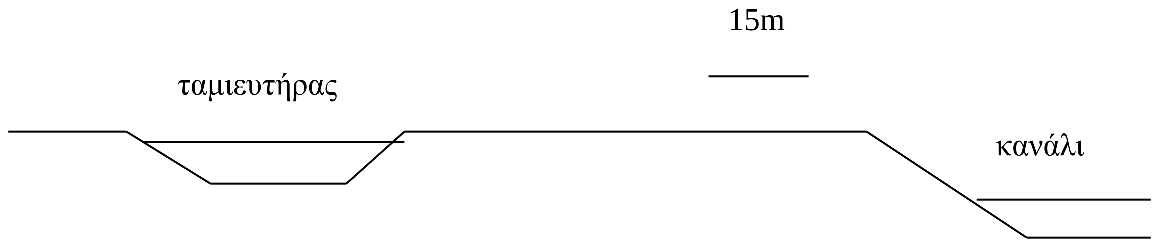
Το πρόβλημα

Μετά από ατύχημα, ρύπος (τριχλωροαιθένιο διαλυμένο στο νερό) διαρρέει στον ταμιευτήρα στο πιο κάτω σχήμα. Υπάρχει ανησυχία για το πόσο γρήγορα θα επηρεαστεί κανάλι στα κατάντη αν δεν ληφθούν μέτρα.



Η άσκηση

Η διαρροή ενός ρύπου (τριχλωροαιθένιου διαλυμένου στο νερό) έχει μόλις αρχίσει από τον ταμιευτήρα του πιο κάτω σχήματος. Υποθέτοντας σταθερό ρυθμό διαρροής (με σταθερή συγκέντρωση στον ταμιευτήρα ίση με Co), πορώδες του εδαφικού στρώματος 0,3, συντελεστή διάχυσης (σε διάλυμα) $2x10^{-9}$ m^2/s, και συντελεστή διαμήκους μηχανικής διασποράς $α_L$ = 1m, απαντήστε στα εξής:

(α) Ποιος είναι ο χρόνος άφιξης στο κανάλι συγκέντρωσης ίσης με 0,5Co;

(β) Πότε θα είναι η συγκέντρωση ίση με 0,01Co στο ίδιο σημείο που θεωρήσατε στο ερώτημα (α);

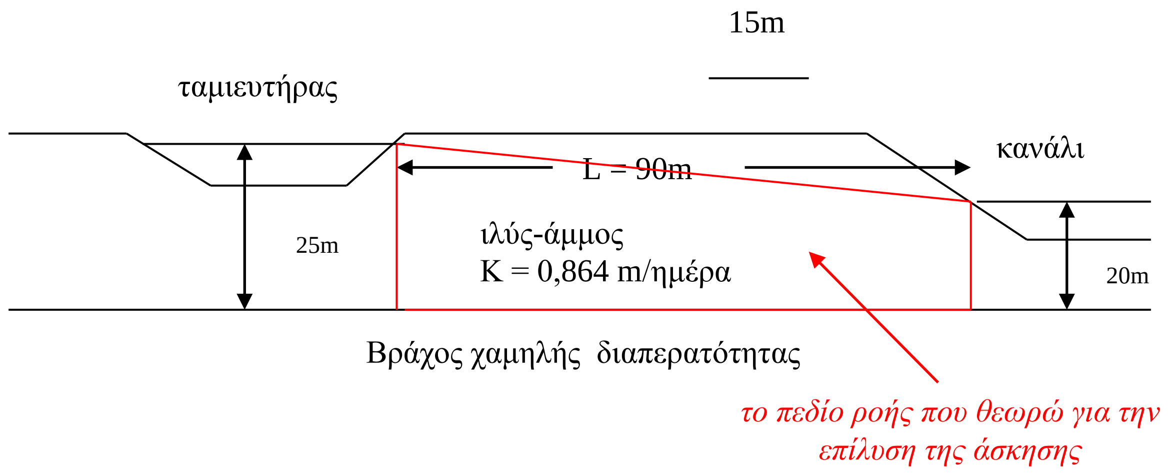
(γ) Πώς αλλάζει η απάντηση στα ερωτήματα (α) και (β) αν $α_L$ = 0,1m;

(δ) Σχολιάστε τη σημασία των αποτελεσμάτων.

(ε) Ποιες είναι οι απλοποιήσεις (φαινόμενα, γεωμετρία, παράμετροι κλπ) που απαιτούνται για να μπορέσει να επιλυθεί το πρόβλημα με τα δεδομένα που δίνονται;

(ζ) Μπορείτε να βελτιώσετε τις απαντήσεις σας κάνοντας μεν λιγότερες παραδοχές αλλά και πάλι λύνοντας την άσκηση “με το χέρι”;

Συμβουλή: δουλέψτε με μονάδα μήκους το μέτρο (m) και χρόνου την ημέρα. Όσο για τις απαντήσεις, δώστε τις σε ανθρώπινες μονάδες (δηλ. όχι κάποιες χιλιάδες μέρες, αλλά τα αντίστοιχα χρόνια).



ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ (**i**)

- Υποθέτω μονοδιάστατη ροή μεταξύ ταμιευτήρα-καναλιού (ροή μόνο στον οριζόντιο, χ άξονα), αγνοώντας την κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας.

ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ – ΠΕΡΙΟΧΗΣ ΠΟΥ ΜΕ ΕΝΔΙΑΦΕΡΕΙ (**ii**)

- Θεωρώ ότι έχω ροή κυρίως = μόνο στο εδαφικό υλικό, δηλ. όχι στο βράχο (λογικό).
- Για να προσδιορίσω το μήκος ροής, θεωρώ τη μικρότερη απόσταση μεταξύ ταμιευτήρα-καναλιού (παραδοχή υπέρ της ασφάλειας – γιατί;), L = 90m

ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΦΑΙΝΟΜΕΝΩΝ (**iii**)

- Αγνοώ ρόφηση, δηλαδή $K_p = 0$ και R = 1 (παραδοχή υπέρ της ασφάλειας– γιατί;)

- Θα χρησιμοποιήσω τη λύση της εξίσωσης μεταγωγής-διάχυσης/διασποράς, για συνοριακές συνθήκες (1) C = Co, x = 0, t ≥ 0, (2) C = 0, t = 0, x > 0, (3) C = 0, t ≥ 0, x = ∞, όπου Co είναι η συγκέντρωση στον ταμιευτήρα:

$$\frac{C}{C_0} = \frac{1}{2}\left\{ erfc\left(\frac{x - \bar{v}t}{2\sqrt{Dt}} \right) + e^{\frac{\bar{v}x}{D}} erfc\left(\frac{x + \bar{v}t}{2\sqrt{Dt}} \right) \right\} \quad (1)$$

- Δύο είναι οι βασικές παράμετροι που πρέπει να υπολογίσω, η μέση γραμμική ταχύτητα κίνησης του υπόγειου νερού ή ταχύτητα μεταγωγής $\bar{v}$ και ο συντελεστής υδροδυναμικής διασποράς D.

- Αρχίζω από το πρόβλημα ροής

Καθορίζω το πεδίο ροής (κόκκινο τραπέζιο στο προηγούμενο σχήμα)
i = ΔΗ / ΔL = 25m – 20m / 90m = 0,055
v = K i = 0,864 m / ημέρα x 0,055 = 0,048 m / ημέρα
$\bar{v}$ = v/n = 0,048 m / ημέρα / 0,3 = 0,16 m / ημέρα

- Υπολογισμός συντελεστή διάχυσης/διασποράς

$D = \alpha_L \bar{v} + D_e$ = 1m x 0,16 m / ημέρα + 1,21 x 10^{-4} m^2 / ημέρα = 0,16 m^2 / ημέρα

$D_e = \omega D$ = 0,7 x 2x10^{-9} m^2/s = 1,21 x 10^{-4} m^2 / ημέρα
Εκ των υστέρων (δηλ. αφού κάνω τις πράξεις), βλέπω ότι θα μπορούσα να είχα αγνοήσει τη διάχυση <u>στο συγκεκριμένο πρόβλημα</u>.

ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΛΥΣΗΣ (**iv**)

- Ελέγχω $\frac{\bar{v}x}{D} = \frac{0,16 \cdot 90}{0,16} = 90 \approx 100$ Άρα μπορώ να αγνοήσω το δεύτερο όρο της (1).

Ιδανικά, ο πρώτος όρος δίνει μια καλή προσέγγιση όταν το κλάσμα $\frac{\bar{v}x}{D}$ είναι μεγαλύτερο από 100, αλλά ακόμα κι αν είναι μεγαλύτερο από 10 μπορώ να αγνοήσω τον δεύτερο όρο, κάνοντας βέβαια μεγαλύτερο λάθος!

(α) Επειδή ο όρος $\frac{\bar{v}x}{D}$ είναι αρκετά μεγάλος, ο χρόνος άφιξης της C/Co = 0,5 είναι περίπου ίσος με το χρόνο άφιξης ρύπου λόγω μεταγωγής. Άρα,

t = L / $\bar{v}$ = 90 m / 0,16 m / ημέρα = 563 ημέρες ≈ <u>1,5 χρόνια</u>

(β) C/Co = 0,01 = ½ erfc $\frac{90-0{,}16t}{2\sqrt{0{,}16t}}$

Για erfc = 0,02 → $\frac{90-0{,}16t}{2\sqrt{0{,}16t}} \approx 1.65 \Rightarrow$ t = 398 ημέρες ≈ <u>1,1 χρόνια</u>

ΠΡΟΣΟΧΗ! Λύνω τη δευτεροβάθμια εξίσωση για τη μεταβλητή $T=\sqrt{t}$

(γ) D = $\alpha_L\,\bar{v}$ + D_e = 0,1m x 0,16 m / ημέρα + 1,21 x 10^{-4} m^2 / ημέρα
= 0,016 m^2 / ημέρα

C/Co = 0,01 = ½ erfc $\frac{90-0{,}16t}{2\sqrt{0{,}016t}}$

Για erfc = 0,02 → $\frac{90-0{,}16t}{2\sqrt{0{,}016t}} \approx 1.65 \Rightarrow$ t = 504 ημέρες ≈ <u>1,4 χρόνια</u>

(δ) Σύγκριση (α) – (β): για σημαντική ταχύτητα ροής, δεν είναι υπέρ της ασφάλειας να αγνοούμε τη διασπορά. Σύγκριση (β) – (γ): μικρότερες τιμές α_L δίνουν πιο "στενές" κατανομές συγκεντρώσεων ρύπου → οι χρόνοι άφιξης μικρών τιμών C είναι πιο κοντά στο χρόνο άφιξης 0,5 Co.

(ε) Οι απλοποιήσεις (**i**) έως (**iii**) επιβλήθηκαν από τα δεδομένα της άσκησης. Βέβαια υπάρχουν κι άλλες απλοποιήσεις που έχουν γίνει πριν καν μας δοθεί η άσκηση (όπως η απόφαση να θεωρήσουμε το έδαφος ομοιογενές ή η απόφαση να εξετάσουμε τη συγκεκριμένη τομή – πιθανά αντιστοιχεί στην κοντινότερη απόσταση μεταξύ καναλιού και ταμιευτήρα; ή το πλησιέστερο σημείο στη διαρροή;).

(ζ) Μια βελτίωση που μπορώ να επιφέρω είναι να μην αγνοήσω τη ρόφηση. Σε αυτήν την περίπτωση, πρέπει να εκτιμήσω κάποια τιμή για το συντελεστή διαχωρισμού K_p.

(τ) Απαράδεκτα τεμπέλικη απόφαση: παίρνω την τιμή από προηγούμενη άσκηση, K_p =1.

Για n = 0.3, G_s = 2.65, ρ_w = 1 g/cm^3, K_p = 1 l/kg = 1 cm^3/g, και ρ_d = (1-n) $G_s\,\rho_w$ = 1.86 g/cm^3, βρίσκω το συντελεστή υστέρησης

$$R = 1 + \frac{\rho_d K_p}{n} = 1 + \frac{1.86\times 1}{0.3} = 7.2$$

(πε) Πιο εργατική απόφαση: θα βρω τον συντελεστή K_p από τη σχέση με το συντελεστή K_p = K_{oc}, x f_{oc} (2) ο οποίος εκφράζει την προτίμηση του ρύπου για το οργανικό κλάσμα του εδάφους, υποθέτοντας κάποιο ποσοστό για το οργανικό κλάσμα f_{oc}. Για το συντελεστή K_{oc}, που είναι ιδιότητα του ρύπου, θα ανατρέξω στη βιβλιογραφία. Για το οργανικό κλάσμα υποθέτω ΑΥΘΑΙΡΕΤΑ ότι f_{oc}= 0.1% (το όριο για να ισχύει η 2).

Στο Hazardous Waste Management των LaGrega et al. (1994), βρίσκω K_{oc} = 126 ml/g

$K_p = K_{oc} \times f_{oc} = 126 \times 0.001 = 0.126$ ml/g

[Εναλλακτικά, αν ξεκινήσω από το συντελεστή διαχωρισμού μεταξύ της **υδατικής φάσης** και της **οκτανόλης** $\log K_{ow} = 2.38 \rightarrow K_{ow} = 240$,
τότε μπορώ να χρησιμοποιήσω την εμπειρική σχέση:

$K_{oc} = 0.63\ K_{ow} = 151$ (μικρή διαφορά) και έτσι: $K_p = K_{oc} \times f_{oc} = 151 \times 0.001 = 0.151$ ml/g

Συμπέρασμα: Τουλάχιστον για το τριχλωροαιθένιο, η εμπειρική συσχέτιση μεταξύ K_{oc} και K_{ow} δεν είναι κακή.
Σημείωση: είναι πιο εύκολο να βρεθεί στα βιβλία τιμή για το συντελεστή K_{ow} παρά για το K_{oc}.]

$$R = 1 + \frac{\rho_d K_p}{n} = 1 + \frac{1.86 \times 0.126}{0.3} = 1.8$$

Τι θα αλλάξει;

Στην απάντηση (α), στη σχέση του χρόνου άφιξης ρύπου, η μέση γραμμική ταχύτητα διαιρείται με το συντελεστή υστέρησης.

Ανάλογα, θα αλλάξουμε την εξίσωση 1:

$$\frac{C}{C_0} = \frac{1}{2}\left\{ erfc\left(\frac{x - \bar{v}^* t}{2\sqrt{D^* t}} \right) + e^{\frac{\bar{v}^* x}{D^*}} erfc\left(\frac{x + \bar{v}^* t}{2\sqrt{D^* t}} \right) \right\}$$

Ο συντελεστής υδροδυναμικής διασποράς και η μέση γραμμική ταχύτητα διαιρούνται με τον συντελεστή υστέρησης R.

Ξανά οι απαντήσεις:

(α) Ο συντελεστής υστέρησης θα πολλαπλασιάσει τον χρόνο άφιξης ρύπου

(τ) $563 \times 7.2 = 4053$ ημέρες ≈ 11 χρόνια
(πε) $563 \times 1.8 = 1013$ ημέρες ≈ 3 χρόνια

(β) Υψηλή διασπορά

Ο όρος $\frac{\bar{v}^* x}{D^*}$ είναι βέβαια ίσος με τον όρο $\frac{\bar{v} x}{D}$, άρα και πάλι ισχύει η απλοποίηση της λύσης

(τ) Υψηλή διασπορά
Μεγάλος συντελεστής υστέρησης

$$C/Co = 0{,}01 = ½ \text{ erfc } \frac{90 - \frac{0{,}16}{7{,}2}t}{2\sqrt{\frac{0{,}16}{7{,}2}t}}$$

Για erfc = 0,02 → $\frac{90 - 0{,}02t}{2\sqrt{0{,}02t}} \approx 1.65 \Rightarrow$ t = 3136 ημέρες ≈ <u>8,6 χρόνια</u>

(πε) Υψηλή διασπορά
Μικρός συντελεστής υστέρησης

$$C/Co = 0{,}01 = ½ \text{ erfc } \frac{90 - \frac{0{,}16}{1{,}8}t}{2\sqrt{\frac{0{,}16}{1{,}8}t}}$$

Για erfc = 0,02 → $\frac{90 - 0{,}09t}{2\sqrt{0{,}09t}} \approx 1.65 \Rightarrow$ t = 814 ημέρες ≈ <u>2,2 χρόνια</u>

(γ) Χαμηλή διασπορά - Μεγάλος συντελεστής υστέρησης

t = 3666 ημέρες ≈ <u>10 χρόνια</u>

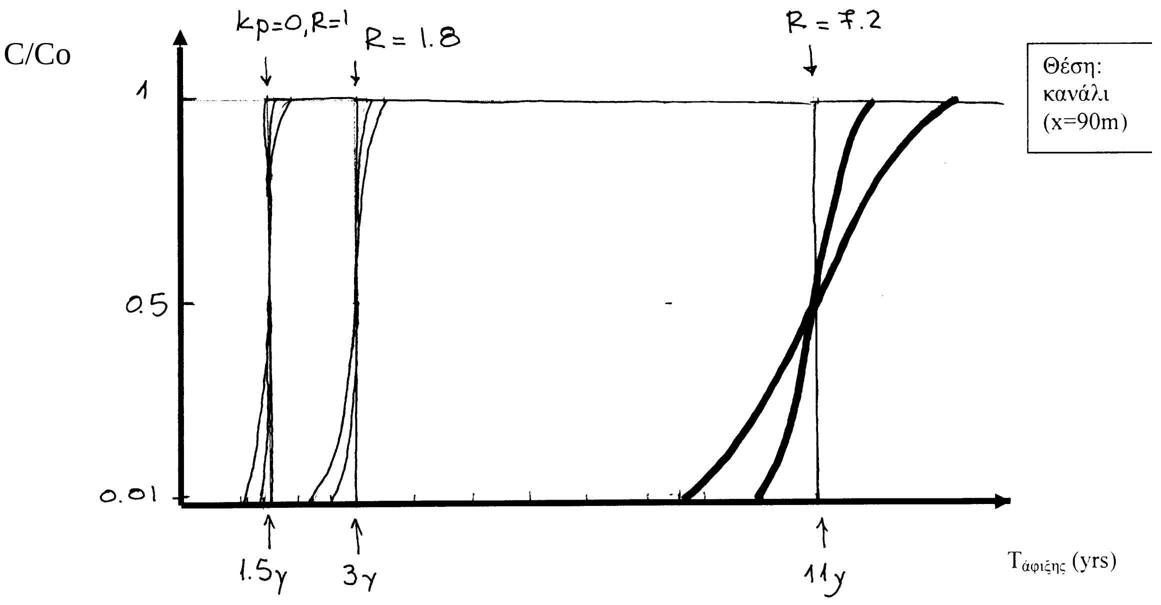
Χαμηλή διασπορά - Μικρός συντελεστής υστέρησης

t = 896 ημέρες ≈ <u>2,5 χρόνια</u>

Περίληψη αποτελεσμάτων με πίνακα:

	Kp=0 (R=1)		**Kp ↑ (R=7,2)**		**Kp ↓ (R=1,8)**	
	a_L ↑	a_L ↓	a_L ↑	a_L ↓	a_L ↑	a_L ↓
t_C=0.5C	1,5yrs	1,5yrs	11yrs	11yrs	3yrs	3yrs
t_C=0.01C	1,1yrs	1,4yrs	8,6yrs	10yrs	2,2yrs	2,5yrs

Περίληψη αποτελεσμάτων με σχήμα + πίνακα:



	Kp=0 (R=1)		Kp ↑ (R=7,2)		Kp ↓ (R=1,8)	
	a_L ↑	a_L ↓	a_L ↑	a_L ↓	a_L ↑	a_L ↓
t_C=0.5C	1,5yrs	1,5yrs	11yrs	11yrs	3yrs	3yrs
t_C=0.01C	1,1yrs	1,4yrs	8,6yrs	10yrs	2,2yrs	2,5yrs

Τα ίδια αποτελέσματα με το εκπαιδευτικό λογισμικό: