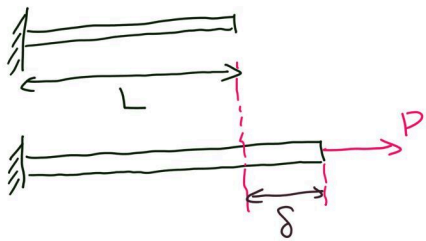


# Επίρραξη παραμόρφωσης σε ράβδους



$P(\delta)$ : το φορτίο  $P = P(\delta)$  είναι συνάρτηση της επιμήκυνσης  $\delta$  της ράβδου, σε κάθε φάση της παραμόρφωσης. Αν το υλικό είναι γραμμικά ελαστικό τότε η συνάρτηση  $P-\delta$  είναι γραμμική. Η δύναμη  $P$  παράγει έργο πάνω στη μετατόπιση  $\delta$ , ίσο με

$$W = \int_0^{\delta_1} P(\delta) d\delta$$

Το  $W$  ισούται με το εμβαδόν της επιφάνειας  $OABCO$ .

Το έργο  $W$  αποθηκεύεται είτε στο υλικό είτε κατά ένα μέρος του στη ράβδο. Το μέρος του  $W$  που αποθηκεύεται στη ράβδο κατά τη διαδικασία της φόρτισης, δίνεται επίρραξη παραμόρφωσης της ράβδου.

Εστω  $A$  το όριο ελαστικότητας του υλικού της ράβδου.

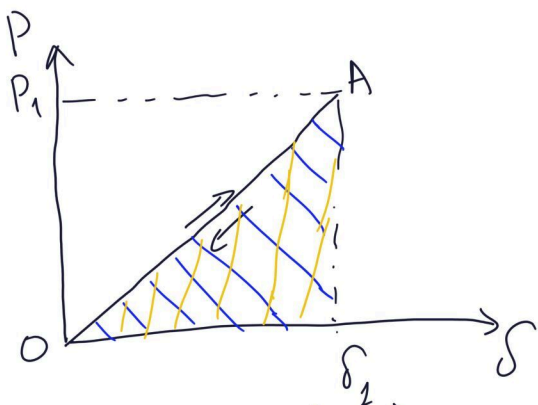
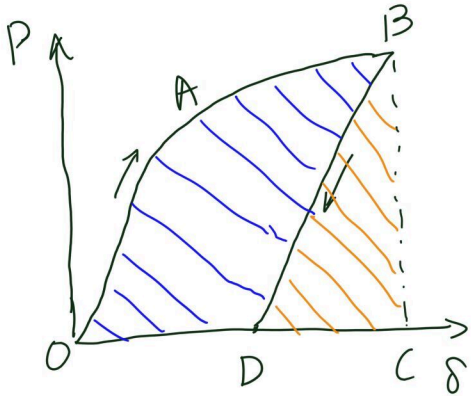
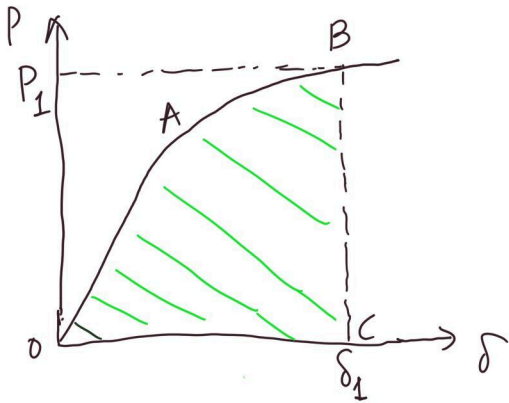
$BD$ : ενδία αποφόρτισης της ράβδου

$W =$  εμβαδόν της επιφάνειας  $OABCO$

Το μέρος του  $W$  που αποθηκεύεται στο περιβάλλον μέσα στην αποφόρτιση παριστάνεται από το εμβαδόν του τριγώνου  $BCD$ .

Το μέρος του  $W$  που χάνεται κατά τη διαδικασία της μόνιμης παραμόρφωσης της ράβδου, είναι το αναρροιστικό από το εμβαδόν  $OABDO$ .

Το εμβαδόν  $BCD$  παριστάνει την αποθηκευμένη επίρραξη παραμόρφωσης στη ράβδο κατά τη διαδικασία της φόρτισης.



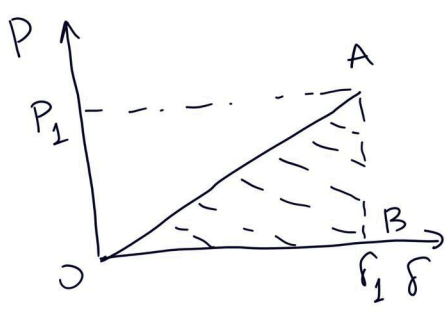
Για γραμμικά ελαστικό συμπεριφορά μέχρι το σημείο  $A$ , η καμπύλη  $OA$  και  $AO$  (φόρτισης και αποφόρτισης), συμπίπτουν. Τότε ολόκληρο

το  $W$  αποθηκεύεται στη ράβδο ως επίρραξη παραμόρφωσης  $U$  και

αποδίδεται πίσω στο περιβάλλον μέσα από την αποφόρτιση.

Τότε  $U = W$ .

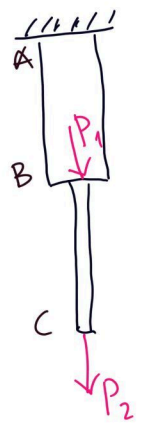
Ενεργειακές σχέσεις για τη γραμμικά ελαστική συμπεριφορά



Εμβαδόν  
 $W = U = (OAB) = \frac{1}{2} P_1 \delta_1$

Επειδή  
 $\delta = \frac{PL}{EA}$  EA: αξονική σκληρότητα  
 έχουμε ότι  
 $U = W = \frac{P^2 L}{2EA}$  ή  $U = \frac{EA \delta^2}{2L}$

Έχω μη γραμμική σχέση  $U(P)$  ή  $U(\delta)$ , παρόλο που έχουμε γραμμική σχέση  $P(\delta)$  λόγω της γραμμικά ελαστικής υλίκης. Λόγω της μη γραμμικής σχέσης  $U(P)$  ή  $U(\delta)$  δεν ισχύει η αρχή της επαλληλίας για την ενέργεια παραμόρφωσης.



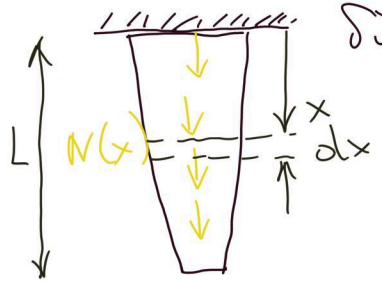
$U = U_{ABC} + U_{BC}$  Γενικά  $U = \sum_{i=1}^n U_i$

Για γραμμικά ελαστικά υλικά

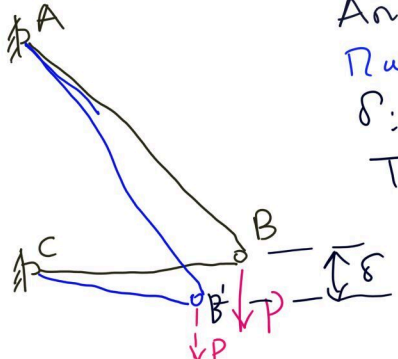
$U = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 L_i}{2E_i A_i}$

Για μη ομογενή (με συνεχώς μεταβαλλόμενη διατομή) ράβδου, που υφίσταται σε συνεχώς μεταβαλλόμενη εσωτερική δύναμη  $N(x)$  έχουμε:

$U = \int_0^L \frac{N^2(x) dx}{2EA(x)}$



Υπολογισμός μετακινήσεων με χρήση της ενέργειας παραμόρφωσης

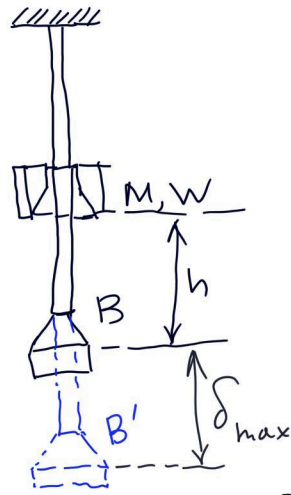
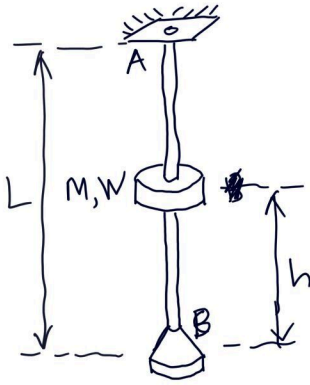


Αναπαράφω σχήμα } Εννοία ράβδου  
 Παραμορφωμένο σχήμα } AB και BC  
 $\delta$ : Κατακίση μετακίνηση του σημείου B.  
 Το έργο της  $P$ ,  $W = \frac{P\delta}{2}$  για γραμμικά ελαστικά υλικά  
 Επειδή  $U = W$   
 μπορώ να υπολογίσω το  $\delta$  από τη σχέση  $\delta = \frac{2U}{P}$   
 Το  $U(N_{AB}, N_{BC})$  θα γραφεί ως συνάρτηση των εσωτερικών δυνάμεων των ράβδων.



Επιμήκυνση ράβδου λόγω υποστατικής φόρτισης

2d εικόνα



Κατά την μέωση του κοιλίου, βάρους  $W$  και μάζας  $M$ , από ύψος  $h$ , έχουμε μέγιστη επιμήκυνση  $\delta_{max}$  στην ράβδο  $AB$ , καθώς το κοιλίο κολλάει στην φθάνετα στο σημείο  $B$ .

Το κοιλίο είναι δυναμικό, διότι η υποστατική δύναμη  $W$  εφαρμόζεται ανεπίρροια στο άκρο  $B$  της ράβδου. Έχω δυναμική και όχι στατική φόρτιση. Η μέγιστη παραμόρφωση του σημείου  $B$ , λόγω ταλάντωσης πάνω-κάτω, θα είναι η  $\delta_{max}$ .

Τη στιγμή που αναρριχόμαστε η  $\delta_{max}$  στο  $B$ , θα έχω την ενεργειακή εξίσωση

$$W(h + \delta_{max}) = \frac{EA \delta_{max}^2}{2L} \quad (1)$$

Η λύση της (1) ως προς  $\delta_{max}$  είναι:

$$\delta_{max} = \delta_{st} + (\delta_{st}^2 + 2h\delta_{st})^{1/2} \quad (2)$$

όπου

$$\delta_{st} = \frac{WL}{EA} = \frac{MgL}{EE} \quad (3)$$

$EA$ : ατομική σταθερότητα της ράβδου  
 $g$ : εντάχωνος βαρύτητας

Η (2) γράφεται και ως

$$\delta_{max} = \delta_{st} \left[ 1 + \left[ 1 + \frac{2h}{\delta_{st}} \right]^{1/2} \right] \quad (4)$$

$\delta_{st}$ : η επιμήκυνση της ράβδου υπό στατική (αρχική) φόρτιση μεγέθους  $W$ .

Για  $h \approx 40 \delta_{st}$ :  $\delta_{max} \approx 10 \delta_{st}$

Μεγάλη διαφορά στην κινηματική ανύψωση μιας ράβδου, υπό δυναμική φόρτιση, σε σχέση με την κινηματική ανύψωση υπό στατική φόρτιση, ίδιου μεγέθους.

Αν αφήσουμε αντί το βάρος  $W$  του κοιλίου να αναρριχθεί στην φθάνετα, από ύψος  $h=0$ , τότε η (4) δίνει  $\delta_{max} = 2 \delta_{st}$ . Έχω δηλαδή διπλάσια επιμήκυνση αν το φορτίο εφαρμόζεται ανεπίρροια (από ύψος  $h=0$ ) στην ράβδο

