ΑΝΑΛΥΣΗ Ι ΣΕΜΦΕ 24/08/2020
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 14:00–15:20′

Θέμα 1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (*να δικαιολογήσετε την απάντησή σας διατυπώνοντας πλήρως το θεώρημα που χρησιμοποιείτε απο την Θεωρία ή αναφέροντας κατάλληλο αντιπαράδειγμα σε περίπτωση ψευδούς προτάσεως*) :

(α) Υπάρχει ακολουθία (x_n) στο $[0,1]$ η οποία δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.
(β) Αν (x_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $\lim x_n = 0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει.
(γ) Υπάρχει $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με

$$F'(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in (-\infty, 0), \\ 2 & \text{αν } x \in [0, +\infty). \end{cases}$$

Απάντηση: (α) Ψευδής. Πράγματι, από το Θεώρημα Bolzano–Weierstrass κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

(β) Ψευδής. Πράγματι, $\dfrac{1}{n} \to 0$ αλλά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

(γ) Ψευδής. Πράγματι, απο το θεώρημα Darboux η F' ικανοποιεί την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών. Άρα αν η F' παίρνει τις τιμές -1 και +1 θα έπρεπε να παίρνει και όλες τις ενδιάμεσες.

Θέμα 2. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φθίνουσα. Αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) < x$ (αντίστοιχα $f(x) > x$) δείξτε ότι υπάρχει και $y \in \mathbb{R}$ με $f(y) \geq y$ (αντ. $f(y) \leq y$).

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φθίνουσα και συνεχής. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ με $f(\xi) = \xi$.

Απάντηση: (α) Επειδή η f είναι φθίνουσα αν $f(x) < x$ τότε $f(f(x)) \geq f(x)$. Άρα θέτοντας $y = f(x)$ έχουμε $f(y) \geq y$. Αντίστοιχα αν $f(x) > x$).

(β) Έστω τυχόν $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(x) = x$ θέτουμε $\xi = x$. Αν $f(x) < x$ τότε απο το (α) υπάρχει και $y \in \mathbb{R}$ με $f(y) \geq y$. Αν $f(y) = y$ θέτουμε $\xi = y$, διαφορετικά λόγω συνέχειας απο το Θεώρημα Bolzano θα υπάρχει ξ μεταξύ των x και y με $f(\xi) = \xi$. Ομοίως αν $f(x) > x$.

Θέμα 3. Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

μετατρέποντας κατάλληλα τα μερικά αθροίσματά της.

Απάντηση: Έχουμε

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1) \to +\infty.$$

Θέμα 4. (α) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n f(x)\ dx = 0.$

(β) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Αν $\int_a^x f(t)\ dt = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$ δείξτε ότι $f(x) = 0$ για όλα τα $x \in [a,b]$.

Απάντηση: (α) Έστω $M = \max\{f(x) : x \in [0,1]\}$ και $m = \min\{f(x) : x \in [0,1]\}$.
1ος τρόπος : Είναι

$$m \le f(x) \le M \Rightarrow mx^n \le f(x)x^n \le Mx^n$$

για κάθε $x \ge 0$ και $n \in \mathbb{N}$. Άρα

$$\int_0^1 mx^n f(x)\ dx \le \int_0^1 x^n f(x)\ dx \le \int_0^1 Mx^n f(x)\ dx$$

ή

$$\frac{m}{n+1} \le \int_0^1 x^n f(x)\ dx \le \frac{M}{n+1}$$

Επειδή $\dfrac{1}{n+1} \to 0$, το ζητούμενο έπεται (θεώρημα Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών).

2ος τρόπος : Έστω $n \in \mathbb{N}$. Επειδή f συνεχής και $g(x) = x^n \ge 0$ ολοκληρώσιμη απο το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού υπάρχει $\xi_n \in [0,1]$ τέτοιο ώστε

$$\int_0^1 x^n f(x)\ dx = f(\xi_n) \int_0^1 x^n\ dx = \frac{f(\xi_n)}{n+1}$$

Επειδή $m \le f(\xi_n) \le M$ έπεται ότι

$$\frac{m}{n+1} \le \frac{f(\xi_n)}{n+1} \le \frac{M}{n+1}$$

και άρα απο το θεώρημα Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n f(x)\ dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(\xi_n)}{n+1} = 0$$

(β) Θέτουμε $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$. Επειδή $F(x) = 0 = c$ έπεται ότι $F'(x) = 0$ και άρα αφού $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ το ζητούμενο έπεται.

ΑΝΑΛΥΣΗ Ι ΣΕΜΦΕ 24/08/2020
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 18:00–19:20′

Θέμα 1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (*να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας*) :

(α) Υπάρχει φραγμένη ακολουθία (x_n) που δεν είναι συγκλίνουσα.
(β) Η σειρά $1-1+1-1+\dots$ συγκλίνει στο 0.
(γ) Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής τότε η f έχει αρχική συνάρτηση.

Απάντηση : (α) Αληθής, π.χ. $x_n=(-1)^n$.
(β) Ψευδής. Πράγματι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων (s_n) δεν συγκλίνει αφού $s_{2n}=0\to 0$ και $s_{2n+1}=1\to 1$.
(γ) Αληθής, η $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ είναι μια αρχική της f.

Θέμα 2. (α) Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών με την ιδιότητα $na_n\to c$, όπου $c>0$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^\infty a_n$ δεν συγκλίνει.

(β) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση την σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty(\sqrt{n^2+1}-n)$.

Απάντηση : (α) Έχουμε

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=na_n\to c>0$$

και άρα αφού $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}=+\infty$, απο το κριτήριο ορίου λόγου έπεται ότι και $\sum_{n=1}^\infty a_n=+\infty$.
(β) Έχουμε

$$\sqrt{n^2+1}-n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{1}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}$$

και άρα

$$n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}\to 1$$

Από το (α) ερώτημα για $c=1$ η σειρά $\sum_{n=1}^\infty(\sqrt{n^2+1}-n)$ δεν συγκλίνει.

Θέμα 3. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{αν } x \text{ ρητός,}\\ -x & \text{αν } x \text{ άρρητος}\end{cases}$$

Βρείτε τα σημεία συνέχειας της f.

Απάντηση : Έστω $x\in\mathbb{R}$. Αν $x\neq 0$ τότε η f είναι ασυνεχής στο x_0. Πράγματι, έστω (a_n) και (q_n) ακολουθίες από άρρητους και ρητούς αντίστοιχα με $\lim a_n=\lim q_n=x$. Τότε $\lim f(a_n)=\lim(-a_n)=-\lim a_n=-x$ ενώ $\lim f(q_n)=\lim(q_n)=x$. Άρα $\lim f(a_n)\neq\lim(q_n)$ και συνεπώς (απο Αρχή Μεταφοράς) η f δεν είναι συνεχής στο x.

Επειδή τώρα $|f(x)-f(0)|=|f(x)-f(0)|=|x-0|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε (κατά τεριμμένο τρόπο) ότι για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει $\delta(=\epsilon)>0$ τέτοιο ώστε $|x-0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(0)|<\epsilon$ και άρα η f είναι συνεχής μόνο στο $x=0$.

Θέμα 4. (α) Έστω $G : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$G(x) = \int_0^{\sqrt{\ln x}} e^{t^2} \, dt$$

για κάθε $x > 1$. Εξηγείστε γιατί η G είναι παραγωγίσιμη και βρείτε τον τύπο της G'.

(β) Με χρήση αθροισμάτων Riemann κατάλληλης συνάρτησης $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ βρείτε το όριο της ακολουθίας

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

Απάντηση : (α) Αν $F(x) = \int_0^x e^{t^2} \, dt$, $x > 0$ και $\phi(x) = \sqrt{\ln x}$, $x > 1$, τότε $G(x) = F(\phi(x))$. Συνεπώς η G είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, αφού $F'(x) = f(x)$ και $\phi'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \dfrac{1}{x}$. Από τον Κανόνα Αλυσίδας έχουμε

$$G'(x) = F'(\phi(x))\phi'(x) = e^{\ln x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}.$$

(β) Έχουμε

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

Θέτοντας $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $x \in [0, 1]$ και $x_i = \dfrac{i}{n}$, $i = 0, \ldots, n$ παίρνουμε

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \to \int_0^1 f(x) \, dx = \ln 2.$$

ΕΞ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι ΣΕΜΦΕ 19/9/2020

Α. Απαντήστε αν είναι Σωστές (Σ) ή Λάθος (Λ) οι επόμενες προτάσεις :

Α1. Αν $0 < a_n < 1$ τότε $a_n^n \to 0$. ***Λάθος, πχ. η ακολουθία*** $a_n = \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$***.***

Α2. Έστω $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(-1) < 0 < f(1)$. Τότε υπάρχει $\xi \in \mathbb{Q}$ με $-1 < \xi < 1$ και $f(\xi) = 0$. ***Λάθος, πχ. η συνάρτηση*** $f(x) = x - a$***,*** $x \in \mathbb{Q}$ ***με*** $0 < a < 1$ ***άρρητο.***

Α3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $|f'(x)| = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν για κάποιο $a \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f'(a) = 1$ τότε $f'(x) = 1$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. ***Σωστό. Πράγματι, απο το Θεώρημα Darboux έχουμε ότι η*** f' ***ικανοποιεί την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών. Άρα αν υπήρχε κάποιο*** $b \in \mathbb{R}$ ***με*** $f'(b) = -1$ ***τότε θα έπρεπε να υπήρχε και*** ξ ***μεταξύ των*** a, b ***με*** $f'(\xi) = 0$***, άτοπο αφού*** $|f'(x)| = 1$ ***για όλα τα*** $x \in \mathbb{R}$***.***

Β. Επιλέξτε την σωστή απάντηση στις επόμενες ερωτήσεις :

Β1. Η ακολουθία $a_n = \left(\frac{n^3+1}{n^3}\right)^{2n^3}$ ... ***συγκλίνει στο*** e^2***, ως υπακολουθία της*** $b_n = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^2$***.***

Β2. Αν (a_n) ακολουθία με $a_0 = 0$ και $a_n \to 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$... ***συγκλίνει στο*** 1***, αφού η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων*** $s_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = a_n$ ***ταυτίζεται με την*** (a_n) ***για όλα τα*** $n \geq 1$***.***

Γ. Γράψτε την απάντηση στις επόμενες ασκήσεις :

Γ1. Δώστε τον τύπο του πολυωνύμου Taylor τάξης n με κέντρο το $x_0 = 0$ της συνάρτησης $f(x) = \sqrt[3]{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$. ***Απάντηση: Έχουμε*** $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$ ***και άρα*** $f^{(n)}(x) = \frac{1}{3^n} f(x)$ ***για κάθε*** $n \in \mathbb{N}$***. Ειδικότερα,*** $f^{(n)}(0) = \frac{1}{3^n}$ ***και άρα***

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 1 + \frac{x}{3 \cdot 1!} + \frac{x^2}{3^2 \cdot 2!} + \cdots + \frac{x^n}{3^n \cdot n!}$$

Γ2. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x^3 + x}\, dx$. ***Απάντηση:***

$$\int \frac{1}{x^3 + x}\, dx = \int \frac{1}{x(x^2+1)}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int \frac{x}{x^2+1}\, dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$
$$= \ln\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}$$

Γ3. Υπολογίστε το όριο της ακολουθίας

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \frac{n}{n^2+3^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}$$

Απάντηση:

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{3}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$$

Άρα αν $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ***και*** $x_i = \frac{i}{n}$***,*** $i = 0, \ldots, n$ ***τότε από τα αθροίσματα Riemann***

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \to \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Γ4. Υπολογίστε την παράγωγο της συνάρτησης $G(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{4x^2} e^{\sqrt{t}}\ dt$, $x \in \mathbb{R}$. ***Απάντηση: Παρατηρούμε ότι***

$$G(x) = \int_0^{4x^2} e^{\sqrt{t}}\ dt - \int_0^{x^2} e^{\sqrt{t}}\ dt$$

Άρα θέτοντας $H_2(x) = \displaystyle\int_0^{4x^2} e^{\sqrt{t}}\ dt$ ***και*** $H_1(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{\sqrt{t}}\ dt$***, έχουμε***

$$G(x) = H_2(x) - H_1(x) \Rightarrow G'(x) = H_2'(x) - H_1'(x) = e^{2|x|}8x - e^{|x|}2x = 2xe^{|x|}\left(4e^{|x|} - 1\right)$$

(Είναι $H_2(x) = F(\phi(x))$***, με*** $F(x) = \int_0^x e^{\sqrt{t}}\ dt$ ***και*** $\phi(x) = 4x^2$ ***και άρα απο θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού και τον κανόνα Αλυσίδας***

$$H_2'(x) = F'(\phi(x))\phi'(x) = e^{\sqrt{\phi(x)}}\phi'(x) = e^{2|x|}8x$$

Ομοίως για την $H_1(x)$***.)***