Ανακεφαλαίωση

Αντώνης Παπαβασιλείου, ΕΜΠ

Κεφάλαιο 2

Παραστατικοί μιγαδικοί αριθμοί

- Τα συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας είναι μεγάλα κυκλώματα με ενεργά στοιχεία (φορτία, γεννήτριες) και παθητικά στοιχεία (μετασχηματιστές, σύνθετες αντιστάσεις)
- Οι τάσεις και τα ρεύματα στα ΣΗΕ είναι ημιτονοειδή σήματα, που μπορούν να αναπαρασταθούν με τρεις τρόπους
  - Συναρτήσεις χρόνου: $f(t) = F_{max}\cos(\omega t + \phi)$
  - **Παραστατικούς μιγαδικούς αριθμούς**: $\hat{F} = F\angle\phi$
  - Καρτεσιανή μορφή: $\hat{F} = F(\mathrm{cos}\phi + j\mathrm{sin}\phi)$

  όπου $F = F_{max}/\sqrt{2}$ η ενεργός τιμή
- Ο παραστατικός μιγαδικός αριθμός του αθροίσματος ημιτονοειδών συναρτήσεων χρόνου είναι το άθροισμα των παραστατικών μιγαδικών αριθμών των επιμέρους συναρτήσεων (και αντίστοιχες ιδιότητες για άλλους τελεστές) $\Rightarrow$ στα ΣΗΕ επιλέγουμε να διεξάγουμε αναλύσεις με μιγαδικούς αριθμούς

Φυσικοί νόμοι που κυβερνούν τη συμπεριφορά των ΣΗΕ

- **Νόμος ρευμάτων του Kirchhoff**:
$$\sum_i \hat{I}_i = 0$$
- **Ο νόμος τάσεων του Kirchhoff**:
$$\sum_i \hat{V}_i = 0$$
- Ο **νόμος του Ohm** επιβάλλει μια γραμμική σχέση μεταξύ ρεύματος και τάσης σε παθητικά στοιχεία (αντιστάσεις, αυτεπαγωγές, πυκνωτές) και οδηγεί στον ορισμό της σύνθετης αντίστασης:
$$\mathbf{Z} = \frac{\hat{V}}{\hat{I}}$$

Ενεργός και άεργος ισχύς

- Μιγαδική ισχύς που απορροφάται από ένα δίκτυο είναι <u>εξ’ορισμού</u> $\mathbf{S} = P + jQ = \hat{V}\hat{I}^*$
  - Το πραγματικό μέρος αντιστοιχεί σε ένα ημιτονοειδές σήμα που δεν πέφτει ποτέ κάτω από το μηδέν και άρα αντιστοιχεί στη χρήσιμη ισχύ που απορροφάται από το κύκλωμα ($P(1 + \cos(2\omega t))$)
  - Το φανταστικό μέρος αντιστοιχεί σε ένα ημιτονοειδές σήμα που έχει μέσο όρο μηδέν, και αντιστοιχεί σε “ημιτονοειδή θόρυβο” που πρέπει να μεταδωθεί στο κύκλωμα για να περάσει χρήσιμη ισχύς στο κύκλωμα ($-Q\sin(2\omega t)$)

Τριφασικά συστήματα

- Σε ένα συμμετρικό τριφασικό σύστημα, ό,τι συμβαίνει σε μία φάση συμβαίνει και στις άλλες μετατοπισμένο κατά 120^o , και άρα στην ανάλυση ΣΗΕ μπορούμε να εστιάζουμε σε μία μόνο φάση
- Ένας λόγος που έχουμε τριφασικά συστήματα είναι για να μπορούμε να μεταδίδουμε την ίδια ενεργό ισχύ με λιγότερη καλωδίωση
- Υπάρχει ένα προς ένα αντιστοιχία φασικών και πολικών μεγεθών:
  - Οι πολικές τάσεις είναι $\sqrt{3}$ οι φασικές και μετατοπισμένες μπροστά κατά $30°$
  - Αλλά και από τις φασικές τάσεις μπορούμε να υπολογίσουμε τις φασικές

$$\hat{V}_a = (\hat{V}_{ab} - \hat{V}_{ca})/3$$
$$\hat{V}_b = (\hat{V}_{bc} - \hat{V}_{ab})/3$$
$$\hat{V}_c = (\hat{V}_{ca} - \hat{V}_{bc})/3$$

- Σε τριφασικό σύστημα, η τριφασική ισχύς είναι εξ’ορισμού $\mathbf{S} = P + jQ = 3\hat{V}_\varphi \hat{I}_L^*$:
  - Το μέρος του σήματος που ήταν μη αρνητικό στον αντίστοιχο ορισμό του μονοφασικού είναι πλέον σταθερό
  - Και υπάρχει ένα μέρος που έχει μέση τιμή και συνεχίζει να μεταβάλλεται ημιτονοειδώς, άρα η άεργος ισχύς παραμένει

Συνδεσμολογία αστέρα και τριγώνου

- Σε τριφασικά συστήματα, τα ενεργά και παθητικά στοιχεία μπορούν να συνδεθούν **κατ’αστέρα** ή **κατά τρίγωνο**
- Για μια πηγή τάσης όπου μπορούμε να μετρήσουμε τα ρεύματα γραμμής και τις πολικές τάσεις, η ισχύς που παράγεται από την πηγή δεν εξαρτάται από το αν είναι συνδεδεμένη κατ’αστέρα ή τρίγωνο, και δίνεται ως
$$\mathbf{S} = 3\hat{V}_a\hat{I}_a^*$$
- Ένα φορτίο συνδεδεμένο κατ’αστέρα μπορεί να αναπαρασταθεί ισοδύναμα με συνδεσμολογία κατά τρίγωνο και αντιστρόφως υπό την προϋπόθεση ότι
$$\mathbf{Z}_Y = \frac{\mathbf{Z}_\Delta}{3}$$
- Κατά κανόνα μετατρέπουμε συνδεσμολογίες τριγώνου σε αστέρα για να μπορούμε να περιγράφουμε τα ΣΗΕ με μονοφασικά ισοδύναμα

Κεφάλαιο 5

Μονοφασικά ισοδύναμα και ο ρόλος των μετασχηματιστών

- Επειδή οι φάσεις συμπεριφέρονται συμμετρικά, μπορούμε να αναλύσουμε ένα ΣΗΕ εστιάζοντας σε μία μόνο φάση
- Ένας μετασχηματιστής αναπαριστάνεται σε αναλύσεις κατά κανόνα ως μια ωμική αντίσταση εν σειρά με μια αυτεπαγωγή
- Μια γραμμή αναπαριστάνεται κατά κανόνα με το **ονομαστικό πι**
- Επειδή ένας μετασχηματιστής λειτουργεί σαν μια πύλη που πολλαπλασιάζει κατά α την τάση και διαιρεί κατά α το ρεύμα, μια ωμική αντίσταση δεν έχει μια μοναδική τιμή, αλλά εξαρτάται από πλευρά της 'πύλης' τη βλέπουμε:

$$\mathbf{Z}_L' = a^2 \mathbf{Z}_L$$

Ανά μονάδα σύστημα

- Το **ανά μονάδα σύστημα** είναι μια μέθοδος κανονικοποίησης στις αναλύσεις ΣΗΕ που οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στην παρουσία μετασχηματιστών και μας επιτρέπει να αποφεύγουμε συνεχείς αναγωγές μεγεθών στη μία ή την άλλη πλευρά του μετασχηματιστή
- Έχουμε 4 μεγέθη που θέλουμε να κανονικοποιήσουμε (ρεύμα, τάση, ισχύς και αντίσταση), αλλά θέλουμε να ισχύουν δύο σχέσεις:
  - 1 $\alpha\mu$ ρεύμα, όταν ρέει σε μοναδιαία αντίσταση, πρέπει να προκαλεί 1 $\alpha\mu$ πτώση τάσης
  - 1 $\alpha\mu$ ρεύμα υπό μοναδιαία τάση πρέπει να δίνει 1 $\alpha\mu$ ισχύ
- Άρα επί της ουσίας μπορούμε να διαλέξουμε μόνο δύο μεγέθη βάσης
- Και κατά κανόνα επιλέγουμε τη βασική ισχύ και τάση, από τα οποία μπορούμε να εξάγουμε το ρεύμα και την αντίσταση:
  - Αντίσταση: $Z_B = \frac{V_B^2}{S_B}$
  - Ρεύμα: $I_B = \frac{S_B}{V_B}$ για μονοφασικό, $I_B = \frac{S_B}{\sqrt{3}V_B}$ για τριφασικό
- Οι ανά μονάδα αντιστάσεις είναι σταθερές <u>παντού</u> στο ΣΗΕ
- Κατά κανόνα διαλέγουμε τις βάσεις τάσεις ως τις ονομαστικές τάσεις των αντίστοιχων μετασχηματιστών

Αλλαγή βάσης

- Μερικές φορές έχουμε ανά μονάδα μεγέθη ως δεδομένα, αλλά υπολογισμένα για βασικά μεγέθη που είναι διαφορετικά από αυτά που θέλουμε για την ανάλυσή μας
- Ο μετασχηματισμός από μια βάση σε μια άλλη είναι μια εύκολη μετατροπή βάσει του ορισμού του ανά μονάδα μεγέθους, αλλά χρησιμεύουν και οι ακόλουθες μνημονικές σχέσεις:

$$V_2 = V_1 \frac{V_{B1}}{V_{B2}}$$

$$P_2 = P_1 \frac{S_{B1}}{S_{B2}}$$

$$I_2 = I_1 \frac{I_{B1}}{I_{B2}} = I_1 \frac{S_{B1}}{S_{B2}} \frac{V_{B2}}{V_{B1}}$$

$$Z_2 = Z_1 \frac{Z_{B1}}{Z_{B2}} = Z_1 \frac{V_{B1}^2}{V_{B2}^2} \frac{S_{B2}}{S_{B1}}$$

$$Y_2 = Y_1 \frac{Z_{B2}}{Z_{B1}} = Y_1 \frac{V_{B2}^2}{V_{B1}^2} \frac{S_{B1}}{S_{B2}}$$

Κεφάλαιο 10

Εξισώσεις ροής φορτίου

- Στις αναλύσεις ΣΗΕ, μας δίνονται συχνά ορισμένα δεδομένα για τη λειτουργία του συστήματος από τα οποία πρέπει να λύσουμε ως προς τα υπόλοιπα δεδομένα λύνοντας ένα σύνολο εξισώσεων που ονομάζονται **εξισώσεις ροής φορτίου**
- Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της μιγαδικής ισχύος και τους νόμους του Kirchhoff, μπορούμε να εκφράσουμε τις εξισώσεις ροής φορτίου ως εξής:

$$S_{Gk} - S_{Dk} = Y_{kk}^{*} V_k^2 + \hat{V}_k \sum_{m \in A(k)} Y_{km}^{*} \hat{V}_m^{*}$$

- Υπάρχει μία τέτοια εξίσωση για κάθε ζυγό του συστήματος
- Και δύο μιγαδικοί άγνωστοι (ισχύς και τάση) για κάθε ζυγό του συστήματος
- Αν και έχουμε n βαθμούς ελευθερίας, όπου n ο αριθμός των ζυγών, όπως θα δούμε σε λίγο φιξάρουμε αυτούς τους βαθμούς ελευθερίας για να φτάσουμε σε ένα σύστημα με ίσο αριθμό αγνώστων και εξισώσεων

Πίνακας / μήτρα αγωγιμοτήτων

- Τα στοιχεία Y_{km} των εξισώσεων της προηγούμενης διαφάνειας ορίζουν τον **πίνακα / μήτρα αγωγιμοτήτων**, γνωστό και από τη θεωρία δικτύων (όπου χρησιμοποιείται για να μετασχηματίσουμε ρεύματα γραμμών σε τάσεις κόμβων)
- Τα στοιχεία αυτά υπολογίζονται ως εξής:
  - Διαγώνια στοιχεία Y_{kk}: άθροισμα αγωγιμοτήτων που έχουν ένα τερματικό στον κόμβο k
  - Στοιχεία εκτός διαγωνίου $Y_{km}, k \neq m$: το αρνητικό της αγωγιμότητας που συνδέει τον κόμβο k με τον κόμβο m

Είδη ζυγών στο πρόβλημα ροής φορτίου

- Οι τιμές που φιξάρουμε σε ένα πρόβλημα ροής φορτίου οδηγούν σε μια κατηγοριοποίηση των ζυγών
- Έχουμε τρεις κατηγορίες ζυγών
    - Ζυγός ταλάντωσης / ζυγός αναφοράς
        - Η πραγματική και άεργος ισχύς αφήνονται ελεύθερες
        - Το μέτρο και η γωνία τάσης θεωρούνται γνωστά
        - Συνήθως διαλέγουμε γωνία τάσης $\delta = 0$
    - Ζυγός φορτίου / ζυγός PQ
        - Η έγχυση ενεργού ισχύος (P) και αέργου ισχύος (Q) θεωρούνται γνωστές
    - Ζυγός παραγωγής / ζυγός PV
        - Η έγχυση ενεργού ισχύος (P) και το μέτρο τάσης (V) θεωρούνται γνωστά

Σχηματική αναπαράσταση του προβλήματος

	P	Q	V	δ	Δείκτες	Πλήθος
Ζυγός ταλάντωσης (γεννήτρια)			√	√	1	1
Ζυγοί PV (γεννήτριες)	√		√		$2 \dots n-m$	$n-m-1$
Ζυγοί PQ (φορτία)	√	√			$n-m+1, \dots n$	m

- Το ουσιαστικό σύστημα έχει $n+m-1$ μεταβλητές (τις κόκκινες περιοχές, $\delta_2, \dots, \delta_n, V_{n-m+1}, \dots, V_n$) με $n+m-1$ ισότητες (εξισώσεις ροής φορτίου)
- Οι υπόλοιπες (πράσινες) μεταβλητές προκύπτουν εύκολα όταν έχουμε υπολογίσει τις κόκκινες (από τις υπόλοιπες ισότητες / εξισώσεις ροής φορτίου)

Μέθοδοι επίλυσης

- Το πρόβλημα ροής φορτίου ανάγεται σε ένα σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων
- Έχουμε δει τρεις μεθόδους για την επίλυση του συστήματος:
  - Μέθοδος Gauss: μέθοδος σταθερού σημείου, όπου οι τάσεις εκφράζονται ως συνάρτηση του εαυτού τους (fixed point mapping) $\mathbf{x} = \mathbf{H}(\mathbf{x})$, και οι τάσεις της νέας επανάληψης δίνονται ως
$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{H}\left(\mathbf{x}^{(i)}\right)$$
  - Μέθοδος Gauss-Seidel: η μέθοδος Gauss αλλά όπου χρησιμοποιούμε την πιο πρόσφατη πληροφορία των κόμβων που έχουμε ήδη υπολογίσει:
$$x_k^{(i+1)} = h_k(x_1^{(i+1)}, \dots, x_{k-1}^{(i+1)}, x_k^{(i)}, \dots, x_N^{(i)})$$
  - Μέθοδος Newton-Raphson: γραμμικοποίηση της σχέσης $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, που είναι το αρχικό σύστημα που θέλουμε να λύσουμε, η οποία γραμμικοποίηση οδηγεί στην ακόλουθη επανάληψη όταν λύσουμε ως προς $\mathbf{x}$:
$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{J}\left(\mathbf{x}^{(i)}\right)^{-1}\left(\mathbf{b} - \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(i)}\right)\right)$$

Εδώ, ο πίνακας $\mathbf{J}$ είναι ο Ιακωβιανός της συνάρτησης $\mathbf{f}(\mathbf{x})$

Μέθοδος Gauss και Gauss-Seidel

- Στην ειδική περίπτωση του προβλήματος ροής φορτίου, η γενική μέθοδος Gauss μπορεί να εξειδικευτεί ως εξής:

$$\hat{V}_k^{(i+1)} = \frac{1}{Y_{kk}}\left(\frac{P_k^{(i)} - jQ_k^{(i)}}{\left[\hat{V}_k^{(i)}\right]^*} - \sum_{m\in A(k)} Y_{km}\hat{V}_m^{(i)}\right)$$

- Όποιες τιμές δεν έχουν υπολογιστεί ήδη (π.χ. $Q_k^{(i)}$ σε ζυγούς PV) μπορούν να υπολογιστούν με τις τάσεις που έχουμε ήδη διαθέσιμες από τις εξισώσεις της διαφάνειας 13
- Όποιες τιμές είναι δεδομένα (π.χ. μέτρο τάσης ζυγού PV) χρησιμοποιούνται απευθείας στην παραπάνω επανάληψη
- Μέθοδος Gauss-Seidel:

$$\hat{V}_k^{(i+1)} = \frac{1}{Y_{kk}}\left(\frac{P_k^{(i)} - jQ_k^{(i)}}{\left[\hat{V}_k^{(i)}\right]^*} - \sum_{m\in A_1(k)} Y_{km}\hat{V}_m^{(i+1)} - \sum_{m\in A_2(k)} Y_{km}\hat{V}_m^{(i)}\right)$$