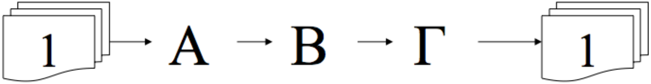
Γραμμικός Προγραμματισμός

Βελτιστοποίηση Δικτύων

25 Νοεμβρίου 2022

Παράδειγμα: Ένα πρόβλημα γραμμής παραγωγής



Μηχανή	προϊόν 1	προϊόν 2	προϊόν 3	προϊόν 4	διαθεσιμότητα (ώρες/εβδ.)
Α	1	1	1	3	168
Β	1	3	2	2	130
Γ	2	5	3	1	120
Κέρδος	5	6	7	20	

Το συνολικό κέρδος (από την παραγωγή μιας εβδομάδας) είναι:

$$k = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 20x_4$$

Περιορισμοί από τη χρήση των μηχανών

Μηχανή	προϊόν 1	προϊόν 2	προϊόν 3	προϊόν 4	διαθεσιμότητα (ώρες/εβδ.)
Α	1	1	1	3	168
Β	1	3	2	2	130
Γ	2	5	3	1	120
Κέρδος	5	6	7	20	

Ωστόσο υπάρχουν οι εξής περιορισμοί από τις δυνατότητες των μηχανών:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &\leq 168 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &\leq 130 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 &\leq 120 \end{aligned}$$

Με μοναδικό κριτήριο τη σχέση τιμής/χρόνο παραγωγής

Μηχανή	προϊόν 1	προϊόν 2	προϊόν 3	προϊόν 4	διαθεσιμότητα (ώρες/εβδ.)
Α	1	1	1	3	168
Β	1	3	2	2	130
Γ	2	5	3	1	120
Ώρες	4	9	6	6	
Κέρδος	5	6	7	20	
Απόδοση	1.25	0.67	1.17	3.33	

- Σε απόδοση (κέρδος ανά ώρα επεξεργασίας) προηγείται το προϊόν 4.
- Μπορούν να παραχθούν $\min(168/3, 130/2, 120/1) = 56$ μονάδες, οπότε το συνολικό κέρδος είναι 1120.
- Η βέλτιστη λύση είναι $(0, 0, 13.5, 51.5)$ με κέρδος 1124.5.

Το γενικό μοντέλο

μεταβλητές απόφασης

αντικειμενική συνάρτηση

$$\max / \min \sum_{i=1}^{r} c_i x_i$$

με τους περιορισμούς

$$\sum_{j=1}^{r} a_{ij} x_j \leq / = / \geq b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

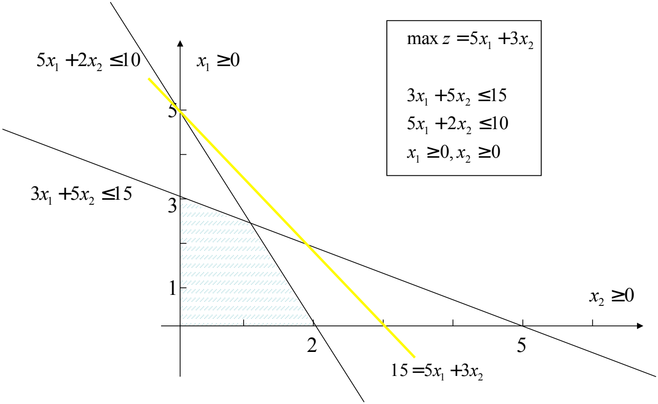
Μπορούν να είναι και αρνητικές, αλλά και τότε μπορούν να αντικατασταθούν από διαφορά δύο μη αρνητικών μεταβλητών

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, r)$$

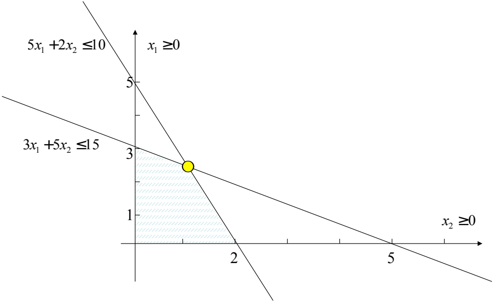
Παράδειγμα με δύο μεταβλητές

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 3x_2 \\ \\ 3x_1 + 5x_2 &\leq 15 \\ 5x_1 + 5x_2 &\leq 10 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Γραφική επίλυση



Γραφική-υπολογιστική επίλυση, I



Γραφική-υπολογιστική επίλυση, II

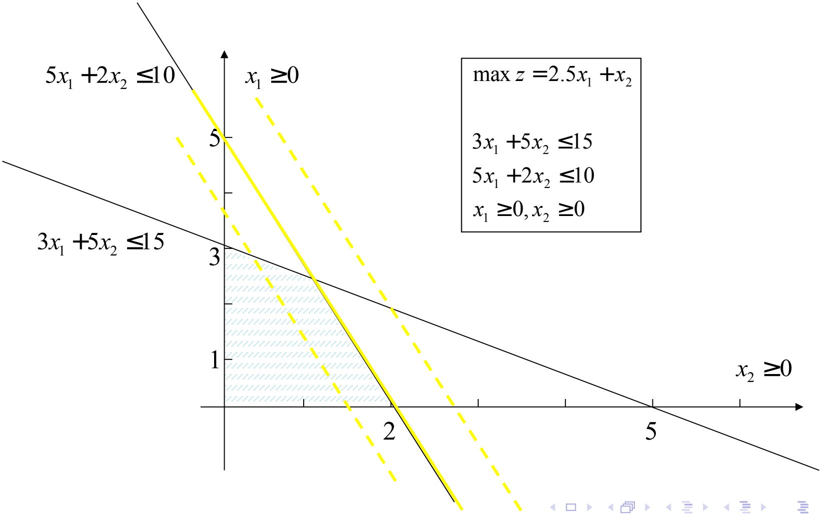
Επιλύουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &= 15 \\ 5x_1 + 5x_2 &= 10 \end{aligned}$$

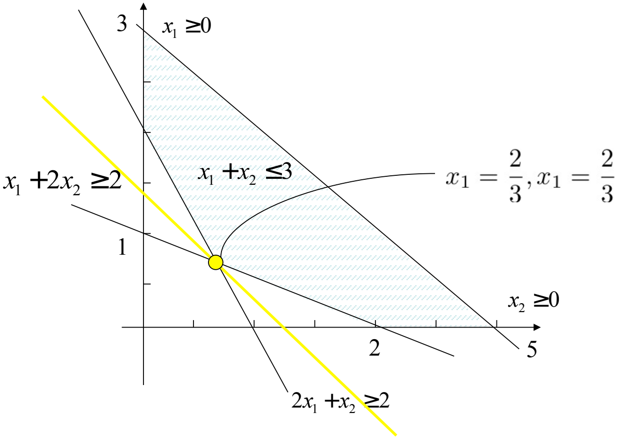
το οποίο δίνει τη λύση

$$x_1 = \frac{20}{19},\ x_2 = \frac{45}{19} \Rightarrow z = 5\frac{20}{19} + 3\frac{45}{19} = \frac{65}{19}$$

Άπειρες λύσεις



Ελαχιστοποίηση



$$
\begin{aligned}
&\min z = x_1 + x_2 \\
&2x_1 + x_2 \geq 2 \\
&x_1 + 2x_2 \geq 2 \\
&x_1 + x_2 \leq 3 \\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Πρότυπη μορφή

Οι περιορισμοί είναι ισότητες και οι σταθεροί όροι τους είναι μη αρνητικοί

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{r} a_{ij} x_j &= b_i \quad (i = 1, \ldots, n) \\ b_i &\geq 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

Μετατροπή ανισοτικού περιορισμού

Τον περιορισμό του είδους

$$\sum_{j=1}^{r} a_{ij}x_j \leq b_i$$

μετατρέπουμε εισάγοντας μια ακόμη μεταβλητή, την

$$x_{r+1} = b_i - \sum_{j=1}^{r} a_{ij}x_j$$

και ο περιορισμός παίρνει τη μορφή

$$\sum_{j=1}^{r} a_{ij}x_j + x_{r+1} = b_i$$

(Σημείωση: Η μεταβλητή αυτή είναι μη αρνητική.)

Παράδειγμα μετατροπής

$$
\begin{aligned}
\max z &= 4x_1 + 3x_2 \\
2x_1 + x_2 &\leq 12 \\
x_1 + 7x_2 &\geq 8 \\
x_1 + x_2 &= 6 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max z &= 4x_1 + 3x_2 \\
2x_1 + x_2 + x_3 &= 12 \\
x_1 + 7x_2 - x_4 &= 8 \\
x_1 + x_2 &= 6 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0 \\
x_3 &\geq 0 \\
x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Με μορφή πινάκων

$$z = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \geq \bar{0}$$

ή

$$z = cx$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Λύση: Ικανοποιεί την

Δυνατή Λύση: Ικανοποιεί

Βέλτιστη Λύση: Δυνατή λύση που βελτιστοποιεί τη z

Βασικές μεταβλητές

Ας υποτεθεί ότι από τη μορφή $Ax \leq b$ με ανισωτικούς περιορισμούς πάμε στη μορφή

$$(A, I)\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = b$$

Η διάσταση του πίνακα (A, I) που μπαίνει στον προηγούμενο τύπο είναι $m \times n$, όπου $n, (n > m)$ είναι το μήκος του διανύσματος των μεταβλητών και m είναι το πλήθος των περιορισμών. Μπορεί κανείς να μηδενίσει $n - m$ μεταβλητές και να λύσει το σύστημα εξισώσεων ως προς τις υπόλοιπες (λεγόμενες «βασικές»):

$$Bx_B = b$$

όπου το x_B προκύπτει από το αρχικό διάνυσμα $[x, s]$ απομακρύνοντας τις μη βασικές μεταβλητές. Αντίστοιχα ο πίνακας B προκύπτει από τον αρχικό απομακρύνοντας τις «άχρηστες» γραμμές και στήλες.

Βασική λύση

Επιλύοντας ως προς τις βασικές μεταβλητές προκύπτει η βασική λύση:

$$Bx_B = b \Leftrightarrow x_B = B^{-1}b$$

και

$$z = c_B x_B = c_B B^{-1} b$$

- Σε κάθε βήμα επιλέγεται η μη βασική μεταβλητή, που θα μετατραπεί σε βασική με χρήση του κριτηρίου της μέγιστης αύξησης του z.
- Επίσης επιλέγεται η βασική μεταβλητή, που θα μετατραπεί σε μη βασική, ως εκείνη, της οποίας η μεταβολή την οδηγεί πρώτη εκτός της εφικτής περιοχής.

Η μετατροπή σε τροποποιημένη μορφή (augmented/slack form) πινάκων

Από την αρχική μορφή

$$z = c^T x, \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0$$

πάμε στη μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & -c^T & 0 \\ 0 & A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

$$x \geq 0, \quad s \geq 0$$

Δυϊκό (dual) πρόβλημα

$$\begin{aligned} \max z &= cx \\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \min s &= yb \\ yA &\geq c \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

- Το δυαδικό του δυαδικού είναι το πρωτεύον.
- Εάν το πρωτεύον έχει πεπερασμένη βέλτιστη δυνατή λύση, το δυαδικό έχει επίσης πεπερασμένη δυαδική βέλτιστη λύση (και αντιστρόφως).
- Η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης των δυο προβλημάτων είναι η ίδια.

Βιβλιογραφία

- Δ. Ξηρόκωστα, *Γραμμικός προγραμματισμός*, ΕΜΠ, 1977.
- F. Hillier, G. Lieberman, *Introduction to operations research*, 7th ed., McGraw-Hill.
- Robert Vanderbei, *Linear programming: Foundations and extensions*, Princeton University, 2001
- N. Karmarkar, *A new polynomial-time algorithm for linear programming*, Combinatorica, No. 4, pp. 373-395, 1984.