ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

# Γραμμική Άλγεβρα

# 1α. Πίνακες και Βασικές Πράξεις

Κάλλια Παυλοπούλου

2022-2023

# ΠΙΝΑΚΕΣ

Ένα σύστημα δύο εξισώσεων α’ βαθμού με δύο αγνώστους, π.χ.

$$\begin{cases} \mathbf{2}x + \mathbf{3}y = \mathbf{1} \\ \mathbf{3}x - \ \ y = \mathbf{7} \end{cases}$$

**Χαρακτηρίζεται πλήρως**

από τους έξι αριθμούς: 2, 3, 1, 3, -1, και 7.

Ο καθένας έχει συγκεκριμένο «ρόλο» στο σύστημα:

- είναι ή *συντελεστής του $x$* ή *συντελεστής του $y$* ή *σταθερός όρος*, και
- ανήκει ή στην *πρώτη* ή στη *δεύτερη εξίσωση*.

Το σύστημα θα μπορούσε να οριστεί πλήρως από τους 6 παραπάνω αριθμούς, γραμμένους με ορθογώνια διάταξη σε 2 γραμμές και 3 στήλες, ώστε να δηλώνεται η θέση που κατέχουν στο σύστημα:

| Συντελεστής x | Συντελεστής y | Σταθερός όρος | | |
|---|---|---|---|---|
| ↓ | ↓ | ↓ | | |
| **2** | **3** | **1** | ← | Της α΄ εξίσωσης |
| **3** | **-1** | **7** | ← | Της β΄ εξίσωσης |

- Μια τέτοια διάταξη αριθμών λέγεται πίνακας 2 γραμμών και 3 στηλών ή απλά πίνακας $2 \times 3$.
- Γράφεται:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{bmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{Vmatrix}$$

# Ορισμός Πίνακα

- Γενικά κάθε <u>ορθογώνια διάταξη $\mu \cdot \nu$ αριθμών ($\mu, \nu \in N^*$</u>) σε μ γραμμές και ν στήλες λέγεται **πίνακας $\mu \times \nu$** (matrix) και συμβολίζεται

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\nu} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mu 1} & \cdots & a_{\mu\nu} \end{bmatrix} = [a_{ij}], 1 \leq i \leq \mu \,, 1 \leq j \leq \nu.$$

- Οι αριθμοί που ορίζουν έναν πίνακα λέγονται **στοιχεία** του πίνακα (elements of a matrix) .
- Το στοιχείο που ανήκει στην $i$ -γραμμή $(1 \leq i \leq \mu)$ και $j$ -στήλη $(1 \leq j \leq \nu)$ συμβολίζεται συνήθως $a_{ij}$.
- Οι θετικοί ακέραιοι $\mu$, $\nu$ ονομάζονται **διαστάσεις** του πίνακα.
- Το σύνολο όλων των πινάκων διάστασης $\mu \times \nu$ συμβολίζεται με $M_{\mu\times\nu}$ ή $\Pi_{\mu\times\nu}$.
- Το σύνολο όλων των πινάκων διάστασης $\nu \times \nu$ συμβολίζεται με $M_{\nu}$ ή $\Pi_{\nu}$ (τετραγωνικοί πίνακες διάστασης $\nu$ ).

Παράδειγμα:

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Το στοιχείο $\alpha_{32}$ του πίνακα $A$ είναι το στοιχείο που βρίσκεται στην 3η γραμμή και τη 2η στήλη, δηλαδή ο αριθμός 8.

Σημείωση:

Όταν πρόκειται για πίνακες μεγάλων διαστάσεων, μπορούμε να διαχωρίσουμε τον αριθμό που προσδιορίζει τη γραμμή από τη στήλη με ένα κόμμα.

- Σε έναν πίνακα $100 \times 50$ το στοιχείο $\alpha_{84,3}$ ανήκει στην 84η γραμμή και την 3η στήλη ενώ το $\alpha_{8,43}$ ανήκει στην 8η γραμμή και την 43η στήλη.

Σημείωση:

Όταν πρόκειται για πίνακες μεγάλων διαστάσεων, μπορούμε να διαχωρίσουμε τον αριθμό που προσδιορίζει τη γραμμή από τη στήλη με ένα κόμμα.

- Σε έναν πίνακα $100 \times 50$ το στοιχείο $\alpha_{84,3}$ ανήκει στην $84^{\eta}$ γραμμή και την $3^{\eta}$ στήλη ενώ το $\alpha_{8,43}$ ανήκει στην $8^{\eta}$ γραμμή και την $43^{\eta}$ στήλη.

# Η σχέση της ισότητας στο σύνολο $\Pi_{\mu\times\nu}$

Δύο πίνακες $A = \left[a_{ij}\right]$ και $B = \left[\beta_{ij}\right]$ ίδιου τύπου $\mu \times \nu$ είναι **ίσοι** (equal) αν και μόνο αν τα αντίστοιχα στοιχεία τους ταυτίζονται. Δηλαδή:

$$\boldsymbol{A = B \Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq \mu, \forall 1 \leq j \leq \nu, \alpha_{ij} = \beta_{ij}}.$$

**Για κάθε (∀), για όλες τις τιμές του $i$ και για όλες τις τιμές του $j$ τα στοιχεία του πίνακα A να είναι ίσα με τα <u>αντίστοιχα</u> στοιχεία του B.**

# Χρήση Πινάκων

1) Το μαθητικό δυναμικό ενός σχολείου κατά φύλο και κατά τάξη μπορεί να παρασταθεί με πίνακα $2 \times 3$. Π.χ.

$$\begin{bmatrix} 125 & 82 & 60 \\ 101 & 85 & 57 \end{bmatrix}$$

το οποίο δίνει ένα πλήθος πληροφοριών: στην Α τάξη φοιτούν 125 αγόρια και 101 κορίτσια, τα κορίτσια της Γ τάξης είναι 57, κτλ.

| Α | Β | Γ | |
|---|---|---|---|
| 125 | 82 | 60 | Αγόρια |
| 101 | 85 | 57 | Κορίτσια |

2) Το προσωπικό ενός εργοστασίου κατανεμημένο σε 3 κατηγορίες και σε 5 τμήματα μπορεί να παρασταθεί με πίνακα π.χ. $3 \times 5$:

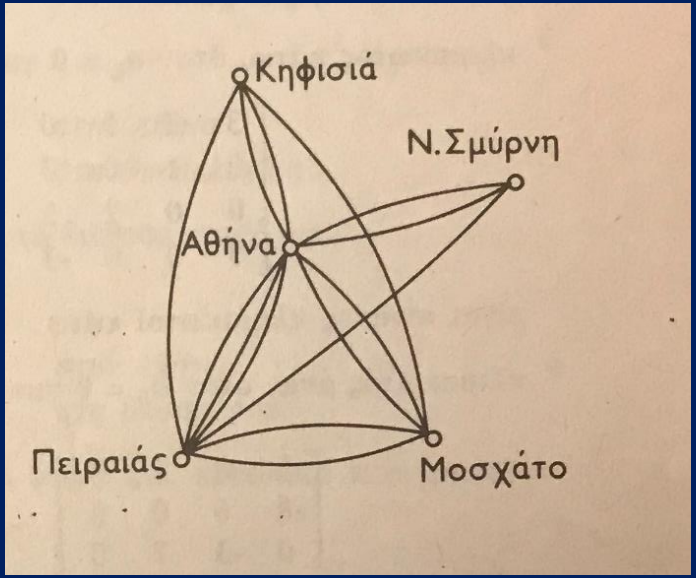
$$\begin{bmatrix} 128 & 205 & 316 & 107 & 156 \\ 250 & 318 & 354 & 285 & 204 \\ 400 & 389 & 425 & 376 & 158 \end{bmatrix}$$

που μας πληροφορεί ότι

στο 4$^{ο}$ τμήμα της 2$^{ης}$ κατηγορίας απασχολούνται 285 εργάτες,

στο 3$^{ο}$ τμήμα της 3$^{ης}$ κατηγορίας 425 εργάτες κ.τ.λ.

3) Στο επόμενο σχήμα έχουμε ένα μέρος του συγκοινωνιακού δικτύου της περιοχής της πρωτεύουσας:



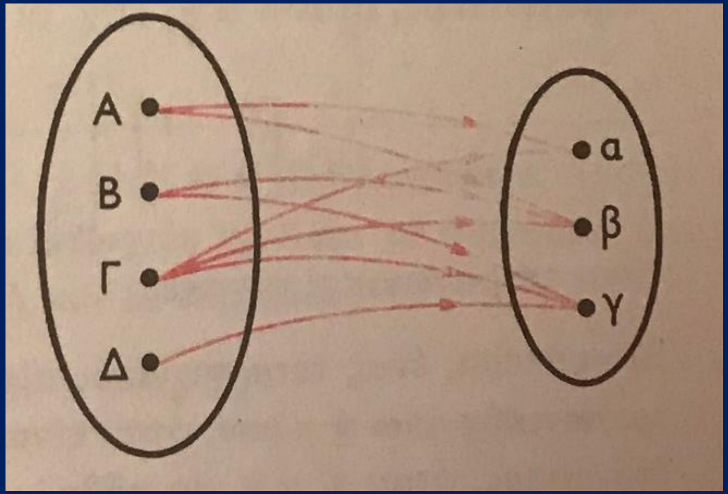

Οι πληροφορίες αυτές θα μπορούσαν να δοθούν και στην μορφή του επόμενου πίνακα. Σε κάθε κουτάκι σημειώνεται το πλήθος των συγκοινωνιακών συνδέσεων μεταξύ των αντίστοιχων περιοχών της πρωτεύουσας:

| | ΑΘΗΝΑ | ΠΕΙΡΑΙΑΣ | ΜΟΣΧΑΤΟ | Ν. ΣΜΥΡΝΗ | ΚΗΦΙΣΙΑ |
|---|---|---|---|---|---|
| ΑΘΗΝΑ | 0 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| ΠΕΙΡΑΙΑΣ | 3 | 0 | 2 | 1 | 1 |
| ΜΟΣΧΑΤΟ | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 |
| Ν. ΣΜΥΡΝΗ | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| ΚΗΦΙΣΙΑ | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Δηλαδή, μπορεί να εκφραστεί με τον επόμενο πίνακα $5 \times 5$ : $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4) Μια διμελής σχέση με την οποία συνδέονται τα στοιχεία δύο πεπερασμένων συνόλων μπορεί να παρασταθεί με έναν πίνακα του οποίου τα στοιχεία είναι 1 ή 0, για την περίπτωση σχετιζόμενων ή όχι στοιχείων των συνόλων.

Π.χ. η διμελής σχέση που δίνεται με το βελοδιάγραμμα




Μπορεί να αναπαρασταθεί με τον πίνακα

| | α | β | γ |
|---|---|---|---|
| **Α** | 1 | 1 | 0 |
| **Β** | 0 | 1 | 1 |
| **Γ** | 1 | 1 | 1 |
| **Δ** | 0 | 0 | 1 |

Δηλαδή, μπορεί να εκφραστεί με τον επόμενο πίνακα $4 \times 3$ : $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

# Είδη Πινάκων $\mu \times \nu$

- Πίνακας-**γραμμή**, όταν μ=1, (τύπου $1 \times \nu$)

  π.χ. $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 7 \end{bmatrix} \in \Pi_{1\times 3}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \in \Pi_{1\times 2}$.

- Πίνακας-**στήλη** , όταν ν=1 , (τύπου μ × 1)

  π.χ. $\Gamma = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} \in \Pi_{2\times 1}, \Delta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \Pi_{3\times 1}$.

- Πίνακας-**στοιχείο** , όταν μ=ν=1, (τύπου 1 × 1)

  π.χ. *E*=[-5], *Z*=[7], *H*=[0].

- **Τετραγωνικός (square matrix)** , όταν μ=ν , π.χ. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Γενική μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

- Τα στοιχεία $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{\nu\nu}$ λέγονται στοιχεία της **κύριας ή πρωτεύουσας διαγωνίου**
- Τα στοιχεία $\alpha_{1\nu}, \alpha_{2(\nu-1)}, \ldots, \alpha_{\nu 1}$ λέγονται στοιχεία της **δευτερεύουσας διαγωνίου**
- Το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου λέγεται **ίχνος** του πίνακα $A$

$$\boxed{\boldsymbol{trA = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \ldots + \alpha_{\nu\nu}}}$$

Σημείωση: Σε μη τετραγωνικό πίνακα $A \in \Pi_{\mu\times\nu}$, τα στοιχεία $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{kk}$ όπου $k = min\{\mu, \nu\}$ καλούνται στοιχεία **της κυρίας διαγωνίου** του πίνακα $A$.

- Για παράδειγμα στους πίνακες $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$,
- το στοιχείο $\alpha_{11} = 2$ είναι το μόνο στοιχείο της κυρίας διαγωνίου του $A$,
- ενώ τα στοιχεία $\beta_{11} = 1, \beta_{22} = 5, \beta_{33} = 9$ είναι τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του $B$.

- **Τριγωνικός κάτω** όταν είναι <u>τετραγωνικός</u> $[\alpha_{ij}]$ τύπου $\nu \times \nu$ και <u>όλα</u> τα στοιχεία που βρίσκονται <u>πάνω</u> από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά.

$$\boxed{\forall i < j\, , \alpha_{ij} = 0}$$

π.χ. $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

- **Τριγωνικός άνω** όταν είναι <u>τετραγωνικός</u> $[\alpha_{ij}]$ τύπου $\nu \times \nu$ και <u>όλα</u> τα στοιχεία που βρίσκονται <u>κάτω</u> από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά.

$$\boxed{\forall i > j\, , \alpha_{ij} = 0}$$

π.χ. $\begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$.

Μπορεί να έχει 0 σε άλλες θέσεις, δεν είναι απαγορευτικό

Κύρια διαγώνιος

- **Διαγώνιος** (diagonal matrix), όταν είναι <u>τετραγωνικός</u> $[\alpha_{ij}]$ τύπου $\nu \times \nu$ και ισχύει

$$\boxed{\forall\, i \neq j, 1 \leq i, j \leq \nu, \alpha_{ij} = 0}$$

Δηλαδή τετραγωνικός όπου <u>όλα</u> τα στοιχεία που <u>δεν</u> ανήκουν στην κύρια διαγώνιο είναι όλα μηδέν.

π.χ. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Συμβολίζεται:

$$\varDelta = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix} \text{ ή } \varDelta = diag(\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{\nu\nu})$$

- **Παρατήρηση:**

Αν ένας πίνακας $[\alpha_{ij}]$ τύπου $\nu \times \nu$ είναι ταυτόχρονα τριγωνικός άνω και τριγωνικός κάτω, τότε θα είναι **διαγώνιος** πίνακας και αντίστροφα.

# Πράξεις Πινάκων: Πρόσθεση Πινάκων

- Μία βιομηχανία ηλεκτρικών ειδών διέθετε σε ένα μήνα:

| Ψυγεία | Κουζίνες | πλυντήρια | |
|---|---|---|---|
| 18 | 35 | 21 | Στην Αθήνα |
| 13 | 29 | 22 | Στη Θεσσαλονίκη |

- Και τον επόμενο μήνα:

| Ψυγεία | Κουζίνες | πλυντήρια | |
|---|---|---|---|
| 22 | 19 | 12 | Στην Αθήνα |
| 25 | 18 | 31 | Στη Θεσσαλονίκη |

- Τότε τους δύο αυτούς μήνες η βιομηχανία διέθεσε συνολικά:

| Ψυγεία | Κουζίνες | πλυντήρια | |
|---|---|---|---|
| 18+22 | 35+19 | 21+12 | Στην Αθήνα |
| 13+25 | 29+18 | 22+31 | Στη Θεσσαλονίκη |

- Η κίνηση της βιομηχανίας κάθε μήνα αλλά και συνολικά περιγράφεται αντίστοιχα με τους επόμενους πίνακες 2x3:

$$A = \begin{bmatrix} 18 & 35 & 21 \\ 13 & 29 & 22 \end{bmatrix}$$ η κίνηση της βιομηχανίας τον 1ο μήνα

$$B = \begin{bmatrix} 22 & 19 & 12 \\ 25 & 18 & 31 \end{bmatrix}$$ η κίνηση της βιομηχανίας τον 2ο μήνα

Η κίνηση της βιομηχανίας συνολικά τους δύο μήνες:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 18+22 & 35+19 & 21+12 \\ 13+25 & 29+18 & 22+31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 54 & 33 \\ 38 & 47 & 53 \end{bmatrix} = A + B$$

- Ο πίνακας $\Gamma$ λέγεται **άθροισμα των πινάκων** $A$ και $B$. Γενικά ορίζουμε:

Άθροισμα των $\mu \times \nu$ πινάκων $A = [\alpha_{ij}]$, $B = [\beta_{ij}]$ λέγεται ο πίνακας $\Gamma = A + B = [\gamma_{ij}]$ , διάστασης $\mu \times \nu$, του οποίου κάθε στοιχείο είναι το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων των $A$ και $B$, δηλαδή:

$$\forall 1 \leq i \leq \mu, \forall 1 \leq j \leq \nu \quad \gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$$

Παράδειγμα:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Στο σύνολο $\mathbf{\Pi}_{\mu\times\nu}$ η πρόσθεση είναι μια **εσωτερική πράξη** που ορίζεται ως εξής:

$$+: \mathbf{\Pi}_{\mu\times\nu} \times \mathbf{\Pi}_{\mu\times\nu} \rightarrow \mathbf{\Pi}_{\mu\times\nu}, (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B} := [\boldsymbol{\alpha}_{ij} + \boldsymbol{\beta}_{ij}]$$

# Ιδιότητες Πρόσθεσης Πινάκων

Αντιμεταθετική: $\forall A, B \in \Pi_{\mu\times\nu}, A + B = B + A$

Προσεταιριστική: $\forall A, B, \Gamma \in \Pi_{\mu\times\nu}, (A + B) + \Gamma = A + (B + \Gamma)$

Ουδέτερο στοιχείο: $\forall A \in \Pi_{\mu\times\nu}, \exists\ \boldsymbol{O} \in \Pi_{\mu\times\nu}, A + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{O} + A = A$

Το ουδέτερο στοιχείο για την πρόσθεση είναι ο μηδενικός πίνακας $\mathbf{O} = [0]_{\mu\times\nu}$, που όλα τα στοιχεία του είναι ίσα με 0.

Αντίθετος Πίνακας (opposite):

$$\forall A \in \Pi_{\mu\times\nu}, \exists -A \in \Pi_{\mu\times\nu}, A + (-A) = (-A) + A = \boldsymbol{O}.$$

Ο αντίθετος πίνακας είναι ο $-A = \left[-\alpha_{ij}\right]$, που στη θέση $(i, j)$ έχει το στοιχείο $-\alpha_{ij}$.

## Παράδειγμα αντίθετου πίνακα:

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

- $-A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

- $A + (-A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{O}_{2\times 3}$

# Πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα ή βαθμωτός πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα

Αν ο πίνακας $A = \left[\alpha_{ij}\right]$ είναι τύπου $\mu \times \nu$, ονομάζουμε βαθμωτό γινόμενο του πραγματικού (ή μιγαδικού) αριθμού λ με τον πίνακα $A$ ή πολλαπλασιασμό αριθμού με πίνακα τον πίνακα τύπου $\mu \times \nu$ τον οποίο λαμβάνουμε αν πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο του $A$ με $\lambda$. Το γινόμενο αυτό συμβολίζεται με $\lambda \cdot A$ και ισχύει ότι:

$$\boxed{\lambda \cdot A = \lambda \cdot \left[\alpha_{ij}\right] = \left[\lambda \cdot \alpha_{ij}\right]}$$

Π.χ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\kappa\alpha\iota \;\; 4 \cdot A = \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 & 4 \cdot 0 & 4 \cdot (-2) \\ 4 \cdot 3 & 4 \cdot (-1) & 4 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -8 \\ 12 & -4 & -12 \end{bmatrix}$$

# Ιδιότητες Πολλαπλασιασμού αριθμού με πίνακα

$\forall \lambda, \mu \in \mathrm{R}\ \forall A, B \in \Pi_{\mu\times\nu}$, ισχύουν:

i) $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$

ii) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$

iii) $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda\mu) \cdot A$

iv) $1 \cdot A = A$, όπου 1 είναι η μονάδα των πραγματικών αριθμών

v) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = (\mathrm{A}\lambda)\mathrm{B} = A(\lambda B)$ , $\lambda \in \mathrm{R}$, $A \in \Pi_{\mu\times\nu}$, $B \in \Pi_{\nu\times\rho}$

<u>Παρατήρηση</u>: Θα δούμε αργότερα πως το σύνολο $\Pi_{\mu\times\nu}$ εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αριθμού με πίνακα, αποκτά τη δομή διανυσματικού χώρου.