της καμπύλης. Αν οι συναρτήσεις $x(t), y(t)$ είναι επιπλέον και παραγωγίσιμες με συνεχείς παραγώγους τότε η παραμετρική αναπαράσταση $(x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ θα καλείται *συνεχώς διαφορίσιμη*. Η παραμετρική αναπαράσταση $(x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ της καμπύλης Γ θα καλείται $1-1$ αν για κάθε $(x, y) \in \Gamma$ υπάρχει *μοναδικό* $t \in [a, b]$ με $x = x(t)$ και $y = y(t)$. Τα *άκρα* της καμπύλης Γ ορίζονται να είναι τα σημεία $A = (x(a), y(a))$ και $B = (x(b), y(b))$. Αν τα άκρα ταυτίζονται η καμπύλη καλείται *κλειστή*. Αν επιπλέον για κάθε άλλο σημείο (x, y) της καμπύλης εκτός των άκρων υπάρχει μοναδικό $t \in (a, b)$ με $x = x(t)$ και $y = y(t)$ τότε η καμπύλη καλείται *απλή κλειστή*.

Μια καμπύλη Γ καλείται *ευθυγραμμίσιμη* αν έχει πεπερασμένο μήκος [1]. Αποδεικνύεται ότι αν η καμπύλη Γ δίνεται από μια $1-1$ συνεχώς διαφορίσιμη παραμετρική αναπαράσταση $(x(t), y(t))$ $t \in [a, b]$ τότε είναι ευθυγραμμίσιμη και το μήκος $L(\Gamma)$ της καμπύλης δίνεται από τον τύπο

$$L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt \tag{6.13}$$

Αποδεικνύεται επίσης ότι ο παραπάνω τύπος ισχύει και στην περίπτωση των απλών κλειστών καμπύλων.

[1] Το *μήκος* της Γ ορίζεται ως το ελάχιστο άνω φράγμα (supremum) όλων των μηκών των τεθλασμένων γραμμών με κορυφές επί της καμπύλης Γ

Αν συμβολίσουμε με $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$ το μήκος του διανύσματος του $\mathbb{R}^2$ με άκρα τα σημεία $(0,0)$ και (x,y) και θέσουμε $\Gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ τότε ο τύπος (6.13) γράφεται υπό την μορφή

$$L(\Gamma) = \int_a^b \|\Gamma'(t)\|\ dt \tag{6.14}$$

Παραδειγμα 6.14. Το μήκος ενός κύκλου ακτίνας $R > 0$ είναι $2\pi R$. Πράγματι, οι παραμετρικές εξισώσεις ενός κύκλου ακτίνας $R > 0$ και κέντρου $(0,0)$ είναι

$$x(t) = R\cos t, \quad y(t) = R\sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Άρα

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}\, dt = R^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = R^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi R.$$

Ασκηση 6.10. *Υπολογίστε το μήκος της καμπύλης με παραμετρική αναπαράσταση*

$$x(t) = \cos^3 t,\ y(t) = \sin^3 t,\ t \in [0, \pi/2]$$

ΛΥΣΗ: Έχουμε

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(3\ cos^2 t\ (-sint))^2\ +\ (3\ sin^2 t\ cost)^2}\ dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9\ cos^4 t\ sin^2 t\ +\ 9\ sin^4 t\ cos^2 t}\ dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9\ cos^2 t\ sin^2 t\ (cos^2 t + sin^2 t)}\ dt \\
&= \int_0^{\pi/2} 3\ |cost \cdot sint|\ dt = 3\int_0^{\pi/2} cost \cdot sint\ dt
\end{aligned}$$

(αφού $\sin t, \cos t \geq 0$ όταν $0 \leq t \leq \pi/2$). Επειδή

$$\int_0^{\pi/2} cost \cdot sint\ dt = \int_0^{\pi/2} (sint)' \cdot sint\ dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\sin^2 t)'\ dt = \frac{1}{2}\left(\sin^2(\pi/2) - \sin^2(0)\right) = 1/2$$

παίρνουμε τελικά $L = 3/2$.

Στην ειδική περίπτωση που η καμπύλη Γ είναι το γράφημα

$$Gr(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x) \text{ και } x \in [a,b]\}$$

μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με f' συνεχή τότε μία $1-1$ συνεχώς διαφορίσιμη αναπαράσταση της Γ είναι η $x(t) = t$ και $y(t) = f(t)$ με $t \in [a,b]$ οπότε ο τύπος (6.13) γράφεται

$$L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\ dt \tag{6.15}$$

Ασκηση 6.11. *Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης με εξίσωση* $y = \ln(1-x^2)$, $x \in [0, 1/2]$.

Λύση: Έχουμε $f(x) = \ln(1 - x^2)$ και άρα

$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}(1-x^2)' = \frac{-2x}{1-x^2}$$

για κάθε $x \in [0, 1/2]$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}
L = \int_0^{1/2} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}}\, dx &= \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}}\, dx \\
&= \int_0^{1/2} \frac{1+x^2}{1-x^2}\, dx \\
&= \int_0^{1/2} \frac{2-(1-x^2)}{1-x^2}\, dx \\
&= \int_0^{1/2} \left(\frac{2}{1-x^2} - 1 \right) dx \\
&= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - 1 \right) dx \\
&= [-\ln(1-x) + \ln(1+x) - x]_0^{1/2} \\
&= \left[\ln \frac{1+x}{1-x} - x \right]_0^{1/2} = \ln 3 - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Κεφάλαιο 7

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

7.1. Βασικές έννοιες στον χώρο $\mathbb{R}^n$

Ο *διανυσματικός χώρος* $\mathbb{R}^n$ είναι το σύνολο όλων των *σημείων (ή διανυσμάτων)* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, (όπου $x_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $1 \leq i \leq n$), εφοδιασμένο με τις πράξεις της *πρόσθεσης*:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

για κάθε $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ και του *βαθμωτού πολλαπλασιασμού*:

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Τα διανύσματα $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$ αποτελούν την λεγόμενη *συνήθη βάση* του $\mathbb{R}^n$. Παρατηρείστε ότι αν $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ είναι ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i.$$

Ορισμος 7.1. *Για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε την **νόρμα)** του $\mathbf{x}$ να είναι η ποσότητα*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Επίσης είναι εύκολο να διαπιστώσουμε τις παρακάτω ιδιότητες της νόρμας:

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ και $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$.
2. $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$.
3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Ορισμος 7.2. *Για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, η ποσότητα*

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$$

*καλείται **απόσταση** των $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$.*

Από τις ιδιότητες της νόρμας προκύπτει ότι

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$$

και
$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\| + \|\mathbf{z}-\mathbf{y}\|$$
για κάθε $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

Ορισμος 7.3. *Έστω $\mathbf{x}_0=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ και $\delta>0$. Το σύνολο*
$$B_\delta(\mathbf{x}_0)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|<\delta\}$$
καλείται ***ανοικτή μπάλα του $\mathbb{R}^n$ κέντρου $\mathbf{x}_0$ και ακτίνας δ.***

Με άλλα λόγια το $B_r(\mathbf{x}_0)$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ που απέχουν απο το $\mathbf{x}_0$ απόσταση *γνήσια μικρότερη* του δ. Οι ανοικτές μπάλες $B_\delta(\mathbf{x}_0)$ καλούνται και *(βασικές ανοικτές) περιοχές* του $\mathbf{x}_0$.

7.2. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Οι συναρτήσεις αυτές ταξινομούνται ως εξής:

(I) ***Πραγματικές*** (ή ***βαθμωτές.***) Είναι οι συναρτήσεις της μορφής $f : X \to \mathbb{R}$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Μερικά παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

1) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y)=x^2+y^2$.

2) $f:D\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ όπου $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}$ είναι ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος του $\mathbb{R}^2$.

3) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.

4) $f:B\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y,z)=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$, όπου $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 1\}$ είναι η κλειστή μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^3$.

Στην Φυσική συναρτήσεις της μορφής $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ χρησιμοποιούνται για να αντιστοιχίσουν βαθμωτά φυσικά μεγέθη (όπως πχ. η θερμοκρασία, η ατμοσφαιρική πίεση) στα σημεία του χώρου.

(II) ***Διανυσματικές Συναρτήσεις μιας μεταβλητής.*** Είναι συναρτήσεις της μορφής $f:X\to\mathbb{R}^m$ όπου $X\subseteq\mathbb{R}$ και $m\ge 2$. Συνήθως το σύνολο X είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$. Μερικά παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

1) $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ με τύπο $f(t)=(\cos t,\sin t)$.

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ με τύπο $f(t)=(t,t^2)$.

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ με τύπο $f(t)=(\cos t,\sin t,t)$.

4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ με τύπο $f(t)=\big(t,t^2,\dots,t^m\big)$.

Οι συναρτήσεις $f:X\to\mathbb{R}^m$ με $X\subseteq\mathbb{R}$ γράφονται πάντα στην μορφή
$$f(t)=(f_1(t),f_2(t),\dots,f_m(t)),\quad t\in X\subseteq\mathbb{R}$$
όπου $f_1(t),\dots,f_m(t)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής από το X στο $\mathbb{R}$.

Αν $X=I$ είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ τότε οι συναρτήσεις $f:I\to\mathbb{R}^m$ μετασχηματίζουν το διάστημα I του $\mathbb{R}$ σε μια *m-διάστατη καμπύλη*. Πχ. η $f(t)=(\cos t, sint)$, μετασχηματίζει το διάστημα $[0, 2\pi]$ στον μοναδιαίο κύκλο, η $f(t) = (t, t^2)$ μετασχηματίζει την ευθεία στην παραβολή $y = x^2$. Θεωρώντας τη μεταβλητή t σαν χρόνο συναρτήσεις της μορφής $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ χρησιμοποιούνται στην Φυσική για να απεικονίζουν την θέση ενός κινητού στον χώρο την ξρονική στιγμή t.

(III) ***Διανυσματικές Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.*** Είναι συναρτήσεις της μορφής $f : X \to \mathbb{R}^m$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $n, m \geq 2$ (αν $n = m$ οι συναρτήσεις αυτές καλούνται και *διανυσματικά πεδία*).

Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$f(x,y,z) = \left(-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(x,y) = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$.

3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(x,y) = (-y, x)$.

Τα διανυσματικά πεδία χρησιμοποιούνται στην Φυσική για να περιγράψουν ένα πεδίο βαρύτητας, ή ένα πεδίο ταχύτητας ρευστού.

Αν $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ τότε το *γράφημα* της f ορίζεται να είναι το σύνολο

$$Gr(f) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \ \mathbf{x} \in X \text{ και } \mathbf{y} = f(\mathbf{x})\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}. \tag{7.1}$$

Ειδικότερα αν $m = 1$ δηλαδή η f είναι βαθμωτή, γράφοντας το $\mathbf{x}$ ως $(x_1, \dots, x_n)$ και θέτοντας $x_{n+1} = y$ το γράφημα παίρνει και την μορφή:

$$Gr(f) = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ (x_1, \dots, x_n) \in X \text{ και } x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\} \tag{7.2}$$

οπότε αν επιπλέον $X = \mathbb{R}^n$,

$$Gr(f) = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \tag{7.3}$$

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x,y) = x^2 + y^2$ έχει γράφημα το σύνολο $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$ που αποτελεί μια διδιάστατη επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ (είναι το λεγόμενο *παραβολοειδές* που προκύπτει από την περιστροφή της $y = x^2$ γύρω απο τον άξονα των x). Γενικά το γράφημα μιας βαθμωτής συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ αποτελεί μια "n-διάστατη επιφάνεια" του $\mathbb{R}^{n+1}$.

7.3. Μερικές παράγωγοι πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών

ΟΡΙΣΜΟΣ 7.4. *(Μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Το όριο*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

αν υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός καλείται **μερική παράγωγος ως προς x της συνάρτησης f στο σημείο** *(x_0, y_0) και συμβολίζεται με*

$$f_x(x_0, y_0) \quad ή \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Ομοίως το όριο

$$\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

αν υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός καλείται **μερική παράγωγος ως προς** y **της συνάρτησης** f **στο σημείο** (x_0,y_0) *και συμβολίζεται με*

$$f_y(x_0,y_0) \quad ή \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Παραδειγμα 7.1. Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y)=x^3+y^3+x^2y+xy^2$. Για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f_x(x,y)=3x^2+2xy+y^2$ και $f_y(x,y)=3y^2+x^2+2xy$.

Παραδειγμα 7.2. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y)=|x|+|y|$. Τότε οι $f_x(0,0)$ και $f_y(0,0)$ δεν υπάρχουν. Πράγματι,

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

που ως γνωστόν δεν υπάρχει (αφού τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά). Ομοίως

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{|y|}{y}$$

που πάλι δεν υπάρχει.

(β) Έχουμε

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|x|^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

και

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{|y|^2}}{y}=\lim_{x\to 0}\frac{|y|}{y}$$

Όπως και στο (α) και τα δύο αυτά όρια δεν υπάρχουν.

Ορισμος 7.5. *(Μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης) Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε οι $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ υπάρχουν σε κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Έστω $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. Τα όρια*

$$f_{xx}(x_0,y_0)=(f_x)_x(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f_x(x,y_0)-f_x(x_0,y_0)}{x-x_0},$$

$$f_{xy}(x_0,y_0)=(f_x)_y(x_0,y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f_x(x_0,y)-f_x(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

$$f_{yx}(x_0,y_0)=(f_y)_x(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f_y(x,y_0)-f_y(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

$$f_{yy}(x_0,y_0)=(f_y)_y(x_0,y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f_y(x_0,y)-f_y(x_0,y_0)}{y-y_0},$$

αν υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί καλούνται ***μερικές παράγωγοι της*** f ***στο*** (x_0,y_0) ***δεύτερης τάξης****. Ειδικότερα οι $f_{xy}(x_0,y_0)$ και $f_{yx}(x_0,y_0)$ καλούνται* **μεικτές** *μερικές παράγωγοι της f στο σημείο (x_0,y_0) δεύτερης τάξης.*

Επίσης χρησιμοποιούνται και οι συμβολισμοί

$$f_{xx}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\quad f_{xy}(x_0,y_0)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$$

$$f_{yx}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\quad f_{yy}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$$

Παραδειγμα 7.3. Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y)=x^3+y^3+x^2y+xy^2$. Για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, έχουμε $f_x(x,y)=3x^2+2xy+y^2$, $f_y(x,y)=3y^2+x^2+2xy$ και

$$f_{xx}(x,y)(=(f_x)_x(x,y))=6x+2y,\quad f_{xy}(x,y)(=(f_x)_y(x,y))=2x+2y,$$
$$f_{yx}(x,y)(=(f_y)_x(x,y))=2x+2y\quad f_{yy}(x,y)(=(f_y)_y(x,y))=6y+2x.$$

Στο παραπάνω παράδειγμα οι μεικτές μερικές παράγωγοι f_{xy} και f_{yx} είναι ίσες. Αυτό δεν είναι τυχαίο διότι για την συνάρτηση του παραπάνω παραδείγματος ισχύουν οι υποθέσεις του ακόλουθου θεωρήματος.

Θεωρημα 7.6. *(Schwarz) Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε οι μερικές παράγωγοι της f εως και δεύτερης τάξης υπάρχουν σε κάθε σημείο του A και είναι συνεχείς. Τότε οι μεικτές παράγωγοι f_{xy} και f_{yx} της f είναι ίσες.*

7.4. Τοπικά ακρότατα πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών

Ορισμος 7.7. *Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ και $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.*

*(1) Λέμε ότι η f έχει στο (x_0,y_0) **τοπικό μέγιστο** αν υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε $f(x_0,y_0)\geq f(x,y)$ για όλα τα $(x,y)\in B_\delta(x_0,y_0)$.*

*(2) Λέμε ότι η f έχει στο (x_0,y_0) **τοπικό ελάχιστο** αν υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε $f(x_0,y_0)\leq f(x,y)$ για όλα τα $(x,y)\in B_\delta(x_0,y_0)$.*

*(3) Λέμε ότι η f έχει στο το x_0 **τοπικό ακρότατο** αν η f έχει στο x_0 είναι τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο.*

Παρατηρηση 7.1. Παρατηρείστε ότι ένα σημείο $(x_0,y_0)\in A$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ αν και μόνο αν για κάθε $\delta>0$ υπάρχουν σημεία $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in B_\delta(x_0,y_0)$ τέτοια ώστε

$$f(x_1,y_1)<f(x_0,y_0)<f(x_2,y_2)$$

Ορισμος 7.8. *Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ και $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. Λέμε ότι το (x_0,y_0) είναι **κρίσιμο** (ή **στάσιμο**) σημείο της f αν $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$.*

Παρατηρηση 7.2. Ο τύπος του εφαπτομένου επιπέδου της επιφάνειας $z=f(x,y)$ (δηλαδή της γραφικής παράστασης της f) στο (x_0,y_0) είναι

$$z=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Άρα αν το (x_0,y_0) είναι κρίσιμο σημείο τότε έχουμε ότι $z=f(x_0,y_0)$ δηλαδή το εφαπτόμενο επίπεδο της f στο (x_0,y_0) είναι παράλληλο προς το xy-επίπεδο.

Πρόταση 7.9. ***(Σχέση τοπικών ακροτάτων και κρίσιμων σημείων)*** *Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε οι $f_x(x_0, y_0)$ και $f_y(x_0, y_0)$ υπάρχουν. Αν το (x_0, y_0) είναι τοπικό ακρότατο της f τότε το (x_0, y_0) είναι κρίσιμο σημείο της f.*

Παρατηρηση 7.3. Το αντίστροφο της Πρότασης 7.9 δεν ισχύει. Πχ. αν $f(x, y) = x^3 + y^3$ τότε το $(0, 0)$ είναι κρίσιμο σημείο της f αλλά δεν είναι τοπικό ακρότατο.

Ορισμος 7.10. *Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Ένα κρίσιμο σημείο της f που δεν είναι τοπικό ακρότατο καλείται* ***σαγματικό*** *σημείο της f.*

Παρατηρηση 7.4. Απο τις Παρατηρήσεις 7.1 και 7.2, συμπεραίνουμε ότι ένα σημείο (x_0, y_0) είναι σαγματικό σημείο της $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ αν και μόνο αν το εφαπτόμενο επίπεδο της f στο (x_0, y_0) (το οποίο όπως είδαμε είναι παράλληλο προς το xy-επίπεδο, λόγω του ότι το (x_0, y_0) είναι κρίσιμο σημείο της f) *δεν αφήνει το γράφημα της f από την μία μεριά του.* Γενικά το γράφημα της f γύρω απο ένα σαγματικό σημείο μοιάζει με την επιφάνεια μιας σέλας αλόγου εξ ου και το όνομα. Κατά μια έννοια τα σαγματικά σημεία πραγματικών συναρτήσεων δύο μεταβλητών είναι όπως τα σημεία *καμπής* πραγματικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής.

7.5. Το Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου συνάρτησης δύο μεταβλητών

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε μια επέκταση ενός γνωστού κριτηρίου για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Θυμίζουμε ότι το κριτήριο αυτό έλεγε το εξής:

Θεωρημα 7.11. *(Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έστω $x_0 \in I$ κρίσιμο σημείο της f (δηλ. $f'(x_0) = 0$) και τέτοιο ώστε η $f''(x_0)$ υπάρχει.*

(1) Αν $f''(x_0) > 0$ τότε η f έχει στο x_0 τοπικό ελάχιστο.

(2) Αν $f''(x_0) < 0$ τότε η f έχει στο x_0 τοπικό μέγιστο.

Αποδειξη. (1) Έστω $f''(x_0) > 0$. Επειδή το x_0 είναι κρίσιμο σημείο έχουμε $f'(x_0) = 0$ και άρα

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$$

Συνεπώς μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$$

Άρα

$$x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f'(x) < 0 \text{ και } x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f'(x) > 0$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(x_0 - \delta, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0, x_0 + \delta)$ και άρα το x_0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.

(2) Προκύπτει απο το (1) θέτοντας $g = -f$. □

Κλασσικά παραδείγματα που επιβεβαιώνουν το παραπάνω κριτήριο είναι οι συνάρτήσεις $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2$. Πράγματι, η f έχει ολικό ελάχιστο στο 0 και $f''(0) = 2 > 0$, η g έχει ολικό μέγιστο στο 0 και $g''(0) = -2 < 0$. Αν $f''(x_0) = 0$ τότε το παραπάνω κριτήριο δεν αποφαίνεται. Πχ. η $h(x) = x^3$ δεν έχει τοπικά ακρότατα (ως γνησίως αύξουσα) και η $\sigma(x) = x^4$ έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$ και για τις δύο συναρτήσεις έχουμε $h''(0) = \sigma''(0) = 0$.

Το παραπάνω κριτήριο γενικεύεται και για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Πρίν διατυπώσουμε το αντίστοιχο κριτήριο δίνουμε τον εξής ορισμό που επεκτείνει την έννοια της δεύτερης παραγώγου για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

ΟΡΙΣΜΟΣ 7.12. *Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Υποθέτουμε ότι οι μερικές παράγωγοι της f έως και δεύτερης τάξης υπάρχουν στο (x_0, y_0). Ο Εσσιανός πίνακας της f στο (x_0, y_0) είναι ο πίνακας*

$$\begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \tag{7.4}$$

τον οποίο θα συμβολίζουμε με $f''(x_0, y_0)$.

Στα επόμενα 2θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι κλάσης C^2 αν οι συναρτήσεις των μερικών παραγώγων της έως και δεύτερης τάξης ορίζονται και είναι συνεχείς συναρτήσεις. Θυμίζουμε ότι αν η f είναι κλάσης C^2, τότε $f_{xy} = f_{yx}$ και άρα ο πίνακας $f''(x_0, y_0)$ θα είναι συμμετρικός.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7.13. *(Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για συναρτήσεις δύο μεταβλητών) Έστω $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ κρίσιμο σημείο της f (δηλαδή $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$). Έστω*

$$f''(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

ο Εσσιανός πίνακας της f στο (x_0, y_0) και έστω

$$\Delta(x_0, y_0) = \det f''(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 \tag{7.5}$$

η ορίζουσά του. Υποθέτουμε ότι

$$\Delta(x_0, y_0) \neq 0.$$

(1) *Αν $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ και $\Delta(x_0, y_0) > 0$ τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο (x_0, y_0).*
(2) *Αν $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ και $\Delta(x_0, y_0) > 0$ τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο (x_0, y_0).*
(3) *Αν $\Delta(x_0, y_0) < 0$ τότε το (x_0, y_0) είναι σαγματικό σημείο της f.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 7.1. (α) Αν $\Delta(x_0, y_0) = 0$ τότε το παραπάνω κριτήριο δεν μπορεί να αποφανθεί αν το (x_0, y_0) είναι τοπικό ακρότατο ή όχι. Στις περιπτώσεις αυτές πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της συνάρτησης που μελετούμε και να εξάγουμε πληροφορία για το εν λόγω σημείο (δείτε σχετικά τα Παραδείγματα 7.6, 7.7 παρακάτω).

(β) Επίσης υπάρχουν κάποιες λίγες περιπτώσεις (ειδικά αν η συνάρτηση που μελετούμε έχει πολύ απλό τύπο) όπου το κριτήριο δεν χρειάζεται να εφαρμοστεί. Πχ. μπορούμε να δούμε εύκολα ότι το $(0,0)$ είναι το μοναδικό τοπικό ακρότατο που έχει η $f(x,y)=x^2+y^2$. Πράγματι, για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=x^2+y^2\geq 0=f(0,0)$ και άρα η f έχει στο $(0,0)$ ολικό ελάχιστο. Αν τώρα υπήρχε και άλλο τοπικό ακρότατο τότε θα έπρεπε αυτό να ήταν κρίσιμο σημείο ισοδύναμα θα ήταν λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x = 0 \\ f_y(x,y) &= 2y = 0 \end{aligned}$$

Επειδή το παραπάνω σύστημα έχει μοναδική λύση την $(0,0)$, η f δεν έχει άλλο τοπικό ακρότατο εκτός του $(0,0)$.

Παραδειγμα 7.4. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x,y)=x^3+y^3+3xy$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2+3y \\ f_y(x,y) &= 3y^2+3x \\ f_{xx}(x,y) &= 6x \\ f_{yy}(x,y) &= 6y \\ f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 3 \end{aligned}$$

και άρα $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$. Υπολογίζουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2+3y = 0 \\ f_y(x,y) &= 3y^2+3x = 0 \end{aligned}$$

Η πρώτη εξίσωση γράφεται $y=-x^2$ και άρα αντικαθιστώντας στην δεύτερη παίρνουμε

$$x^4+x=0 \Leftrightarrow x(x^3+1)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=-1$$

Άρα έχουμε δύο πιθανά ακρότατα, τα $(0,0)$ και $(-1,-1)$. Για κάθε (x,y) είναι

$$\Delta(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-\left(f_{xy}(x,y)\right)^2=36xy-9$$

Έχουμε $\Delta(0,0)=-9<0$ και άρα το $(0,0)$ είναι σαγματικό. Επίσης $\Delta(-1,-1)=36-9>0$ και $f_{xx}(-1,-1)=-6<0$. Άρα το $(-1,-1)$ είναι τοπικό μέγιστο.

Παραδειγμα 7.5. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x,y)=x^3+3xy^2-3x^2-3y^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

Λύση: Είναι

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2+3y^2-6x \\ f_y(x,y) &= 6xy-6y \\ f_{xx}(x,y) &= 6x-6 \\ f_{yy}(x,y) &= 6x-6 \\ f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 6y \end{aligned}$$

και άρα $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Υπολογίζουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0$$
$$f_y(x,y) = 6xy - 6y = 0$$

Η δεύτερη εξίσωση γράφεται $6y(x-1) = 0$ και άρα

$$y = 0 \text{ ή } x = 1 \tag{7.6}$$

Για $y = 0$ από την πρώτη εξίσωση έχουμε $3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0$ και άρα $x = 0$ ή $x = 2$. Συνεπώς τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα σημεία

$$(0,0) \quad \text{καί} \quad (2,0).$$

Ομοίως για $x = 1$ η πρώτη εξίσωση δίνει $3 + 3y^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 1 = 0$ και άρα $y = 1$ ή $y = -1$. Οπότε έχουμε και τα σημεία

$$(1,1) \quad \text{και} \quad (1,-1).$$

Συνολικά έχουμε τέσσερα πιθανά τοπικά ακρότατα: $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$ και $(1,-1)$. Τώρα για κάθε (x,y) είναι

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2 = (6x-6)\cdot(6x-6) - 36y^2$$

Έχουμε

(1) $\Delta(0,0) = 36 > 0$, $f_{xx}(0,0) = -6 < 0$ και άρα στο $(0,0)$ η f έχει τοπικό μέγιστο.

(2) $\Delta(2,0) = 36 > 0$, $f_{xx}(2,0) = 6 > 0$ και άρα στο $(0,2)$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.

(3) $\Delta(1,1) = -36 < 0$ και άρα το $(1,1)$ είναι σαγματικό.

(4) $\Delta(1,-1) = -36 < 0$ και άρα το $(1,-1)$ είναι σαγματικό.

Παραδειγμα 7.6. Βρείτε (αν υπάρχουν) τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^4$.

Λύση: Έχουμε

$$f_x(x,y) = 4x^3 - 4(x-y)^3, \quad f_y(x,y) = 4y^3 + 4(x-y)^3,$$
$$f_{xx}(x,y) = 12x^2 - 12(x-y)^2, \; f_{yy}(x,y) = 12y^2 - 12(x-y)^2$$

και

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 12(x-y)^2$$

και άρα $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$f_x(x,y) = 4x^3 - 4(x-y)^3 = 0$$
$$f_y(x,y) = 4y^3 + 4(x-y)^3 = 0$$

Με πρόσθεση των εξισώσεων, παίρνουμε ότι $x^3 + y^3 = 0$ ή ισοδύναμα

$$y = -x \tag{7.7}$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση έχουμε

$$4x^3 - 4(x-y)^3 = 4x^3 - 4(2x)^3 = 4x^3 - 32x^3 = -28x^3 = 0$$

και άρα $x = 0$. Οπότε απο την (7.7) παίρνουμε ότι το μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι το $(0,0)$. Έχουμε $f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = f_{xy}(0,0) = 0$ και άρα $\Delta(0,0) = 0$. Συνεπώς απο το κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το αν το $(0,0)$ είναι ή όχι τοπικό ακρότατο. Όμως παρατηρούμε ότι

(1) $f(0,0) = 0$,

(2) για κάθε σημείο της ευθείας $y = x$ διάφορο του $(0,0)$, είναι $f(x,y) = f(x,x) = 2x^4 > 0$ και

(3) για κάθε σημείο της ευθείας $y = -x$ διάφορο του $(0,0)$, είναι $f(x,y) = f(x,-x) = 2x^4 - 16x^4 < 0$.

Άρα σε *κάθε περιοχή του* $(0,0)$ μπορούμε να βρούμε δύο σημεία τέτοια ώστε η τιμή της f στο ένα από αυτά να είναι αυστηρά μικρότερη του $f(0,0)$ ενώ η τιμή στο άλλο να είναι αυστηρά μεγαλύτερη του $f(0,0)$. Αυτό σημαίνει ότι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f είναι σαγματικό σημείο. Άρα η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

Παραδειγμα 7.7. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

Λύση: Η $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4x^3 - 4(x-y) = 4x^3 - 4x + 4y \\ f_y(x,y) &= 4y^3 + 4(x-y) = 4y^3 + 4x - 4y \\ f_{xx}(x,y) &= 12x^2 - 4 \\ f_{yy}(x,y) &= 12y^2 - 4 \\ f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 4 \end{aligned}$$

όλες συνεχείς. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4x^3 - 4(x-y) = 0 \\ f_y(x,y) &= 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{aligned}$$

με πρόσθεση κατά μέλη δίνει ότι $x^3 = -y^3$ ισοδύναμα

$$y = -x$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση βρίσκουμε ότι $4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-2) = 0$ και άρα

$$x = 0 \text{ ή } x = \sqrt{2} \text{ ή } x = -\sqrt{2}$$

Συνεπώς τα πιθανά τοπικά ακρότατα είναι τα σημεία

$$(0,0), \quad (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \ \text{ και } \ (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Έχουμε

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2 = (12x^2-4)\cdot(12y^2-4) - 16$$

(1) $\Delta(0,0) = 0$ και άρα δεν μπορούμε να αποφανθούμε από το Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου για το αν το $(0,0)$ είναι ή όχι τοπικό ακρότατο. Παρατηρούμε ότι

(α) $f(0,0) = 0$,

(β) για κάθε $0 < x \leq 1$, είναι $f(x,0) = x^4 - 2x^2 < 0$ και

(γ) για κάθε $x = y \neq 0$ είναι $f(x,y) = f(x,x) = 2x^4 > 0$.

Τα παραπάνω δείχνουν ότι *σε κάθε περιοχή του* $(0,0)$ μπορούμε να βρούμε δύο σημεία που στο ένα η τιμή της f είναι μικρότερη του $f(0,0)$ ενώ η τιμή στο άλλο να είναι μεγαλύτερη του $f(0,0)$, πράγμα που σημαίνει ότι το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο.

(2) Όπως εύκολα βλέπουμε

$$\Delta(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \Delta(\sqrt{2}, \sqrt{2}) > 0$$

και $f_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) > 0$ οπότε στα σημεία $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ και $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.

Άρα η f έχει ακριβώς δύο τοπικά ακρότατα που είναι και τα δύο τοπικά ελάχιστα.