ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι ΣΕΜΦΕ, 1/2/2022

Θέμα 1. *Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι Σωστές (Σ) και ποιές είναι Λάθος (Λ) (δεν απαιτείται δικαιολόγηση).*

(1) *Έστω* $A \subseteq \mathbb{R}$. *Αν το* A *δεν έχει μέγιστο στοιχείο τότε δεν είναι άνω φραγμένο.*

(2) *Έστω* (a_n) *συγκλίνουσα ακολουθία. Αν* $a_{2n} = 0$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *τότε* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(3) *Έστω* (a_n) *ακολουθία θετικών αριθμών. Αν* $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ *τότε* $\lim_{n\to\infty} a_n^n = 1$.

(4) *Έστω* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. *Τότε η* f *δεν είναι συνεχής.*

(5) *Έστω* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *παραγωγίσιμη με* f' *συνεχή. Τότε* $\displaystyle\int_a^b f(x)f'(x)\,dx = \frac{f^2(b) - f^2(a)}{2}$.

Θέμα 2. *Απαντήστε στις επόμενες ερωτήσεις δικαιολογώντας την απάντησή σας.*

(1) *Έστω* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *ολοκληρώσιμη. Αν* $a_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}{n}$, *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *είναι η* (a_n) *συγκλίνουσα και αν ναί ποιό είναι το όριό της?*

(2) *Έστω* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ολοκληρώσιμη με* $\int_a^b f(t)\,dt \neq 0$. *Υπάρχει* $\xi \in (a, b)$ *με* $\int_a^\xi f(t)\,dt = \int_\xi^b f(t)\,dt$?

(3) *Έστω* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *συνεχής. Υπάρχει το* $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{\int_a^x f(t)\,dt}{x - a}$ *και αν ναί ποιό είναι?.*

Θέμα 3. *(α) Έστω η ακολουθία* (a_n) *με* $a_1 = 2$ *και* $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{1}{a_n}\right)$. *(i) Δείξτε με επαγωγή ότι* $a_n > 1$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. *(ii) Δείξτε ότι* $a_n - a_{n+1} > 0$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. *(iii) Εξηγείστε γιατί η* (a_n) *είναι συγκλίνουσα και υπολογίστε το όριό της.*

(β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 + 4x + 5}\,dx$.

Θέμα 4. *(α) Έστω* $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ *συνεχής. Δείξτε ότι υπάρχει* $\xi \in (a, b)$ *με* $\phi'(\xi) = 0$ *σε κάθε μια από τις επόμενες περιπτώσεις:*

(1) $\phi(a) = \phi(b)$ *και η* ϕ *είναι παραγωγίσιμη στο* (a, b).

(2) $\phi(a) \neq \phi(b)$, *η* ϕ *είναι παραγωγίσιμη στο* $(a, b]$ *και* $(\phi(b) - \phi(a)) \cdot \phi'(b) < 0$.

(β) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *παραγωγίσιμη με* $f'(a) = f'(b)$. *Δείξτε ότι υπάρχει* $\xi \in (a, b)$ *τέτοιο ώστε*

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}$$

Τι σημαίνει αυτό γεωμετρικά για την γραφική παράσταση της f?

Υπόδειξη: Θεωρείστε την συνάρτηση $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ *με*

$$\phi(a) = f'(a) \quad \text{και } \phi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{για κάθε } x \in (a, b].$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1:

(1) ΛΑΘΟΣ (πχ. το $A = (-\infty, 0)$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο αλλά είναι άνω φραγμένο).

(2) ΣΩΣΤΟ (Πράγματι, η (a_{2n}) είναι υπακολουθία της (a_n) και άρα συγκλίνει στο ίδιο όριο με την (a_n). Οπότε, $\lim a_n = \lim a_{2n} = 0$).

(3) ΛΑΘΟΣ (πχ. $a_n = 1 + \frac{1}{n}$. Τότε $a_n \to 1$ αλλά $a_n^n \to e$)

(4) ΛΑΘΟΣ, κάθε συνάρτηση είναι συνεχής στα απομονωμένα σημεία του πεδίου ορισμού της και το $\mathbb{N}$ αποτελείται από απομονωμένα σημεία. Άρα κάθε $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση)

(5) ΣΩΣΤΟ ($\displaystyle\int_a^b f(x)f'(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_a^b (f^2(x))'\, dx = \frac{1}{2}\left[f^2(x)\right]_a^b = \frac{f^2(b) - f^2(a)}{2}$.

ΘΕΜΑ 2:

(1) Παρατηρούμε ότι $a_n = R(f,\ P_n,\ T_n)$ όπου $R(f, P_n, T_n)$ είναι το άθροισμα Riemann της f ως πρός την διαμέριση $P_n = \{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n}{n} = 1\}$ και τα ενδιάμεσα σημεία $T_n = \{\frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n}{n} = 1\}$. Επειδή, η λεπτότητα $\lambda(P_n)$ της P_n τείνει στο μηδέν, από την θεωρία Ολοκλήρωσης έχουμε ότι $\displaystyle\lim R(f, P_n, T_n) = \int_0^1 f(x)\, dx$ και άρα $\lim a_n = \int_0^1 f(x)\, dx$.

(2) Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ είναι συνεχής. Επειδή $F(a) = 0$ και $F(b) = \int_a^b f(t)\, dt \neq 0$ (υπόθεση), από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής για συνεχείς συναρτήσεις (Bolzano) έπεται ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $F(\xi) = F(b)/2$. Τώρα, από την προσθετικότητα του ολοκληρώματος, βλέπουμε ότι αυτό είναι και το ζητούμενο ξ. Πράγματι, $\int_\xi^b f(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt - \int_a^\xi f(t)\, dt = F(b) - F(\xi) = F(\xi) = \int_a^\xi f(t)\, dt$.

(3) Αν $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ τότε, από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμο', λόγω συνέχειας της f, η F είναι παραγωγίσιμη με $F' = f$. Άρα $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{\int_a^x f(t)\, dt}{x - a} = \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = F'(a) = f(a)$.

ΘΕΜΑ 3:

(α) Έστω η ακολουθία (a_n) με $a_1 = 2$ και $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$. (i) Έχουμε $a_1 = 2 > 1$. Έστω ότι $a_n > 1$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) = \frac{a_n^2 + 1}{2a_n} > 1 \overset{(a_n > 0)}{\Leftrightarrow} a_n^2 + 1 > 2a_n \Leftrightarrow a_n^2 - 2a_n + 1 > 0 \Leftrightarrow (a_n - 1)^2 > 0$ που ισχύει.

(ii) Έχουμε $a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) = \frac{a_n}{2} - \frac{1}{2a_n} = \frac{a_n^2 - 1}{2a_n} > 0$ αφού $a_n > 1 > 0$ και $a_n^2 - 1 = (a_n - 1)(a_n + 1) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Η (a_n) είναι συγκλίνουσα ως φθίνουσα και κάτω φραγμένη. Έστω $\ell = \lim a_n$. Επειδή $a_n > 1$ έπεται ότι $\ell \geq 1$ και άρα $\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\ell}$. Επίσης $\lim a_{n+1} = \lim a_n = \ell$ (η (a_{n+1}) είναι υπακολουθία της (a_n)). Οπότε, από αλγεβρικές ιδιότητες ορίων ακολουθιών, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \Rightarrow \ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{1}{\ell}\right) \Rightarrow \ell^2 - 1 = 0 \Rightarrow \ell = \pm 1$. Η περίπτωση $\ell = -1$ απορρίπτεται (αφού $\ell \geq 1$) και άρα $\ell = 1$.

(β) Έχουμε $\int \frac{x}{x^2+4x+5}\ dx = \int \frac{x}{x^2+4x+4+1}\ dx = \int \frac{x}{(x+2)^2+1}\ dx$. Θέτουμε $t = x+2$ και $dt = dx$. Οπότε $\int \frac{x}{x^2+4x+5}\ dx = \int \frac{t-2}{t^2+1}\ dt = \int \frac{t}{t^2+1}\ dt - 2\int \frac{1}{t^2+1}\ dt$. Για το πρώτο ολοκλήρωμα θέτουμε $u = t^2+1$ και άρα $du = 2tdt \Rightarrow tdt = du/2$. Συνεπώς, $\int \frac{t}{t^2+1}\ dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\ du = \frac{1}{2}\ln u = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) = \ln\sqrt{t^2+1} = \ln\sqrt{(x+2)^2+1}$. Για το δεύτερο έχουμε $\int \frac{1}{t^2+1}\ dt = \arctan t = \arctan(x+2)$. Άρα $\int \frac{x}{x^2+4x+5}\ dx = \ln\sqrt{(x+2)^2+1} - 2\arctan(x+2)$.

ΘΕΜΑ 4:

(α) (i) Προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφ. Λογισμού. (ii) Πάλι από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφ. Λογισμού έπεται ότι υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ με $\phi'(x_0) = \frac{\phi(b)-\phi(a)}{b-a}$. Άρα, από την σχέση $(\phi(b)-\phi(a))\cdot\phi'(b) < 0$ παίρνουμε ότι $\phi'(x_0)\cdot\phi'(b) < 0$ και συνεπώς από το Θεώρημα Darboux, υπάρχει $\xi \in (x_0,b) \subseteq (a,b)$ με $\phi'(\xi) = 0$.

(β) Θεωρούμε την συνάρτηση $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $\phi(a) = f'(a)$ και

$$\phi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{για κάθε } x \in (a,b]. \tag{1}$$

Παρατηρούμε ότι η ϕ είναι συνεχής στο $(a,b]$ (ως πηλίκο συνεχών) αλλά και στο $x=a$ αφού

$$\lim_{x\to a}\phi(x) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) = \phi(a)$$

Άρα η ϕ είναι συνεχής. Επίσης η ϕ είναι παραγωγίσιμη στο $(a,b]$ με παράγωγο

$$\begin{aligned}\phi'(x) = \frac{f'(x)(x-a)-(f(x)-f(a))}{(x-a)^2} &= \frac{f'(x)}{x-a} - \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}\\ &= \frac{f'(x)}{x-a} - \frac{\phi(x)}{x-a}\\ &= \frac{f'(x)-\phi(x)}{x-a}\end{aligned} \tag{2}$$

για κάθε $x \in (a,b]$.

Βλέπουμε τώρα ότι το πρόβλημά μας ανάγεται στην εύρεση ενός $\xi \in (a,b)$ με $\phi'(\xi) = 0$ αφού

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f'(\xi) = \phi(\xi) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \phi'(\xi) = 0$$

Η ύπαρξη ενός $\xi \in (a,b)$ με $\phi'(\xi) = 0$ είναι συνέπεια του (α) και των παραπάνω. Πράγματι, από τον τύπο $\phi'(x) = \frac{f'(x)-\phi(x)}{x-a}$ για κάθε $x \in (a,b]$ και την υπόθεση $\phi(a) = f'(a) = f'(b)$ έχουμε

$$\phi'(b) = \frac{f'(b)-\phi(b)}{b-a} = \frac{f'(a)-\phi(b)}{b-a} = \frac{\phi(a)-\phi(b)}{b-a}$$

και άρα αν $\phi(a) \neq \phi(b)$,

$$(\phi(b)-\phi(a))\cdot\phi'(b) = (\phi(b)-\phi(a))\cdot\frac{\phi(a)-\phi(b)}{b-a} = -\frac{(\phi(a)-\phi(b))^2}{b-a} < 0$$

Η γεωμετρική ερμηνεία είναι η εξής:

Αν η γραφική παράσταση της f έχει παράλληλες εφαπτομένες στα άκρα της $(a,f(a))$ και $(b,f(b))$ τότε υπάρχει ένα ενδιάμεσο σημείο $(\xi,f(\xi))$ όπου η εφαπτομένη στο σημείο αυτό διέρχεται από το αριστερό άκρο $(a,f(a))$.