ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

Γραμμική Άλγεβρα
3. Εύρεση Αντίστροφου Πίνακα με Ορίζουσα

Κάλλια Παυλοπούλου

2022-2023

Ορισμός προσαρτημένου ή συμπληρωματικού πίνακα (adjoint)

Δίνεται ο πίνακας $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a_{ij}}] \in \mathbf{M}_{\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\nu}}$.

Ο πίνακας μεγέθους $\nu \times \nu$ ο οποίος στη θέση του στοιχείου (i, j) έχει το στοιχείο $\boxed{(-1)^{i+j} \cdot detA_{ji}}$, ονομάζεται <u>προσαρτημένος (adjoint) ή συμπληρωματικός</u> πίνακας του A και συμβολίζεται με $adj(A)$.

<u>Υπενθύμιση</u>: Ο πίνακας A_{ji} , είναι ένας πίνακας ο οποίος προκύπτει από τον A, αν διαγράψουμε την j-γραμμή και την i-στήλη και είναι μεγέθους $(\nu - 1) \times (\nu - 1)$. Ονομάζεται ελάσσων πίνακας (βλ. ενότητα 7).

Εύρεση αντίστροφου πίνακα
(με χρήση προσαρτημένου πίνακα)

Δίνεται ο πίνακας $\boldsymbol{A} = \left[\boldsymbol{a_{ij}}\right] \in \boldsymbol{M_{\nu\times\nu}}$.

Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\boldsymbol{detA \neq 0}$

Αν $detA \neq 0$, τότε $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{detA} adjA}$

Παράδειγμα 1

Δίνεται ο πίνακας: $\boxed{A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}}$. Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα A, αν υπάρχει,

με τη μέθοδο του προσαρτημένου πίνακα.

<u>Λύση:</u>

1ο Βήμα Υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα A

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - (-3) = \boxed{11 \neq 0}$$

Αφού $detA = 11 \neq 0$, υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας.

Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

2ο Βήμα Υπολογίζουμε τις ορίζουσες των ελάσσονων πινάκων .

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}\right), \boxed{detA_{11} = 11}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}\right), \boxed{detA_{12} = 0}$$

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}\right), \boxed{detA_{13} = 0}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}\right), \boxed{detA_{21} = -3}$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}\right), \boxed{detA_{22} = 4}$$

$$A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}\right), \boxed{detA_{23} = 3}$$

$$A_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}\right), \boxed{detA_{31} = -2}$$

$$A_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}\right), \boxed{detA_{32} = -1}$$

$$A_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}\right), \boxed{detA_{33} = 2}$$

Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

3ο Βήμα Τοποθετούμε τα στοιχεία του προσαρτημένου πίνακα $adjA$ στη σωστή θέση:

$$adjA = \begin{bmatrix} detA_{11} & -detA_{21} & detA_{31} \\ -detA_{12} & detA_{22} & -detA_{32} \\ detA_{13} & -detA_{23} & detA_{33} \end{bmatrix}$$

<u>Σημείωση</u>: Παρατηρούμε ότι τα πρόσημα εμφανίζονται εναλλάξ σύμφωνα με τη διάταξη της σκακιέρας

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

Άρα ο προσαρτημένος πίνακας του A είναι ο

$$\boxed{adjA = \begin{bmatrix} 11 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}}$$

Και ο αντίστροφός του A είναι ο εξής:

$$\boxed{\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot adjA = \frac{1}{11} \cdot \begin{bmatrix} 11 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}}}$$

Παράδειγμα 2

Δίνεται ο πίνακας $\boxed{A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}}$. Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα A, αν υπάρχει, με τη μέθοδο του προσαρτημένου πίνακα.

Λύση:

1ο Βήμα

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(2-1) = \boxed{-1 \neq 0}$$

2ο Βήμα Υπολογίζουμε τον προσαρτημένο πίνακα:

$$adjA = \begin{bmatrix} detA_{11} = det\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & -detA_{21} = -det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & detA_{31} = det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \\ -detA_{12} = -det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & detA_{22} = det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & -detA_{32} = -det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ detA_{13} = det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} & -detA_{23} = -det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} & detA_{33} = det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2-συνέχεια

3ο Βήμα

Άρα,

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot adj\mathrm{A} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 3

Δίνεται ο πίνακας $\boxed{A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}}$. Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα A, αν υπάρχει, με τη μέθοδο του προσαρτημένου πίνακα.

Λύση:

1ο Βήμα

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 6 - 0 + 12 = \boxed{18 \neq 0}$$

2ο Βήμα Υπολογίζουμε τον προσαρτημένο πίνακα:

$$adj\mathrm{A} = \begin{bmatrix} det\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & -det\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & det\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \\ -det\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} & det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} & -det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ det\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} & -det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} & det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 2 & 6 & -2 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3ο Βήμα Άρα,

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot adj\mathrm{A} = \frac{1}{18} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 2 & 6 & -2 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$