Σημειώσεις Ανάλυσης ΙΙ
(Β′ ΕΞΑΜΗΝΟ ΣΕΜΦΕ 2022)

Περιεχόμενα

Μέρος Α: Πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής

Κεφάλαιο 1

Σειρές Πραγματικών αριθμών

Γενικά με τον όρο *σειρά* εννοούμε μια άπειρη παράσταση της μορφής

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

όπου (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τυπικά βέβαια ένα τέτοιο άπειρο ά-θροισμα δεν ορίζεται αφού η πρόσθεση είναι μια πράξη που αφορά πεπερασμένο πλήθος προσθεταίων. Όμως το πρόβλημα αυτό μπορεί να παρακαμφθεί όπως θα δούμε μέσω της έννοιας του *ορίου*. Πιο συγκεκριμένα με την παραπάνω έκφραση θα εννοούμε το όριο της ακολουθίας (s_n) με

$$s_n = a_1 + \dots + a_n$$

εφόσον βέβαια αυτό υπάρχει (πεπερασμένο ή άπειρο). Η ακολουθία αυτή καλείται ακολουθία των *μερικών αθροισμάτων της σειράς*.

Για παράδειγμα

$$0,333... = 0,3 + 0,03 + 0,003 + \dots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots$$

Παρατηρείστε ότι εδώ η ακολουθία (s_n) είναι η ακολουθία

$$s_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \dots + \frac{3}{10^n}$$

που όπως θα δούμε συγκλίνει στον αριθμό $1/3$.

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε κάποια βασικά στοιχεία της θεωρίας των σειρών πραγματικών αριθμών.

1. Βασικοί ορισμοί

Σειρά είναι μια άπειρη παράσταση της μορφής

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

όπου (a_n) είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το άθροισμα

$$s_n = a_1 + \dots + a_n$$

ονομάζεται ***n-μερικό άθροισμα της σειράς*** και η ακολουθία (s_n) που προκύ-πτει απο αυτά καλείται ***ακολουθία μερικών αθροισμάτων της σειράς***. Η παραπάνω σειρά γράφεται και με το σύμβολο "$\sum$" του αθροίσματος ως

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

και ομοίως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ γράφεται και το n- μερικό άθροισμα ως

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Παρατηρηση 1.1. Παρατηρείστε ότι από την ακολουθία (s_n) μπορούμε να πάρουμε την ακολουθία (a_n) αφού $a_1 = s_1$ και για κάθε $n \geq 2$,

$$a_n = s_n - s_{n-1}.$$

Παρατηρηση 1.2. Πολλές φορές είναι χρήσιμο η άθροιση σε μια σειρά να ξεκινάει από το $n = 0$ αντί για το $n = 1$ (ή ακόμη και από άλλους φυσικούς αριθμούς πχ. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$). Στην περίπτωση αυτή για τη σειρά γράφουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$$

και τα μερικά αθροίσματα είναι η ακολουθία (s_n) όπου

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \cdots + a_n$$

δηλαδή $s_0 = a_0$, $s_1 = a_0 + a_1$, $s_2 = a_0 + a_1 + a_2$, ...

Ορισμος 1.1. *Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και έστω $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της. Αν υπάρχει το όριο*

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = s$$

*(πεπερασμένο ή άπειρο) τότε το όριο αυτό καλείται **όριο** (ή **άθροισμα**) της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και στην περίπτωση αυτή γράφουμε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

*Όταν το όριο s της σειράς είναι πραγματικός αριθμός θα λέμε ότι η σειρά **συγκλίνει** στο $s \in \mathbb{R}$ ή ότι η σειρά είναι **συγκλίνουσα**. Όταν το όριο της σειράς είναι το $+\infty$ (αντ. το $-\infty$) τότε θα λέμε ότι η σειρά **αποκλίνει** στο $+\infty$ (αντ. στο $-\infty$). Μια σειρά που δεν είναι συγκλίνουσα (δηλαδή το όριό της είτε δεν υπάρχει ή υπάρχει αλλά είναι $\pm\infty$) θα καλείται **αποκλίνουσα** σειρά. Ειδικότερα, αν όριό της δεν υπάρχει τότε λέμε ότι η σειρά **ταλαντώνεται**.*

Παραδειγμα 1.1. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = -1 + 1 - 1 + \ldots$ είναι ένα παράδειγμα αποκλίνουσας σειράς που ταλαντώνεται. Πράγματι, έχουμε $s_{2n} = 0 \to 0$ και $s_{2n-1} = -1 \to -1$ και συνεπώς το όριο της (s_n) δεν υπάρχει.

Προταση 1.2. *Έστω οι συγκλίνουσες σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ και έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$ είναι συγκλίνουσα και ισχύει ότι*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Αποδειξη. Έστω $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ και $\tau_n = b_1 + \cdots + b_n$ τα μερικά αθροίσματα των σειρών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αντίστοιχα. Τότε για τα μερικά αθροίσματα w_n της $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$ έχουμε

$$w_n = (\lambda a_1 + \mu b_1) + \cdots + (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda s_n + \mu \tau_n$$

και άρα

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lambda \lim_{n\to+\infty} s_n + \mu \lim_{n\to+\infty} \tau_n$$

□

2. Μερικά παραδείγματα σειρών

1) Η ***γεωμετρική σειρά***

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

ή γενικότερα

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = a + ax + ax^2 + ax^3 + \dots$$

όπου $a \neq 0, x$ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Όπως θα δούμε η γεωμετρική σειρά είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν $x \in (-1, 1)$ και στην περίπτωση αυτή το άθροισμα της σειράς είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = \frac{a}{1-x}$$

Πχ. όπως αναφέραμε στην αρχή του κεφαλαίου αν $a = 3/10$ και $x = 1/10$ έχουμε την σειρά

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

2) Η ***αρμονική σειρά***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

Αποδεικνύεται (δείτε Παράδειγμα 1.12) ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

3) Οι p-***αρμονικές σειρές***, δηλαδή οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$$

όπου $p \in \mathbb{R}$. Αποδεικνύεται (δείτε Πρόταση 1.12) ότι η p-αρμονική σειρά είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν $p > 1$. Ειδικότερα για $p = 2$ αποδεικνύεται ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

4) Οι ***εναλλάσσουσες σειρές*** δηλαδή σειρές της μορφής

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$$

όπου $a_n > 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Χαρακτηριστικό παράδειγμα εδώ είναι η *εναλλάσσουσα αρμονική σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

Αποδεικνύεται[1] ότι για την εναλλάσσουσα αρμονική έχουμε

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \ln 2$$

5) Οι ***τηλεσκοπικές σειρές***: Από την Παρατήρηση 1.1 κάθε σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ γράφεται ως $\sum_{n=1}^{\infty}(s_n - s_{n-1})$ όπου $s_n = 0$ και $s_n = a_1 + \dots + a_n$ αν $n \geq 1$. Μια σειρά καλείται *τηλεσκοπική ως προς μια δεδομένη ακολουθία* (b_n) όταν είναι της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n-1})$ ή της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ δηλαδή οι όροι της είναι διαφορές διαδοχικών όρων της (b_n). Παρατηρείστε ότι τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n-1})$ δίνονται απο τον τύπο

$$s_n = (b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) + \dots + (b_n - b_{n-1}) = b_n - b_0$$

και ανάλογα αν είναι της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$. Έτσι το άθροισμα μιας τηλεσκοπικής σειράς προσδιορίζεται από το όριο της ακολουθίας (b_n) που την ορίζει. Ένα κλασσικό παράδειγμα εδώ είναι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots$$

Η παραπάνω σειρά είναι τηλεσκοπική (ως προς την ακολουθία $b_n = \frac{1}{n}$) διότι

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = b_n - b_{n+1}$$

και άρα

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 1$$

6) ***Σειρές που συγκλίνουν στο π και στον e***: Αποδεικνύεται[2] ότι

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

[1] Με χρήση του αναπτύγματος σε δυναμοσειρά της $\ln(1+x)$

[2] Η απόδειξη γίνεται με χρήση δυναμοσειρών και συγκεκριμένα με το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά της $\arctan x$ που θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο.

και συνεπώς ο αριθμός π γράφεται με τη μορφή σειράς ως

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \dots$$

Αντίστοιχα για τον αριθμό e αποδεικνύεται [3] ότι

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

3. Βασικές προτάσεις σύγκλισης σειρών.

Η θεωρία των σειρών επικεντρώνεται στην εύρεση κριτηρίων που δείχνουν αν μια σειρά συγκλίνει ή όχι. Υπενθυμίζουμε ότι όταν λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει* εννοούμε ότι $\lim_{n\to+\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$.

Το πρώτο πράγμα που βλέπουμε σε μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι οι όροι της, δηλαδή η ακολουθία (a_n). Επειδή

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

έπεται άμεσα ότι αν $\lim_{n\to+\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$ τότε

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} s_n - \lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Από τα παραπάνω καταλήγουμε στο εξής.

Πρόταση 1.3. *Αν μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Ισοδύναμα, αν η (a_n) δεν συγκλίνει στο 0 τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.*

Παράδειγμα 1.2. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ αποκλίνει.

Πράγματι, $\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$ αφού $\lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \cos 0 = 1$.

Πρόταση 1.4. *Η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = a + ax + ax^2 + \dots$ (όπου $a \neq 0$) συγκλίνει μόνο για $x \in (-1,1)$ και στην περίπτωση αυτή*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = \frac{a}{1-x}.$$

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} ax^n$ συγκλίνει τότε απο την Πρόταση 1.3 θα πρέπει $\lim_{n\to+\infty}(ax^n) = a\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$. Επειδή $a \neq 0$ αυτό σημαίνει ότι $\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$. Αυτό όμως δεν μπορεί να συμβαίνει όταν $|x| \geq 1$ αφού τότε $|x^n| = |x|^n \geq 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν τώρα $x \in (-1,1)$ επειδή

$$s_n = a + ax + \dots + ax^n = a\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

θα έχουμε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\left(a\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right) = a\frac{1-\lim_{n\to+\infty} x^{n+1}}{1-x} = \frac{a}{1-x}$$

□

[3] Η απόδειξη γίνεται με χρήση του αναπτύγματος σε δυναμοσειρά της e^x.

Παρατηρηση 1.3. Τονίζουμε ότι η Πρόταση 1.3 ***δεν*** μας λέει ότι αν $a_n \to 0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Πχ. $1/n \to 0$ αλλά όπως έχουμε αναφέρει η αρμονική σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ (θα το αποδείξουμε αυτό στην επόμενη παράγραφο).

Το δεύτερο γενικό κριτήριο σύγκλισης σειρών είναι το κριτήριο Cauchy. Θυμίζουμε ότι μια ακολουθία (a_n) καλείται Cauchy αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $|a_n - a_m| < \varepsilon$ για όλα τα $n > m \geq n_0$. Όπως έχουμε δεί στις ακολουθίες μια ακολουθία είναι συγκλίνουσα (σε πραγματικό αριθμό) αν και μόνο αν είναι Cauchy. Επειδή εξ ορισμού μια σειρά είναι συγκλίνουσα αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της είναι συγκλίνουσα, όσον αφορά τις σειρές το κριτήριο Cauchy αναδιατυπώνεται άμεσα ως εξής:

Προταση 1.5. ***(Κριτήριο Cauchy)*** *Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Τότε η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς είναι Cauchy, δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε*

$$|s_n - s_m| = a_{m+1} + \cdots + a_n < \varepsilon$$

για όλα τα $n > m \geq n_0$.

Το κριτήριο Cauchy είναι πολύ χρήσιμο εργαλείο για την απόδειξη άλλων κριτηρίων σύγκλισης σειρών που θα παρουσιάσουμε στην συνέχεια. Μια άμεση εφαρμογή του είναι και η παρακάτω:

Προταση 1.6. *Έστω οι ακολουθίες (a_n) και (b_n) με $a_n = b_n$ για όλα τα $n \geq n_0$.*

(1) Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει (όχι όμως απαραίτητα στον ίδιο πραγματικό αριθμό).

(2) Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει στο $+\infty$ (αντ. $-\infty$) τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει στο $+\infty$ (αντ. $-\infty$).

(2) Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ταλαντώνεται τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ταλαντώνεται.

Αποδειξη. Αν $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ και $\tau_n = b_1 + \cdots + b_n$ τα μερικά αθροίσματα των $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αντιστοίχως τότε για κάθε $n > m \geq n_0$ έχουμε ότι

$$|s_n - s_m| = \sum_{k=m+1}^{n} a_k = \sum_{k=m+1}^{n} b_k = |\tau_n - \tau_m|.$$

Από αυτή την παρατήρηση και το κριτήριο Cauchy η πρόταση έπεται εύκολα. □

4. Κριτήρια σειρών με μη αρνητικούς όρους.

Οι πρώτες σειρές που μελετάμε είναι οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Στην παράγραφο αυτή θα δούμε μερικά βασικά κριτήρια σύγκλισης τέτοιων σειρών. Είναι εύκολο καταρχάς να δούμε ότι τα μερικά αθροίσματα μιας σειράς με μη αρνητικούς όρους αποτελούν μια **αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών αριθμών** αφού

$$s_{n+1} = a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \geq 0$$

Ως γνωστόν, μια αύξουσα ακολουθία είτε είναι άνω φραγμένη και συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό είτε δεν είναι άνω φραγμένη και αποκλίνει στο $+\infty$. Συνεπώς είτε $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \geq 0$ ή $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. Με άλλα λόγια πάντα υπάρχει το άθροισμα μιας σειράς με μη αρνητικούς όρους (μπορεί όμως να είναι και το $+\infty$). Καταλήξαμε συνεπώς στο εξής.

Πρόταση 1.7. *Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

(1) Αν η (s_n) είναι άνω φραγμένη τότε η σειρά συγκλίνει.

(2) Αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη τότε η σειρά αποκλίνει και ειδικότερα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο Cauchy έπεται το εξής.

Πρόταση 1.8. ***(Κριτήριο άμεσης σύγκρισης)*** *Έστω (a_n) και (b_n) δύο ακολουθίες μη αρνητικών αριθμών με την ιδιότητα $a_n \leq b_n$, για κάθε $n \geq n_0$. Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει ή ισοδύναμα, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ και $\tau_n = b_1 + \cdots + b_n$ τα μερικά αθροίσματα των σειρών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Αν $n > m \geq n_0$ τότε από την υπόθεσή μας έπεται ότι

$$|s_n - s_m| = s_n - s_m = a_n + \cdots + a_{m+1} \leq b_n + \cdots + b_{m+1} = \tau_n - \tau_m = |\tau_n - \tau_m|$$

Από την σχέση αυτή έπεται ότι αν η (τ_n) είναι Cauchy (η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει) τότε και η (s_n) είναι Cauchy (η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει). Ισοδύναμα αν η (s_n) δεν είναι Cauchy (η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει) τότε ούτε και η (τ_n) είναι Cauchy(η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει). $\square$

Απο το παραπάνω έπεται και το εξής.

Πρόταση 1.9. ***(Κριτήριο οριακής σύγκρισης)*** *Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ σειρές με $a_n \geq 0$ και $b_n > 0$ για κάθε $n \geq n_0$. Έστω επίσης ότι*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, +\infty)$$

Τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.

Απόδειξη. Αφού $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, +\infty)$ για $\varepsilon = L/2$ έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με

$$0 < \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2} \Rightarrow 0 < \frac{L}{2} \cdot b_n < a_n < \frac{3L}{2} \cdot b_n \tag{1.1}$$

Έστω $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ και $\tau_n = b_1 + \cdots + b_n$ τα μερικά αθροίσματα των σειρών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Από την (1.1) έπεται ότι

$$0 < \tau_n < \frac{2}{L} \cdot s_n \tag{1.2}$$

και

$$0 < s_n < \frac{3L}{2} \cdot \tau_n. \tag{1.3}$$

Έστω τώρα ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Αυτό σημαίνει ότι η (s_n) είναι συγκλίνουσα και άρα φραγμένη. Από την (1.2) έπεται ότι η (τ_n) είναι άνω φραγμένη και συνεπώς από την Πρόταση 1.7 η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει. Αντίστοιχα με τον ίδιο συλογισμό και χρησιμοποιώντας την (1.3) δείχνουμε ότι αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει τότε συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Παραδειγμα 1.3. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ αποκλίνει.

Πράγματι,
$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$
για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή όπως έχουμε πεί και θα εξηγήσουμε στα επόμενα η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, απο το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ αποκλίνει.

Παραδειγμα 1.4. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει.

Πράγματι, $0 < \displaystyle\frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα επειδή η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, απο το κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει.

Παραδειγμα 1.5. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ αποκλίνει.

Πράγματι, $\sin\left(\displaystyle\frac{1}{n}\right) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$
Επειδή η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, απο το οριακό κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ αποκλίνει.

Παραδειγμα 1.6. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ συγκλίνει.

Πράγματι, $\sin\left(\displaystyle\frac{1}{n^2}\right) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$
Επειδή η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει (και αυτό θα το δούμε παρακάτω), από το οριακό κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ συγκλίνει.

Παραδειγμα 1.7. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+5n+7}$ αποκλίνει.

Πράγματι,

$$\frac{n+1}{n^2+5n+7} = \frac{n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}\right)} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}}$$

και άρα

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n+1}{n^2+5n+7}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}} = 1$$

Επειδή η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ αποκλίνει, απο το οριακό κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+5n+7}$ αποκλίνει.

5. Το Ολοκληρωτικό Κριτήριο.

Ορισμος 1.10. *Αν $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$ με $f(x)>0$ για κάθε $x\geq a$, το* ***γενικευμένο ολοκλήρωμα*** *της f ορίζεται να είναι το όριο*

$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\ dt$$

και συμβολίζεται με

$$\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$$

Το παραπάνω όριο πάντα υπάρχει (επειδή η συνάρτηση $F(x)=\int_a^x f(t)\ dt$ είναι αύξουσα όταν η f είναι θετική) μπορεί να είναι όμως και $+\infty$. Στην περίπτωση όπου το $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ είναι πραγματικός αριθμός λέμε ότι ***το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f συγκλίνει***. Διαφορετικά λέμε ότι ***αποκλίνει***.

Παραδειγμα 1.8. Έστω $p\geq 1$ και $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(t)=\frac{1}{t^p}.$$

(1) Αν $p=1$ τότε

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\ dt = +\infty$$

και άρα το το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\ dt$ αποκλίνει.

(2) Αν $p>1$ τότε

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^p}\ dt = \frac{1}{p-1}$$

και άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^p}\ dt$ συγκλίνει.

Απόδειξη. Πράγματι,

$$(\ln t)' = 1/t \Rightarrow \int_1^x \frac{1}{t}\ dt = \ln x - \ln 1 = \ln x$$

ενώ για κάθε $a \neq -1$,

$$\left(\frac{t^{a+1}}{a+1}\right)' = t^a \Rightarrow \int_1^x t^a\ dt = \frac{x^{a+1}}{a+1} - \frac{1}{a+1}$$

Άρα

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\ dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t}\ dt = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

ενώ αν $p > 1$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^p}\ dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x t^{-p}\ dt = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}\right) = \frac{1}{p-1}$$

αφού λόγω του ότι $p > 1$, $\lim_{x\to+\infty} x^{-p+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{p-1}} = 0$. □

Πρόταση 1.11. ***(Το Ολοκληρωτικό Κριτήριο)*** *Έστω $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ μια θετική και φθίνουσα συνάρτηση. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει αν και μόνο αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ dt$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Ισχύει ότι

$$\int_1^{+\infty} f(x)\ dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)\ dx \tag{1.4}$$

Πράγματι, επειδή η f είναι φθίνουσα έχουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$ για κάθε $x \in [k, k+1]$ και άρα

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)\ dx \geq f(k+1)$$

Συνεπώς, για κάθε $n \geq 2$,

$$f(1) + \cdots + f(n-1) \geq \int_1^2 f(x)\ dx + \cdots + \int_{n-1}^n f(x)\ dx \geq f(2) + \cdots + f(n)$$

ή ισοδύναμα,

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geq \int_1^n f(x)\ dx \geq \sum_{k=2}^{n} f(k).$$

Από την σχέση αυτή προκύπτει εύκολα ότι

$$\int_1^n f(x)\ dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x)\ dx$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και παίρνοντας όρια έπεται η (1.4). □

Παρατηρηση 1.4. Αν $f(x) = 1/x$ τότε η σχέση (1.4) δίνει

$$\ln n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$$

και συνεπώς $0 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n < 1$

Προταση 1.12. *Η αρμονική σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *αποκλίνει ενώ η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *με* $p > 1$, *συγκλίνει.*

Αποδειξη. Πράγματι, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ με $f(t) = 1/t$. Απο τη Πρόταση 1.8 έχουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$ αποκλίνει και άρα απο το Ολοκληρωτικό κριτήριο η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει. Αντίστοιχα, για $p > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ με $f(t) = 1/t^p$ και από την Πρόταση 1.8 το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^p}\, dt$ συγκλίνει. □

6. Το Κριτήριο Συμπύκνωσης του Cauchy.

Περνάμε τώρα σε ένα δεύτερο κριτήριο για σειρές της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με (a_n) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών.

Προταση 1.13. ***(Κριτήριο Συμπύκνωσης του Cauchy)*** *Έστω* (a_n) *φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots$ *συγκλίνει.*

Αποδειξη. Έστω $m \in \mathbb{N}$ και έστω k μη αρνητικός ακέραιος με την ιδιότητα

$$2^k \leq m < 2^{k+1}$$

(αφού η ακολουθία $(2^k)_{k=0}^{\infty}$ είναι γνησίως αύξουσα με $2^0 = 1$ είναι εύκολο να δούμε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένας μοναδικός $k \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα αυτή). Ισχυριζόμαστε ότι

$$\sum_{n=0}^{k} 2^{n-1} a_{2^n} \leq \sum_{n=1}^{m} a_n \leq \sum_{n=0}^{k} 2^n a_{2^n} \tag{1.5}$$

Παίρνοντας όρια η παραπάνω ανισότητα δίνει ότι

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

και το κριτήριο έπεται.

Περνάμε στην απόδειξη της (1.5). Αποδεικνύουμε πρώτα την δεξιά ανισότητα: Επειδή $m < 2^{k+1}$, $a_n > 0$ και η (a_n) είναι φθίνουσα, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m} a_n \leq a_1 + \cdots + a_{2^{k+1}-1} &= a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq a_1 + (a_2 + a_2) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^k}) \\ &= a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k} = \sum_{n=0}^{k} 2^n a_{2^n}\end{aligned}$$

Αντίστοιχα, για την αριστερή ανισότητα: Έχουμε $m \geq 2^k$. Για $k = 0$ έχουμε $\frac{1}{2}a_1 \leq a_1$ που προφανώς ισχύει. Γενικά για $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m} a_n \geq a_1 + \cdots + a_{2^k} &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \\ &\geq \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1}a_{2^k} = \sum_{n=0}^{k} 2^{n-1} a_{2^n}.\end{aligned}$$

□

Παραδειγμα 1.9. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο συμπύκνωσης μπορούμε να δώσουμε και μια γρήγορη απόδειξη της μη σύγκλισης της αρμονικής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αλλά και πιο γενικά της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{an+b}$, όπου a, b θετικές σταθερές. Πράγματι, η ακολουθία $a_n = \frac{1}{an+b}$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών και

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{a \cdot 2^n + b} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a + \frac{b}{2^n}} = +\infty$$

αφού $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a + \frac{b}{2^n}} = \frac{1}{a} \neq 0$.

Παραδειγμα 1.10. Η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ αποκλίνει. Πράγματι, η ακολουθία $a_n = \frac{1}{n \cdot \ln n}$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών και

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \cdot \ln(2^n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln 2 \cdot n} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

7. Το Κριτήριο Λόγου και το Κριτήριο Ρίζας.

Τα κριτήρια Λόγου (D'Alembert) και αντίστοιχα Ρίζας (Cauchy) ανάγουν την σύγκλιση μιας σειράς με θετικούς όρους στην μελέτη της ακολουθίας των λόγων $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ και αντίστοιχα των n-οστών ριζών $\sqrt[n]{a_n}$. Πρόκειται στην ουσία για δύο κριτήρια σύγκρισης της σειράς με την γεωμετρική σειρά.

Πρόταση 1.14. (***Κριτήριο Λόγου I***) *Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

(1) *Αν υπάρχει $\lambda \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lambda$ για κάθε $n \geq n_0$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.*

(2) *Αν $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ για κάθε $n \geq n_0$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.*

Απόδειξη. (1) Έστω $0 < \lambda < 1$ τέτοιο ώστε $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lambda$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε $a_{n_0+k} \leq a_{n_0}\lambda^k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Θέτοντας $a = \dfrac{a_{n_0}}{\lambda^{n_0}}$ παίρνουμε ότι

$$a_n \leq a\lambda^n$$

για κάθε $n \geq n_0$. Επειδή $0 < \lambda < 1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a\lambda^n$ συγκλίνει (Πρόταση 1.4) και άρα απο το κριτήριο σύγκρισης (Πρόταση 1.8) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(2) Αν $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ για κάθε $n \geq n_0$ έπεται ότι $a_{n+1} \geq a_n$ για κάθε $n \geq n_0$ (δηλαδή η (a_n) είναι τελικά αύξουσα). Ειδικότερα, $a_n \geq a_{n_0} > 0$ για κάθε $n \geq n_0$ που σημαίνει ότι η (a_n) δεν μπορεί να συγκλίνει στο μηδέν και άρα (Πρόταση 1.3) η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει. □

Προκύπτει τώρα άμεσα το επόμενο δεύτερο κριτήριο Λόγου που συνήθως χρησιμοποιούμε στην πράξη.

Πρόταση 1.15. (***κριτήριο Λόγου II***) *Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω επίσης ότι*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$$

(1) *Αν $\lambda < 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.*
(2) *Αν $\lambda > 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.*

Παρατήρηση 1.5. Το Κριτήριο Λόγου II δεν μπορεί να αποφανθεί αν $\lambda = 1$. Πχ. και για τις δύο σειρές $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ και $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

και αντίστοιχα

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}\right)^2 = 1$$

αλλά, όπως είδαμε απο το ολοκληρωτικό κριτήριο, η πρώτη αποκλίνει ενώ η δεύτερη συγκλίνει.

Παράδειγμα 1.11. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ συγκλίνει. Πράγματι,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{2}{n+1}$$

και άρα

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n+1}=0<1$$

Παραδειγμα 1.12. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ συγκλίνει. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)!}{n!}&=\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\cdot(n+1)\\&=\frac{n^n}{(n+1)^n}\\&=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\end{aligned}$$

και άρα

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1$$

Περνάμε τώρα στο Κριτήριο Ρίζας.

Προταση 1.16. ***(Κριτήριο Ρίζας I)*** *Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ με $a_n\geq 0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.*

(1) *Αν υπάρχει $\lambda\in(0,1)$ με $\sqrt[n]{a_n}\leq\lambda$ για κάθε $n\geq n_0$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει.*
(2) *Αν $\sqrt[n]{a_n}\geq 1$ για άπειρα $n\in\mathbb{N}$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ αποκλίνει.*

Αποδειξη. (1) Αν υπάρχει $\lambda\in(0,1)$ με $\sqrt[n]{a_n}\leq\lambda$ για κάθε $n\geq n_0$, τότε $a_n\leq\lambda^n$ για κάθε $n\geq n_0$ και άρα (όπως και στην απόδειξη του κριτηρίου Λόγου) επειδή η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει για $0<\lambda<1$, από το κριτήριο σύγκρισης η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει.

(2) Αν $\sqrt[n]{a_n}\geq 1$ για για άπειρα $n\in\mathbb{N}$ τότε $a_n\geq 1$ για άπειρα $n\in\mathbb{N}$ και άρα η (a_n) δεν συγκλίνει στο μηδέν (αν συνέκλινε θα έπρεπε κάθε υπακολουθία της (άρα και η υπακολουθία που έχει όρους τα $a_n\geq 1$) να συγκλίνει και αυτή στο 0). □

Μια δεύτερη μορφή του κριτηρίου Ρίζας που έπεται εύκολα και είναι χρήσιμη στην πράξη είναι και η εξής.

Προταση 1.17. ***(Κριτήριο Ρίζας II)*** *Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ με $a_n\geq 0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Έστω επίσης ότι*

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lambda$$

(1) *Αν $\lambda<1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει.*
(2) *Αν $\lambda>1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ αποκλίνει.*

Παρατηρηση 1.6. Όπως και το κριτήριο λόγου, το κριτήριο ρίζας δεν μπορεί να αποφανθεί αν $\lambda = 1$. Πχ. και για τις δύο σειρές $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ και $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ έχουμε έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}} = 1$$

και ομοίως

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = \frac{1}{\left(\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}\right)^2} = 1$$

αλλά η πρώτη αποκλίνει ενώ η δεύτερη συγκλίνει.

Παρατηρηση 1.7. Είναι γνωστό ότι για μια ακολουθία (a_n) θετικών όρων

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$$

(η αντίστροφη συνεπαγωγή δεν ισχύει). Άρα το κριτήριο Ρίζας αποφαίνεται όπου αποφαίνεται και το κριτήριο Λόγου (με τον ίδιο βέβαια τρόπο). Υπάρχουν όμως περιπτώσεις όπου το Κριτήριο Λόγου δεν αποφαίνεται αλλά το Ρίζας μπορεί να αποφανθεί. Πχ. η σειρά

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots$$

συγκλίνει (στο 2). Είναι $a_{2n-1} = a_{2n} = 1/2^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = 1 \text{ ενώ } \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = 1/2$$

και άρα το κριτήριο Λόγου (και το I και το II) δεν μπορούν να αποφανθούν. Όμως μπορούμε να δείξουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1/2 < 1$ και άρα από το κριτήριο Ρίζας II η σειρά συγκλίνει.

Παραδειγμα 1.13. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{5n+4}\right)^n$ συγκλίνει. Πράγματι,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n}{5n+4}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{5n+4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{5+4/n} = 3/5 < 1.$$

8. Εναλλάσσουσες σειρές

Πορισμα 1.18. ***(Κριτήριο Leibniz)*** *Έστω (a_n) φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών όρων. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$ συγκλίνει.*

Αποδειξη. Δίνουμε σύντομα την απόδειξη (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες). Έστω (s_n) η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$. Παρατηρούμε ότι η (s_{2n}) είναι γνησίως αύξουσα, η (s_{2n-1}) γνησίως φθίνουσα και $s_{2n} < s_{2n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα οι ακολουθίες (s_{2n}) και (s_{2n-1}) συγκλίνουν ως μονότονες και φραγμένες. Επειδή $s_{2n-1} - s_{2n} = a_{2n} \to 0$ οι (s_{2n}) και (s_{2n-1}) συγκλίνουν στο ίδιο όριο $s \in \mathbb{R}$ και συνεπώς $s_n \to s$. $\square$

Παραδειγμα 1.14. Η *εναλλάσσουσα αρμονική* δηλαδή η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

συγκλίνει[4] αφού η $(1/n)$ είναι φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών αριθμών.

Παραδειγμα 1.15. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots$ συγκλίνει[5] αφού η $(1/n!)$ είναι φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών αριθμών.

9. Απόλυτη σύγκλιση σειρών

Αν μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ έχει γενικούς όρους και τα προηγούμενα κριτήρια δεν μπορούν να εφαρμοσθούν τότε για να εξετάσουμε την σύγκλισή της την μετατρέπουμε σε σειρά με μη αρνητικούς όρους αντικαθιστώντας τους όρους της a_n με τα απόλυτά τους $|a_n|$. Αν η προκύπτουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει τότε θα λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***συγκλίνει απολύτως***. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο Cauchy αποδεικνύεται η εξής πρόταση.

Προταση 1.19. *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Με άλλα λόγια αν μια σειρά συγκλίνει απολύτως τότε συγκλίνει και κανονικά.*

Αποδειξη. Έστω $\tau_n = |a_1| + \dots + |a_n|$ και $s_n = a_1 + \dots + a_n$ τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αντιστοίχως. Παρατηρούμε ότι για κάθε $n > m$ έχουμε

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + \dots + a_n| \leq |a_{m+1}| + \dots + |a_n| = |\tau_n - \tau_m|$$

και άρα αν η (τ_n) είναι Cauchy τότε και η (s_n) είναι Cauchy. Άρα από το κριτήριο Cauchy αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. □

Παρατηρηση 1.8. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Πχ. η εναλλάσσουσα αρμονική $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως.

Με την χρήση της Πρότασης 1.19 τα κριτήρια Λόγου και Ρίζας διατυπώνονται για σειρές με γενικούς όρους ως εξής.

Προταση 1.20. ***(Γενικό Κριτήριο Λόγου Ι)*** *Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

(1) *Αν υπάρχει $\lambda \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \lambda$ για κάθε $n \geq n_0$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.*

(2) *Αν $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ για κάθε $n \geq n_0$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.*

---

[4]Όπως έχουμε αναφέρει, με την θεωρία των δυναμοσειρών που θα αναπτύξουμε στο επόμενο κεφάλαιο, το όριο της είναι ο $\ln 2$.

[5]Όπως θα δούμε πάλι στο επόμενο κεφάλαιο, το όριο της είναι ο $1/e$.

Πρόταση 1.21. ***(Γενικό Κριτήριο Λόγου II)*** *Έστω η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *με* $a_n \neq 0$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. *Έστω επίσης ότι*

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$$

(1) *Αν* $\lambda < 1$ *τότε η* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει (και μάλιστα απολύτως).*
(2) *Αν* $\lambda > 1$ *τότε η* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *αποκλίνει.*

Πρόταση 1.22. ***(Γενικό Κριτήριο Ρίζας I)*** *Έστω η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(1) *Αν υπάρχει* $\lambda \in (0,1)$ *με* $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \lambda$ *για κάθε* $n \geq n_0$ *τότε η* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει.*
(2) *Αν* $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ *για για άπειρα* $n \in \mathbb{N}$ *τότε η* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *αποκλίνει.*

Πρόταση 1.23. ***(Γενικό Κριτήριο Ρίζας II)*** *Έστω η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *και έστω ότι*

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$$

(1) *Αν* $\lambda < 1$ *τότε η* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει (και μάλιστα απολύτως).*
(2) *Αν* $\lambda > 1$ *τότε η* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *αποκλίνει.*

Παράδειγμα 1.16. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$ συγκλίνει. Πράγματι, έστω $x \in \mathbb{R}$. Αν $x = 0$ τότε η σειρά είναι η $1 + 0 + 0 + 0 + \dots$ και άρα συγκλίνει στο 1. Αν $x \neq 0$ τότε θέτοντας $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$ έχουμε

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

και άρα από το κριτήριο λόγου η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ συγκλίνει.

10. Ερωτήσεις και Ασκήσεις

Α. *Ερωτήσεις:* Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι αληθείς και ποιές είναι ψευδείς δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας:

Α1. Αν $\lim a_n = 0$ τότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Α2. Αν $a_n > 0$ και $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ τότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Α3. Αν $a_n > 0$ και $\lim(na_n) = 1$ η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Α4. Αν $a_n > 0$ και $\lim(n^2 a_n) = 1$ η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

A5. Αν $a_n > 0$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε για κάθε επιλογή προσήμων $\epsilon_n = \pm 1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n a_n$ συγκλίνει.

A6. Αν $a_n > 0$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε για κάθε υπακολουθία (a_{k_n}) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n a_{k_n}$ συγκλίνει.

A7. Αν $a_n \in \mathbb{R}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ συγκλίνει.

B. ***Ασκήσεις*** **:**

B1. Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις επόμενες σειρές:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos(1/n))$ (*Υπόδειξη: Σύγκριση με* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$).

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\ e^n}{n^n}$ (*Υπόδειξη: Αν* $a_n = \frac{n!\ e^n}{n^n}$ *δείξτε ότι* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ *και εφαρμόστε το κριτήριο Λόγου I*).

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n^2}$ (*Υπόδειξη: Κριτήριο Οριακής Σύγκρισης*).

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$ (*Υπόδειξη: Κριτήριο Οριακής Σύγκρισης*).

(5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ (*Υπόδειξη: Κριτήριο συμπύκνωσης Cauchy*)

B2. (α) Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ σειρές με θετικούς όρους. Αν $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ για κάθε $n \geq n_0$ δείξτε τα εξής:

(i) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(ii) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει.

(*Υπόδειξη: Δείξτε ότι* $\frac{a_n}{a_{n_0}} \leq \frac{b_n}{b_{n_0}}$ *για κάθε* $n \geq n_0$.)

(β) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n)}$ αποκλίνει.

B3. (α) Αν $a_n > 0$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει δείξτε ότι για κάθε $p > 1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$ συγκλίνει (*Υπόδειξη: Παρατηρείστε ότι* $0 < a_n < 1 \Rightarrow a_n^p \leq a_n$ *τελικά για όλα τα* $n \in \mathbb{N}$ *και εφαρμόστε το Κριτήριο άμεσης σύγκρισης*).

(β) Βρείτε ένα παράδειγμα όπου $a_n > 0$ και για κάθε $p > 1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$ συγκλίνει αλλά η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

B4. Αν $a_n > 0$ δείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ συγκλίνει. (*Υπόδειξη:* $\rightarrow$*:* $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{a_n}{1+a_n} < a_n$
$\leftarrow$*:* $\forall n \geq n_0,\ \frac{a_n}{1+a_n} < \frac{1}{2} \Rightarrow a_n < 1 \Rightarrow a_n < 2\frac{a_n}{1+a_n}$)

B5. Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n > 0$. Θέτουμε $p_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{a_n}$. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ αποκλίνει. (*Υπόδειξη: Δείξτε ότι για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *υπάρχει* $m > n$ *τέτοιο ώστε* $\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{p_k} > \frac{1}{2}$.)

B6. Αποδείξτε το *Κριτήριο του Kummer*: (α) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n > 0$ συγκλίνει αν και μόνο αν υπάρχει μια ακολουθία θετικών όρων (p_n) τέτοια ώστε $p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \geq c > 0$, για κάθε $n \geq n_0$. (*Υπόδειξη: (*$\leftarrow$*):* $\forall n \geq n_0, p_n a_n - p_{n+1} a_{n+1} \geq c a_{n+1} > 0$.
(*$\rightarrow$*): Θέτουμε* $p_n = \frac{\sum_{m=n}^{\infty} a_m}{a_n}$ *και* $c = 1$)

(β) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n > 0$ αποκλίνει αν και μόνο αν υπάρχει μια ακολουθία θετικών όρων (p_n) τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = +\infty$ και $p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \leq 0$ για κάθε $n \geq n_0$. (*Υπόδειξη:* $\leftarrow$*: Άσκηση B2. (*$\rightarrow$*): Άσκηση B4*)

B7. (*Γενίκευση του κριτηρίου Συμπύκνωσης του Cauchy*) Έστω (a_n) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών και έστω $(m_k)_{k=0}^{\infty}$ γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών με $m_0 = 1$. Για κάθε $n = 0, 1, \ldots$ θέτουμε $\delta_n^+ = m_{n+1} - m_n$ και $\delta_n^- = m_n - m_{n-1}$ (για $n = 0$ θέτουμε $\delta_n^- = m_0 = 1$).

(α) Έστω $m \in \mathbb{N}$ και έστω k ο μοναδικός μη αρνητικός ακέραιος με την ιδιότητα $m_k \leq m < m_{k+1}$. Δείξτε ότι

$$\sum_{n=0}^{k} \delta_n^- a_{m_n} \leq \sum_{n=1}^{m} a_n \leq \sum_{n=0}^{k} \delta_n^+ a_{m_n}$$

(*Υπόδειξη: Γενικεύστε την απόδειξη του Κριτηρίου Συμπύκνωσης*) (β) Αν υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε $\dfrac{\delta_n^+}{\delta_n^-} \leq c$ δείξτε ότι

$$\frac{1}{c}\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^+ a_{m_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^+ a_{m_n}$$

και συμπεράνετε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^+ a_{m_n}$ συγκλίνει.

(γ) Έστω $k \in \mathbb{N}$ και (a_n) φθίνουσα θετική. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} k^n a_{k^n}$ συγκλίνει.

Β8. Έστω $a_n > 0$ με $\lim a_n = 0$ και έστω ότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. Δείξτε ότι για κάθε $x \geq 0$ υπάρχει μια γνησίως αύξουσα ακολουθία $0 = m_0 < m_1 < \dots$ φυσικών αριθμών τέτοια ώστε αν θέσουμε $b_n = \displaystyle\sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} a_k$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε ισχύει ότι $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$.

(*Υπόδειξη:* Έστω $x \geq 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε ένα "*μπρός -πίσω*" επιχείρημα για να επιλέξουμε τα $m_1 < m_2 < \dots$: Έστω

$$M_1 = \{n \in \mathbb{N} : a_1 + \cdots + a_n > x\}$$

Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, το M_1 δεν είναι κενό και άρα από την Αρχή Καλής Διάταξης του $\mathbb{N}$ υπάρχει το ελάχιστο του M_1. Θέτουμε

$$m_1 = \min M_1 \quad \text{και} \quad b_0 = \sum_{k=1}^{m_1} a_k$$

Από τον ορισμό του m_1 έπεται ότι

$$b_0 - a_{m_1} \leq x < b_0$$

Προχωρούμε για να ορίσουμε τον m_2. Θέτουμε

$$M_2 = \{n \geq m_1 + 1 : b_0 - (a_{m_1+1} + a_{m_1+2} + \cdots + a_n) < x\}$$

Το M_2 δεν είναι κενό. Πράγματι, αφού $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ έπεται ότι $\displaystyle\sum_{n=m}^{\infty} a_n = +\infty$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Ειδικότερα, $\displaystyle\sum_{n=m_1+1}^{\infty} a_n = +\infty$ και άρα υπάρχει $n \geq m_1 + 1$ με $a_{m_1+1} + a_{m_1+2} + \cdots + a_n > b_0 - x$. Θέτουμε

$$m_2 = \min M_2 \quad \text{και} \quad b_1 = \sum_{k=m_1+1}^{m_2} a_k$$

Από τον ορισμό του του m_2 έπεται ότι

$$b_0 - b_1 < x \leq b_0 - b_1 + a_{m_2}$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά επιλέγουμε $1 \leq m_1 < m_2 < \dots$ τέτοια ώστε αν $m_0 = 1$, $b_n = \sum_{m_n+1}^{m_{n+1}} a_k$ και $B_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k$, τότε

$$B_{2n} - a_{m_{2n+1}} \leq x < B_{2n} \ \text{ και } \ B_{2n+1} < x \leq B_{2n+1} + a_{m_{2n+2}} \tag{1.6}$$

για κάθε $n \geq 0$. Ειδικότερα,

$$|B_n - x| \leq a_{m_{n+1}}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή τώρα $a_n \to 0$ έχουμε $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n = \lim B_n = x$.)

Κεφάλαιο 2

Δυναμοσειρές

Οι απλούστερες συναρτήσεις είναι οι πολυωνυμικές δηλαδή οι συναρτήσεις της μορφής

$$\sum_{n=0}^{k} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

ή γενικότερα της μορφής

$$\sum_{n=0}^{k} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

όπου n μη αρνητικός ακέραιος, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$.

Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις παραγωγίζονται όρο προς όρο και η παράγωγός του είναι πάλι πολυωνυμική συνάρτηση:

$$\left(\sum_{n=0}^{k} a_n (x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=0}^{k} \left(a_n (x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{k} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

Ομοίως και με την ολοκλήρωση:

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=0}^{k} a_n (x-x_0)^n\right) dx = \sum_{n=0}^{k} \int_{x_0}^{x} a_n (x-x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{k} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

Όμως πολύ σημαντικές συναρτήσεις όπως οι εκθετικές και οι τριγωνομετρικές δεν είναι πολυωνυμικές. Στο κεφάλαιο αυτό θα εισάγουμε την έννοια της *δυναμοσειράς* και θα δείξουμε ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι στην ουσία δυναμοσειρές. Οι δυναμοσειρές είναι μια γενίκευση των πολυωνυμικών συναρτήσεων (θα λέγαμε ότι είναι πολυώνυμα "απείρου βαθμού") και όπως θα δούμε διατηρούν τις παραπάνω απλές ιδιότητες της παραγώγισης και ολοκλήρωσης.

1. Βασικοί ορισμοί, ακτίνα και διάστημα σύγκλισης δυναμοσειράς

Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και $x_0 \in \mathbb{R}$. Η παράσταση

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots$$

όπου $x \in \mathbb{R}$ καλείται *δυναμοσειρά*. Το σημείο x_0 καλείται *κέντρο* της δυναμοσειράς και οι αριθμοί $a_0, a_1, \ldots$ καλούνται *συντελεστές* της δυναμοσειράς. Αν το κέντρο είναι το $x_0 = 0$ η δυναμοσειρά παίρνει την πιο απλή μορφή

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

Ένα από τα πρώτα ερωτήματα που εμφανίζονται με τις δυναμοσειρές είναι για ποιά $x \in \mathbb{R}$ η δυναμοσειρά έχει νόημα δηλαδή για ποιά $x \in \mathbb{R}$ η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ συγκλίνει. Εύκολα βλέπουμε βέβαιαότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ συγκλίνει για $x = x_0$ αφού στην περίπτωση αυτή γίνεται η σειρά $a_0 + 0 + 0 + \cdots = a_0$. Το θέμα είναι αν συγκλίνει και για άλλα $x \in \mathbb{R}$. Το Θεώρημα Cauchy–Hadamard (Θεώρημα 2.1 παρακάτω), απαντά σχεδόν πλήρως με εξαίρεση το πολύ δύο σημείων του $\mathbb{R}$ στο ερώτημα αυτό.

Πριν διατυπώσουμε το θεώρημα ας θυμίσουμε λίγα πράγματα για την έννοια του άνω ορίου ακολουθίας. Έστω (x_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Έστω $\mathcal{L}$ το σύνολο όλων των ορίων υπακολουθιών της (x_n) (πεπερασμένων ή άπειρων):

$$\mathcal{L} = \{x \in \overline{R} : \text{Υπάρχει υπακολουθία } (x_{k_n}) \text{ της } (x_n) \text{ με } \lim x_{k_n} = x\}$$

όπου $\overline{R}$ το *επεκτεταμένο* $\mathbb{R}$ δηλαδή $\overline{R} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Το σύνολο $\mathcal{L}$ είναι υποσύνολο του $\overline{R}$ και είναι μη κενό. Πράγματι, αν η (x_n) είναι φραγμένη τότε από το Θεώρημα Bolzano–Weierstrass έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Σε αυτή την περίπτωση το $\mathcal{L}$ είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Διαφορετικά, αν η (x_n) δεν είναι φραγμένη, τότε είτε υπάρχει υπακολουθία της που τείνει στο $+\infty$ (αν η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη) ή στο $-\infty$ (αν η (x_n) δεν είναι κάτω φραγμένη). Αποδεικνύεται ότι για κάθε ακολουθία (x_n) το $\mathcal{L}$ έχει μέγιστο στοιχείο (πεπερασμένο ή άπειρο). Με άλλα λόγια υπάρχει $x \in \overline{R}$ που είναι το μεγαλύτερο όριο υπακολουθίας της (x_n). Αυτό το x καλείται άνω όριο της (x_n) και συμβολίζεται με $\overline{\lim} x_n$. Αν μια ακολουθία έχει όριο τότε, όπως γνωρίζουμε, κάθε υπακολουθία της έξει το ίδιο όριο με αυτήν. Άρα το $\mathcal{L}$ στην περίπτωση αυτή αποτελείται μόνο από ένα σημείο, το όριο της ακολουθίας και συνεπώς, σε αυτή την περίπτωση, το άνω όριό της ακολουθίας δεν είναι τίποτα άλλο παρά το όριό της.

Θεωρημα 2.1. *(Cauchy–Hadamard) Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ μια δυναμοσειρά. Θέτουμε*

$$\varrho = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \tag{2.1}$$

και έστω

$$R = \frac{1}{\varrho} \tag{2.2}$$

(με τις συμβάσεις $\frac{1}{+\infty} = 0$ και $\frac{1}{0} = +\infty$).

(1) Αν $R = 0$ τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο για $x = x_0$.

(2) Αν $R = +\infty$ τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

(3) Αν $0 < R < +\infty$ τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x-x_0| < R$ και αποκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x-x_0| > R$.

Ο $R \in [0, +\infty]$ του θεωρήματος 2.1 καλείται **ακτίνα σύγκλισης** της δυναμοσειράς και αν $R > 0$ το διάστημα $(x_0 - R, x_0 + R)$ καλείται **διάστημα σύγκλισης** της δυναμοσειράς (Αν $R = +\infty$ τότε γράφοντας $(x_0 - R, x_0 + R)$ εννοούμε το $(-\infty, +\infty)$ δηλαδή όλο το $\mathbb{R}$).

Παρατηρείστε ότι στην περίπτωση (3) του θεωρήματος 2.1, όπου η ακτίνα σύγκλισης είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός, το θεώρημα δεν αποφαίνεται αν η δυναμοσειρά συγκλίνει ή όχι στα σημεία $x = x_0 - R$ και $x = x_0 + R$. Οι περιπτώσεις αυτές εξετάζονται για κάθε δυναμοσειρά ξεχωριστά. Άρα στην περίπτωση αυτή το σύνολο *όλων* των σημείων $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία συγκλίνει η δυναμοσειρά είναι το διάστημα σύγκλισης και ίσως ένα ή και τα δύο άκρα του. Έχουμε συνεπώς το εξής πόρισμα:

Πορισμα 2.2. *Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ μια δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $0 < R < +\infty$. Τότε το σύνολο όλων των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η δυναμοσειρά συγκλίνει αποτελεί ένα διάστημα I του $\mathbb{R}$ (που θα καλείται* ***ακριβές διάστημα σύγκλισης****) και ικανοποιεί τους εξής εγκλεισμούς*

$$(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq I \subseteq [x_0 - R, x_0 + R]$$

Δίνουμε παρακάτω μια απόδειξη του Θεωρήματος 2.1 στην ειδική περίπτωση όπου υπάρχει το $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ και άρα $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$, στηριζόμενοι στο Κριτήριο Ρίζας του Cauchy.

Αποδειξη. Σταθεροποιούμε ένα $x \in \mathbb{R}$. Αν $x = x_0$ τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει ($\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + 0 + 0 + \cdots = 0$).

Υποθέτουμε για την συνέχεια ότι $x \neq x_0$. Εξετάζουμε την σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ με το κριτήριο ρίζας. Θέτοντας $b_n = a_n(x-x_0)^n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\lambda = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|b_n|} &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x-x_0| \right) \\
&= |x-x_0| \cdot \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|} \right) \\
&= |x-x_0| \cdot \varrho = \frac{|x-x_0|}{R}
\end{aligned}$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1) $R = 0$: Τότε $\lambda = +\infty > 1$ και άρα η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ αποκλίνει. Επειδή το x είναι οποιοσδήποτε πραγματικός εκτός του x_0 έχουμε ότι η δυναμοσειρά αποκλίνει για κάθε $x \neq x_0$.

2) $R = +\infty$: Τότε $\lambda = 0 < 1$ και άρα η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ συγκλίνει. Πάλι, επειδή το x είναι οποιοσδήποτε πραγματικός εκτός του x_0 έχουμε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \neq x_0$. Επειδή συγκλίνει και για $x = x_0$ έπεται ότι στην περίπτωση αυτή συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

3) $R \in (0, +\infty)$: Εδώ έχουμε τις εξής δύο υποπεριπτώσεις:

(α) Αν $|x-x_0| < R$ έχουμε ότι $\lambda < 1$ και άρα η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ συγκλίνει. Συνεπώς, η δυναμοσειρά συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ με $|x-x_0| < R$.

(β) Αν $|x-x_0| > R$ έχουμε ότι $\lambda > 1$ και άρα η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ αποκλίνει. Συνεπώς, η δυναμοσειρά αποκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ με $|x-x_0| > R$. $\square$

Είναι γνωστή πρόταση στην θεωρία ακολουθιών ότι αν το όριο $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ υπάρχει τότε υπάρχει και το $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ και είναι ίσα μεταξύ τους. Χρησιμοποιώντας την πρόταση αυτή έχουμε το επόμενο πόρισμα που πολλές φορές διευκολύνει τον υπολογισμό του R.

Πορισμα 2.3. *Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ μια δυναμοσειρά με $a_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (ή τελικά για κάθε $n \in \mathbb{N}$). Αν το όριο*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \varrho \tag{2.3}$$

υπάρχει τότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 1/\varrho$ (με τις συμβάσεις $R = +\infty$ αν $\varrho = 0$ και $R = 0$ αν $\varrho = +\infty$).

Παραδειγμα 2.1. Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$$

έχει κέντρο το $x_0 = 0$ και συντελεστές $a_n = 1$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η δυναμοσειρά αυτή είναι η γεωμετρική σειρά με λόγο x και άρα (όπως είδαμε στο κεφάλαιο των σειρών) συγκλίνει μόνο για $x \in (-1, 1)$ και μάλιστα

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$. Την σύγκλιση στο $(-1, 1)$ μπορούμε να την δούμε πολύ εύκολα και με εφαρμογή του Θεωρήματος 2.1 ή του Πορίσματος 2.3 αφού $a_n = 1$ και άρα

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim 1 = 1 \text{ ή } \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim 1 = 1.$$

Παρατηρείστε ότι στα σημεία $x = \pm 1$ η δυναμοσειρά δεν συγκλίνει (για $x = 1$ παίρνει γίνεται η σειρά $1 + 1 + \dots = +\infty$ ενώ για $x = -1$ γίνεται η σειρά $1 - 1 + 1 - \dots$ που ταλαντώνεται). Άρα το ανοικτό διάστημα $(-1, 1)$ είναι και το ακριβές διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Παραδειγμα 2.2. Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

έχει κέντρο το $x_0 = 0$ και συντελεστές $a_n = 1/n!$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$. Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε άμεσα $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$ και άρα η δυναμοσειρά αυτή συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παραδειγμα 2.3. Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

έχει κέντρο το $x_0 = 0$ και συντελεστές $a_0 = 0$ και $a_n = (-1)^n/n$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$. Εύκολα βλέπουμε ότι $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ και άρα $R = 1$. Επίσης για $x = 1$ η δυναμοσειρά γίνεται η εναλλάσουσα αρμονική και άρα συγκλίνει ενώ για $x = -1$ είναι η σειρά $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = -\infty$. Συνεπώς, το διάστημα $(-1, 1]$ είναι το ακριβές διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Παραδειγμα 2.4. Έστω η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + \dots$$

Για τους συντελεστές της παρατηρούμε ότι $a_{2n-1} = 0$ και $a_{2n} = 1$ και εύκολα βλέπουμε ότι η ακολουθία $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ είναι η ίδια ακολουθία με την (a_n) η οποία δεν συγκλίνει. Ισχύει βέβαια ότι $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = 1$ και άρα από το Θεώρημα 2.1 έχουμε ότι $R = 1$. Την περίπτωση αυτή μπορούμε να την αντιμετωπίσουμε και ως εξής: Θέτουμε $t = x^2$ και έχουμε

$$1 + x^2 + x^4 + \dots = 1 + t + t^2 + \dots$$

Όπως είδαμε παραπάνω, η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ είναι $R = 1$. Μπορούμε τώρα να δούμε ότι η αρχική μας δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ έχει ακτίνα σύγκλισης 1. Πράγματι, έστω $|x| < 1$. Τότε $|t| = |x^2| < 1$ οπότε η $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ συγκλίνει. Ομοίως αν $|x| \geq 1$ τότε $|t| = x^2 \geq 1$ και άρα η $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ δεν συγκλίνει. Παρατηρείστε επίσης ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ είναι η γεωμετρική σειρά με λόγο $\lambda = x^2$ και άρα

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1 - x^2}$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$.

Ένας γενικός τρόπος για να βρούμε την ακτίνα σύγκλισης μιας δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ όταν δεν υπάρχει το $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ (χωρίς να υπολογίσουμε το $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$) είναι να εφαρμόσουμε κατευθείαν το κριτήριο ρίζας ή λόγου όπως στο παρακάτω παράδειγμα.

Παραδειγμα 2.5. Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^{2n}$. Παρατηρούμε ότι $a_{2n+1} = 0$ και $a_{2n} = \frac{2^n}{n}$ για κάθε $n = 0, 1, \dots$. Η ακολουθία $(\sqrt[n]{a_n})$ δεν συγκλίνει αφού

$$\sqrt[2n+1]{a_{2n+1}} = \sqrt[2n+1]{0} \to 0$$

ενώ

$$\sqrt[2n]{a_{2n}} = \sqrt[2n]{\frac{2^n}{n}} = \frac{\sqrt[2n]{2^n}}{\sqrt[2n]{n}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt[n]{n})^2} \to \sqrt{2}$$

Αποδεικνύεται βέβαια ότι $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt{2}$ και άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = 1/\sqrt{2}$. Αυτό μπορούμε να το δούμε και ως εξής. Σταθεροποιούμε για την συνέχεια ένα $x \in \mathbb{R}$. Αν $x = 0$ τότε μηδενίζονται όλοι οι όροι της δυναμοσειράς και προφανώς η σειρά συγκλίνει στο 0. Αν $x \neq 0$ η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^{2n}$ έχει γενικό όρο $b_n = \dfrac{2^n}{n} x^{2n} \neq 0$, $n = 0, 1, \ldots$ και άρα

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{2^{n+1}x^{2(n+1)}}{n+1} \cdot \frac{n}{2^n x^{2n}}\right| = 2\frac{n+1}{n}x^2 \to 2x^2$$

Από το κριτήριο Λόγου έχουμε ότι αν $2x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1/\sqrt{2}$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^{2n}$ συγκλίνει ενώ αν $2x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1/\sqrt{2}$ η σειρά αποκλίνει. Άρα $R = 1/\sqrt{2}$.

Είναι επίσης εύκολο να δούμε ότι στα σημεία $x = \pm 1/\sqrt{2}$ η δυναμοσειρά γίνεται η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ και άρα το ακριβές διάστημα σύγκλισης ταυτίζεται με το διάστημα σύγκλισης $(-R, R)$.

Παραδειγμα 2.6. Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

για κάθε $x \neq 0$ είναι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ με $b_n = \dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Έχουμε

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{x^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}}\right| = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} \to 0$$

καταλήγουμε ότι $R = +\infty$, δηλαδή η δυναμοσειρά συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

Παραδειγμα 2.7. Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

για κάθε $x \neq 0$ είναι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, με $b_n = \dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{(2n)!}$. Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα καταλήγουμε στο ότι $R = +\infty$ δηλαδή η δυναμοσειρά συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

2. Συνέχεια, ολοκλήρωση και παραγώγιση δυναμοσειράς

Αποδεικνύεται ότι κάθε δυναμοσειρά ορίζει μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα σύγκλισής της όπου η παραγώγισή και η ολοκλήρωση της γίνεται όρο προς όρο. Πιο συγκεκριμμένα έχουμε τα εξής.

Θεωρημα 2.4. *Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$ και έστω $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. Η f είναι συνεχής και $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\ dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$. Με άλλα λόγια*

$$\int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t - x_0)^n\ dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} a_n(t - x_0)^n\ dt$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.5. *Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R>0$ και έστω $f:(x_0-R,x_0+R)\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Η f είναι παραγωγίσιμη και $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$. Με άλλα λόγια*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n(x-x_0)^n\right)'$$

Από το παραπάνω θεώρημα βλέπουμε ότι η παράγωγος μιας δυναμοσειράς είναι πάλι δυναμοσειρά με την ίδια ακτίνα σύγκλισης[1]. Άρα για την

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n-1)!}a_n(x-x_0)^{n-1}$$

θα έχουμε ότι

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n!}{(n-2)!}a_n(x-x_0)^{n-2}$$

με ακτίνα σύγκλισης $R>0$. Ομοίως,

$$f^{(3)}(x)=\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n!}{(n-3)!}a_n(x-x_0)^{n-3}$$

με ακτίνα σύγκλισης $R>0$ κ.ο.κ. Γενικά έχουμε το εξής:

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.6. *Έστω η δυναμοσειρά $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R>0$. Τότε η f είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη στο (x_0-R,x_0+R). Ειδικότερα, για κάθε $k\in\mathbb{N}$ η $f^{(k)}$ είναι η δυναμοσειρά*

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}a_n(x-x_0)^{n-k} \tag{2.4}$$

και έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης $R>0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.8. Για κάθε $k=0,1,2,\dots$ ισχύει ότι

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}}=\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}x^{n-k}$$

για κάθε $x\in(-1,1)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $x\in(-1,1)$. Με επαγωγή βλέπουμε εύκολα ότι για κάθε $k=0,1,\dots,$

$$f^{(k)}(x)=\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \tag{2.5}$$

[1] Λόγω του ότι $\lim \sqrt[n]{n+1}=1$, από το Θεώρημα Cauchy–Hadamard, προκύπτει ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ είναι η ίδια με την ακτίνα σύγκλισης R της $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Το ίδιο συμβαίνει και με την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ που αναπαριστά την $F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$.

Από την άλλη μεριά, ο τύπος (2.4) δίνει ότι

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \tag{2.6}$$

Από τις (2.5) και (2.6) παίρνουμε ότι

$$\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

και άρα

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$. □

Από την (2.4) έχουμε ότι $f^{(k)}(x_0) = k!a_k + 0 + 0 + \cdots = k!a_k$, για κάθε $k = 0, 1, \ldots$. Λύνοντας ως προς a_k παίρνουμε $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. Συνεπώς έχουμε το παρακάτω πόρισμα.

Πορισμα 2.7. *Έστω η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$. Τότε*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \tag{2.7}$$

για κάθε $n = 0, 1, \ldots$.

3. Το Θεώρημα Abel

Ένα σημαντικό θεώρημα που αφορά την συνέχεια της δυναμοσειράς στα άκρα του διαστήματος σύγκλισης είναι το επόμενο.

Θεωρημα 2.8. *(Abel) Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ με ακτίνα σύγκλισης $0 < R < +\infty$. Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ συγκλίνει (με άλλα λόγια η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x = x_0 + R$) τότε*

$$\lim_{x \to x_0 + R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

Ομοίως αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ συγκλίνει (με άλλα λόγια η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x = x_0 - R$) τότε

$$\lim_{x \to x_0 - R^+} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

Από το Θεώρημα 2.8, έπεται η παρακάτω ισχυροποίηση του Θεωρήματος 2.4.

Πορισμα 2.9. *Έστω η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$ και έστω I το ακριβές διάστημα σύγκλισής της. Τότε η f είναι συνεχής στο I και $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$ για κάθε $x \in I$.*

4. Σειρές Taylor

Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ όπου I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $x_0 \in I$. Έστω ότι η f είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη στο x_0 δηλαδή οι $f^{(n)}(x_0)$ υπάρχουν για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \tag{2.8}$$

καλείται **σειρά Taylor της f με κέντρο το x_0**. Παρατηρείστε ότι για κάθε $n = 0, 1, \dots$ το πολυώνυμο

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

είναι το πολυώνυμο Taylor της f τάξης n με κέντρο το x_0. Αν $x_0 = 0$ τότε η δυναμοσειρά (2.8) γράφεται

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots \tag{2.9}$$

και καλείται **σειρά Maclaurin της f**.

Η σειρά Taylor μιας συνάρτησης $f : I \to \mathbb{R}$ μπορεί να μην συγκλίνει για όλα τα $x \in I$ ή ακόμα και για τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία συγκλίνει το όριό της να μην είναι το $f(x)$.

Αν $R > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ και $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$ θα λέμε ότι η f *αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το* x_0 αν υπάρχουν $a_0, a_1, \dots \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, για κάθε $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Από το Πόρισμα 2.7 έχουμε ότι αν η f αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το x_0 τότε οι συντελεστές της δυναμοσειράς δίνονται από τον τύπο $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Συνεπώς έχουμε την εξής πρόταση.

Πρόταση 2.10. *Έστω $R > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ και $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$. Αν η f αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το x_0 τότε η δυναμοσειρά αυτή είναι μοναδική και είναι η σειρά Taylor της f με κέντρο το x_0.*

Τα επόμενα παραδείγματα δίνουν τα αναπτύγματα σε δυναμοσειρά (που λόγω της Πρότασης 2.10 καλούνται αναπτύγματα Taylor) γνωστών συναρτήσεων. Αυτά προκύπτουν με χρήση του Τύπου Taylor. Εδώ θα δώσουμε πιο απλές αποδείξεις χρησιμοποιώντας τα Θεωρήματα 2.4 και 2.5.

Παράδειγμα 2.9. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \tag{2.10}$$

Απόδειξη. Έστω $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$. Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R = +\infty$ (Παράδειγμα 2.2) και άρα η f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$. Έχουμε $f(0) = 1$ και από το Θεώρημα 2.5,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x)$$

Επειδή η συνάρτηση e^x είναι η μοναδική λύση της διαφορικής εξίσωσης $f' = f$ με αρχική συνθήκη $f(0) = 1$ έχουμε ότι $f(x) = e^x$. □

Παραδειγμα 2.10. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \tag{2.11}$$

Αποδειξη. Επειδή η συνάρτηση $\sin x$ είναι η μοναδική λύση της διαφ. εξίσωσης $f'' = -f$ με αρχικές συνθήκες $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$ μπορούμε να δείξουμε την (2.11) δείχνοντας ότι η δυναμοσειρά $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ικανοποιεί όντως αυτές τις ιδιότητες. Πράγματι, η δυναμοσειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R = +\infty$ (Παράδειγμα 2.6) και άρα η f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$. Επιπλέον, $f(0) = 0$ και από το Θεώρημα 2.5,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

οπότε $f'(0) = 1$ και

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -f(x)$$

□

Παραδειγμα 2.11. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \tag{2.12}$$

Αποδειξη. Πράγματι,

$$\cos x = (\sin x)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

□

Παραδειγμα 2.12. Για κάθε $x \in (-1, 1]$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \tag{2.13}$$

Ειδικότερα για $x = 1$ έχουμε

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

Απόδειξη. Για κάθε $t \in (-1,1)$ έχουμε

$$f(t) = \frac{1}{1+t} = \frac{1}{1-(-t)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots$$

Οπότε, από το Θεώρημα 2.4, για $x \in (-1,1)$,

$$\begin{aligned}\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\right)\,dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots\end{aligned}$$

Για $x = -1$ η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ παίρνει την μορφή $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ που δεν συγκλίνει. Για για $x = 1$ δίνει την σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}$ που συγκλίνει. Επειδή, η $\ln(1+x)$ είναι συνεχής και $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ για κάθε $x \in (-1,1)$ έχουμε

$$\ln 2 = \lim_{x\to 1^-}\ln(1+x) = \lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}$$

όπου η τελευταία ισότητα οφείλεται στο Θεώρημα Abel. □

Παράδειγμα 2.13. Για κάθε $x \in (-1,1]$,

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \tag{2.14}$$

Ειδικότερα για $x = 1$ έχουμε

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

Πράγματι, Έστω $t \in (-1,1)$. Τότε $t^2 \in (-1,1)$ και άρα

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1-(-t^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-t^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots$$

Οπότε, για $x \in (-1,1)$, από το Θεώρημα 2.4,

$$\begin{aligned}\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right)\,dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots\end{aligned}$$

Όπως και στο πρηγούμενο παράδειγμα, από την συνέχεια της $\arctan x$ και το Θεώρημα Abel,

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \lim_{x\to 1-}\arctan x = \lim_{x\to 1-}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

5. Λυμένες ασκήσεις

Παραθέτουμε στην συνέχεια κάποιες λυμένες ασκήσεις.

Άσκηση 1. *Δίνεται η δυναμοσειρά* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

(1) *Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης.*
(2) *Βρείτε όλα τα* $x \in \mathbb{R}$ *για τα οποία η δυναμοσειρά συγκλίνει.*
(3) *Δείξτε ότι* $f'(x) = \frac{1}{1-x}$, *για κάθε* $x \in (-1, 1)$.
(4) *Δείξτε ότι* $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\ln(1-x)$, *για κάθε* $x \in (-1, 1)$.
(5) *Δείξτε ότι* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \ln 2$.

Λύση: (1) Έχουμε $\varrho = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Άρα $R = 1/\varrho = 1$.

(2) Επειδή $R = 1$ και $x_0 = 0$, η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in (-1, 1)$ και αποκλίνει για $x < -1$ ή $x > 1$. Μένει να εξετάσουμε τα σημεία $x = -1$ και $x = 1$. Στο $x = -1$ η δυναμοσειρά παίρνει την μορφή $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ που είναι η εναλλάσσουσα αρμονική η οποία συγκλίνει ενώ για $x = 1$ παίρνει την μορφή $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που είναι η αρμονική η οποία αποκλίνει. Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in [-1, 1)$ και αποκλίνει παντού αλλού.

(3) Είναι $f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$, για κάθε $x \in (-1, 1)$.

(4) Επειδή

$$\left(\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)' = (-\ln(1-x))' = \frac{1}{1-x}$$

οι συναρτήσεις $f(x)$ και $\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$ έχουν την ίδια παράγωγο για κάθε $x \in (-1, 1)$. Άρα

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) + c$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$. Επειδή $f(0) = 0 = \ln\left(\frac{1}{1-0}\right)$ έχουμε $c = 0$, δηλαδή

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$. Εναλλακτικά,

$$\begin{aligned} f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\ dt &= \int_0^x \frac{1}{1-t}\ dt \\ &= -\int_1^{1-x} \frac{1}{u}\ du \\ &= -[\ln u]_1^{1-x} = -\ln(1-x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right), \end{aligned}$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$.

(5) Παρατηρούμε ότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2)^n}{n} = f(1/2)$. Επειδή $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$ για κάθε $x \in (-1, 1)$, έπεται ότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = \ln 2$.

Άσκηση 2. *Με βάση το ανάπτυγμα* $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-1, 1)$ *αναπτύξτε σε δυναμοσειρά την συνάρτηση* $g(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $x \in (-1, 1)$. *Στην συνέχεια βρείτε το άθροισμα* $1 + 2\left(\frac{3}{4}\right) + 3\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 4\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots$ *και την* $g^{(2022)}(0)$.

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2} = (\frac{1}{1-x})' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' &= \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n, \end{aligned}$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$. Ειδικότερα για $x = 3/4$,

$$1 + 2\left(\frac{3}{4}\right) + 3\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 4\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots = \frac{1}{(1-\frac{3}{4})^2} = 16.$$

Επίσης από την (2.7) για την $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$, $x \in (-1, 1)$ έχουμε

$$a_n = n + 1 = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \Rightarrow g^{(n)}(0) = (n+1) \cdot n! = (n+1)!$$

Οπότε

$$g^{(2022)}(0) = 2023!$$

Άσκηση 3. *Αναπτύξτε σε δυναμοσειρά τις συναρτήσεις* $\cosh x$ *και* $\sinh x$, $x \in \mathbb{R}$.

Λύση. Έχουμε

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Από το Παράδειγμα 2.9 έχουμε

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \tag{2.15}$$

για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ και άρα

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \tag{2.16}$$

για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς,

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n!} + \frac{(-1)^n}{n!}\right) x^n = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Ομοίως δείχνουμε ότι

$$\sinh x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Άσκηση 4. *Βρείτε το ακριβές διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n}$.

Λύση: Έχουμε $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ με $a_n = \dfrac{2^n}{n}$. Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς δίνεται απο τον τύπο $R = 1/\rho$, όπου

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 2$$

και άρα $R = 1/2$.

Συνεπώς η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \cdot x^n$ συγκλίνει για όλα τα $x \in \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ και αποκλίνει για $x < -\dfrac{1}{2}$ και $x > \dfrac{1}{2}$. Μένει να εξετάσουμε τη σύγκλιση στα σημεία $x = -\dfrac{1}{2}$ και $x = \dfrac{1}{2}$.

Για $x = -\dfrac{1}{2}$ παίρνουμε την σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ που είναι η εναλλάσσουσα αρμονική που ως γνωστόν (Κριτήριο Leibnitz) συγκλίνει.

Για $x = \dfrac{1}{2}$ παίρνουμε την σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που είναι η αρμονική που ως γνωστόν αποκλίνει.

Άρα το ακριβές διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Άσκηση 5. *Έστω η δυναμοσειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *και έστω* $0 < x_1 < x_2$. *Είναι δυνατόν η δυναμοσειρά να αποκλίνει στο* x_1 *και να συγκλίνει στο* x_2 ?

Λύση: Όχι. Πράγματι, έστω R η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς. Όπως γνωρίζουμε η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για όλα τα $x \in (-R, R)$. Αφού λοιπόν η δυναμοσειρά αποκλίνει για $x = x_1 > 0$ αναγκαστικά θα πρέπει $x_1 \geq R$. Τώρα αφού $x_2 > x_1$ θα ισχύει ότι $x_2 > R$ και συνεπώς επειδή η δυναμοσειρά αποκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ με $|x| > R$ θα πρέπει να αποκλίνει στο x_2.

6. Ερωτήσεις και Ασκήσεις

Α. *Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι αληθείς και ποιές είναι ψευδείς δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας*:

Α1. Αν $\lim a_n = 0$ τότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R = +\infty$.

Α2. Αν $1 \leq |a_n| \leq n$ τότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R = 1$.

Α3. Η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{2n}$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R = 1/\sqrt{2}$.

Α4. Αν η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για $x = 1$ τότε $R \geq 1$.

Α5. Αν η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ αποκλίνει για $x = 1$ τότε $R \leq 1$.

Α6. Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει τότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R \leq 1$.

Α7. Αν $a_n > 0$ και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ συγκλίνει αλλά η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει τότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ είναι $R = 1$.

Α8. Έστω (a_n) φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών αριθμών. Αν $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$ τότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ είναι $R = 1$.

Α9. Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε για κάθε $x \in (0, 1)$ η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει και $\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Β. *Ασκήσεις* :

Β1. Βρείτε το ακριβές διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 3^n)\, x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} (x-1)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} (x-2)^{2n}$$

Β2. (α) Βρείτε την συνάρτηση $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ και (β) υπολογίστε το άθροισμα $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

(*Υπόδειξη: Παρατηρείστε ότι* $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)'$).

Β3. (α) Βρείτε την συνάρτηση $g(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^n$ και (β) υπολογίστε το άθροισμα $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2^n}$.

Β4. (α) Βρείτε την συνάρτηση $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ και (β) υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

(*Υπόδειξη*: Χρησιμοποιείστε τις Ασκήσεις Β2 και Β3).

Β5. Βρείτε την συνάρτηση $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$.

(*Απάντηση: $f(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2}\arctan x$, $x \in (-1,1)$*)

Β6. (α) Δείξτε ότι η σειρά Maclaurin της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, $x \in (-1,1)$ δίνεται από τον τύπο

$$1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \dots$$

(β) Θεωρώντας γνωστό ότι $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \dots$ για κάθε $x \in (-1,1)$, δείξτε ότι

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{x^7}{7} + \dots$$

για κάθε $x \in (-1,1)$. Ποιό είναι το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά της $\arccos x$, $x \in (-1,1)$;

(γ) Δείξτε ότι $\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \dots$.

Β7. Δείξτε ότι για κάθε φραγμένη ακολουθία (a_n) υπάρχει $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $f^{(n)}(0) = a_n$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$.

(*Υπόδειξη: Θεωρείστε την συνάρτηση $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}x^n$.*)

Β7. Δείξτε ότι τα Θεωρήματα 2.4 και 2.5 είναι ισοδύναμα.

(*Υπόδειξη: Έστω $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$.*

$\Rightarrow$: Έστω $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$. Από το Θεώρημα 2.4 (με την g στην θέση της f) έχουμε ότι η g είναι συνεχής και

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = f(x) - a_0$$

Από Θεμ. Θεώρημα του Ολοκλ. Λογισμού, αφού η g είναι συνεχής, η G να είναι παραγωγίσιμη και $g(x) = G'(x) = (f(x)-a_0)' = f'(x)$.

$\Leftarrow$: *Έστω* $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$. *Από το Θεώρημα 2.5 (με την F στην θέση της f) παίρνουμε* $F'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = f(x)$. *Από Θεμ. Θεώρημα του Ολοκλ. Λογισμού,*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\ dt = \int_{x_0}^{x} F'(t)\ dt = F(x) - F(x_0) = F(x)$$

Κεφάλαιο 3

Γενικευμένα Ολοκληρώματα

Το ολοκλήρωμα Riemann ορίσθηκε για *φραγμένες* πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα *κλειστό φραγμένο διάστημα* του $\mathbb{R}$. Στο κεφάλαιο αυτό θα γενικεύσουμε την έννοια του ολοκληρώματος για πραγματικές συναρτήσεις που δεν είναι κατανάγκη φραγμένες και που γενικά ορίζονται σε διαστήματα του $\mathbb{R}$ που δεν είναι κλειστά ή φραγμένα. Ολοκληρώματα τέτοιου είδους καλούνται *Γενικευμένα Ολοκληρώματα* και αποτελούν μια φυσιολογική επέκταση της έννοιας της ολοκλήρωσης.

Βασική προυπόθεση για να ορισθούν τα γενικευμένα ολοκληρώματα είναι η ολοκληρωτέα συνάρτηση να ορίζεται σε ένα διάστημα του $\mathbb{R}$, που δεν είναι κλειστό ή φραγμένο και να είναι ολοκληρώσιμη, με την κανονική έννοια του ολοκληρώματος, σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του πεδίου ορισμού της πχ. να είναι μια συνεχής συνάρτηση.

Τα γενικευμένα ολοκληρώματα θα τα κατατάξουμε σε τρία είδη ανάλογα με το πεδίο ορισμού της ολοκληρωτέας συνάρτησης ως εξής: Αν το πεδίο ορισμού της f είναι ένα *ημι-ανοικτό μη φραγμένο διάστημα* (δηλαδή της μορφής $[a,+\infty)$ ή $(-\infty,b]$ με $a,b\in\mathbb{R}$) τότε έχουμε γενικευμένο ολοκλήρωμα α′ είδους. Αν το πεδίο ορισμού της f είναι ένα *ημι-ανοικτό και φραγμένο διάστημα* (δηλαδή της μορφής $[a,b)$ ή $(a,b]$ με $a,b\in\mathbb{R}$) τότε έχουμε γενικευμένο ολοκλήρωμα β′ είδους. Τέλος, αν το πεδίο ορισμού της f είναι ένα *οποιοδήποτε ανοικτό διάστημα* του $\mathbb{R}$, φραγμένο ή μη, τότε έχουμε ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα γ′ είδους.

1. Γενικευμένα Ολοκληρώματα α′ είδους

3.1.1. Βασικοί Ορισμοί και παραδείγματα. Το πρώτο είδος γενικευμένων ολοκληρωμάτων αναφέρεται σε συναρτήσεις που ορίζονται σε κλειστά *μη φραγμένα* διαστήματα του $\mathbb{R}$ και ορίζονται ως εξής:

Έστω $a\in\mathbb{R}$ και $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a,b]$ με $b>a$. Ορίζουμε

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

Το $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ καλείται *γενικευμένο ολοκλήρωμα της f*. Λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *συγκλίνει* αν το όριο $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο. Σε διαφορετική περίπτωση, όταν δηλαδή το όριο είναι $+\infty$ ή $-\infty$ ή δεν υπάρχει τότε λέμε ότι *το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f αποκλίνει.* Ειδικότερα, στην περίπτωση που το όριο είναι $+\infty$ (ή $-\infty$) γράφουμε $\int_a^{+\infty} f(x)\ dx = +\infty$ (ή αντίστοιχα $\int_a^{+\infty} f(x)\ dx = -\infty$) ενώ αν δεν υπάρχει το $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\ dx$ λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ *δεν υπάρχει.*

Αντίστοιχα, για μία συνάρτηση $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ που είναι είναι ολοκληρώσιμη σε καϑε διάστημα $[b, a]$ με $b < a$, ορίζουμε

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\ dx = \lim_{b\to-\infty} \int_b^a f(x)\ dx$$

Ομοίως εδώ λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{a} f(x)\ dx$ *συγκλίνει* αν το όριο $\lim_{b\to-\infty} \int_b^a f(x)\ dx$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο ενώ όταν το όριο είναι $+\infty$ ή $-\infty$ ή δεν υπάρχει τότε λέμε ότι *το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f αποκλίνει.*

Παραδειγμα 3.1. Έστω $a > 0$ και $p \in \mathbb{R}$. Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\ dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$.

Αποδειξη. Έστω $p > 1$. Τότε

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\ dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b \frac{1}{x^p}\ dx = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{b^{-p+1}}{-p+1} - \frac{a^{-p+1}}{-p+1} \right) \overset{-p+1<0}{=} -\frac{a^{-p+1}}{-p+1} \in \mathbb{R}$$

Αν $p = 1$ τότε

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x}\ dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b \frac{1}{x}\ dx = \lim_{b\to+\infty} (\ln b - \ln a) = +\infty$$

Τέλος, αν $p < 1$,

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\ dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b \frac{1}{x^p}\ dx = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{b^{-p+1}}{-p+1} - \frac{a^{-p+1}}{-p+1} \right) \overset{-p+1>0}{=} +\infty.$$

□

Παραδειγμα 3.2. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\ dx = \frac{\pi}{2}$.

Αποδειξη. Πράγματι,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\ dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2}\ dx = \lim_{b\to+\infty} \arctan b = \frac{\pi}{2}$$

□

Παραδειγμα 3.3. $\int_0^{+\infty} e^{-x}\ dx = 1$.

Αποδειξη. Πράγματι,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\ dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-x}\ dx = \lim_{b\to+\infty} [-e^{-x}]_0^b = \lim_{b\to+\infty} (1 - e^{-b}) = 1$$

□

Παραδειγμα 3.4. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\displaystyle\int_a^{+\infty} \sin x \, dx$ και $\displaystyle\int_a^{+\infty} \cos x \, dx$ αποκλίνουν.

Αποδειξη. Έχουμε $\displaystyle\int_a^{+\infty} \sin x \, dx = \lim_{b \to +\infty} [-\cos x]_a^b = \lim_{b \to +\infty} (\cos a - \cos b)$ και ως γνωστόν, το $\lim_{b \to +\infty} \cos b$ δεν υπάρχει. Ομοίως για το $\displaystyle\int_a^{+\infty} \sin x \, dx$. □

Η παρακάτω πρόταση λέει ότι η γραμμικότητα του ορισμένου ολοκληρώματος μεταφέρεται και στα γενικευμένα. Η απόδειξή της είναι άμεση από τον ορισμό του γενικευμένου ολοκληρώματος και αφήνεται ως άσκηση.

Προταση 3.1. *Έστω $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες σε καθε $[a, b]$ με $b > a$. Αν τα ολοκληρώματα $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ και $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x) \, dx$ συγκλίνουν τότε για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_a^{+\infty} (\lambda f(x) + \mu g(x)) \, dx$ συγκλίνει και ισχύει ότι*

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f(x) + \mu g(x)) \, dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x) \, dx + \mu \int_a^{+\infty} g(x) \, dx$$

3.1.2. Κριτήρια Σύγκλισης για μη αρνητικές συναρτήσεις. Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε μερικά κριτήρια σύγκλισης γενικευμένων ολοκληρωμάτων πρώτου είδους για μη αρνητικές συναρτήσεις.

Προταση 3.2. *Έστω $f : [a, +\infty) \to [0, +\infty)$, μη αρνητική και ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a, b]$ με $b > a$. Τότε*

(1) Το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν υπάρχει $K > 0$ τέτοιο ώστε $\int_a^b f(x) \, dx \le K$ για κάθε $b > a$.

(2) Αν το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ δεν συγκλίνει τότε $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx = +\infty$.

Αποδειξη. Έχουμε $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx = \lim_{b \to +\infty} F(b) - F(a)$ όπου $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$, για κάθε $x \ge a$. Επειδή $f \ge 0$, από την προσθετικότητα του ολοκληρώματος έχουμε ότι η F είναι αύξουσα συνάρτηση. Άρα το $\lim_{x \to +\infty} F(x)$ υπάρχει και ειδικότερα είναι πεπερασμένο αν η F είναι άνω φραγμένη ή είναι $+\infty$ διαφορετικά. □

Προταση 3.3. *Έστω $f, \ g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες σε κάθε $[a, b]$ με $b > a$. Έστω ότι υπάρχει $b_0 > a$ τέτοιο ώστε $0 \le f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \ge b_0$.*

(1) Αν το $\int_a^{+\infty} g(x) \, dx$ συγκλίνει τότε συγκλίνει και το $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$.

(2) Αν το $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ αποκλίνει τότε αποκλίνει και το $\int_a^{+\infty} g(x) \, dx$.

Αποδειξη. Για κάθε $b \ge b_0$, από την προσθετικότητα του ολοκληρώματος, έχουμε

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^{b_0} f(x) \, dx + \int_{b_0}^b f(x) \, dx$$

και άρα

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x)\ dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\ dx &= \lim_{b\to+\infty}\left(\int_a^{b_0} f(x)\ dx + \int_{b_0}^b f(x)\ dx\right)\\ &= \int_a^{b_0} f(x)\ dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{b_0}^b f(x)\ dx\\ &= \int_a^{b_0} f(x)\ dx + \int_{b_0}^{+\infty} f(x)\ dx\end{aligned}$$

Ομοίως,

$$\int_a^{+\infty} g(x)\ dx = \int_a^{b_0} f(x)\ dx + \int_{b_0}^{+\infty} g(x)\ dx$$

Από τις παραπάνω σχέσεις συμπεραίνουμε ότι τα ολοκληρώματα $\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ και $\int_a^{+\infty} g(x)\ dx$ συγκλίνουν αν και μόνο αν τα ολοκληρώματα $\int_{b_0}^{+\infty} f(x)\ dx$ και αντίστοιχα $\int_{b_0}^{+\infty} g(x)\ dx$ συγκλίνουν.

Τώρα αφού $0 \le f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \ge b_0$, από την μονοτονία του ολοκληρώματος έπεται ότι $\int_{b_0}^b f(x)\ dx \le \int_{b_0}^b g(x)\ dx$, οπότε από την μονοτονία του ορίου, $\lim_{b\to+\infty}\int_{b_0}^b f(x)\,dx \le \lim_{b\to+\infty}\int_{b_0}^b g(x)\,dx$ (τα όρια υπάρχουν από την προηγούμενη πρόταση), δηλαδή

$$\int_{b_0}^{+\infty} f(x)\ dx \le \int_{b_0}^{+\infty} g(x)\ dx$$

Από την σχέση αυτή συμπεραίνουμε ότι το $\int_{b_0}^{+\infty} f(x)\ dx$ συγκλίνει αν συγκλίνει το $\int_{b_0}^{+\infty} g(x)\ dx$ και το $\int_{b_0}^{+\infty} g(x)\ dx$ αποκλίνει αν αποκλίνει το $\int_{b_0}^{+\infty} f(x)\ dx$.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω συμπεράσματα τα (1) και (2) της Πρότασης 3.3 έπονται. □

Παραδειγμα 3.5. Τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_0^{+\infty} e^{-x}\ dx$ και $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ dx$ συγκλίνουν.

Αποδειξη. Από προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι το $\int_0^{+\infty} e^{-x}\ dx$ συγκλίνει. Επειδή $e^{-x^2} \le e^{-x}$ για κάθε $x \ge 1$ έχουμε ότι και το $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ dx$ συγκλίνει. □

Προταση 3.4. *Έστω $f,\ g : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες σε κάθε $[a,b]$ με $b > a$. Υποθέτουμε ότι $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$.*

(1) Αν $0 < \ell < +\infty$ τότε τα $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ και $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\ dx$ είτε και τα δύο συγκλίνουν είτε και τα δύο αποκλίνουν.

(2) Αν $\ell = 0$, τότε αν συγκλίνει το $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\ dx$ συγκλίνει και το $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$.

(3) Αν $\ell = +\infty$, τότε αν αποκλίνει το $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ αποκλίνει και το $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Θέτοντας $g(x) = \dfrac{1}{x^p}$, $x \in [a,+\infty)$ $(a > 0)$ παίρνουμε το εξής πόρισμα.

Πορισμα 3.5. *Έστω $a > 0$, $f : [a, +\infty) \to [0, +\infty)$, μη αρνητική και ολοκληρώσιμη σε κάθε $[a, b]$ με $b > a$.*

(1) Αν υπάρχει $p > 1$ τέτοιο ώστε $\lim_{x\to+\infty} x^p f(x) < +\infty$ τότε το $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει.

(2) Αν υπάρχει $0 < p \le 1$ τέτοιο ώστε $\lim_{x\to+\infty} x^p f(x) \neq 0$ τότε το $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ αποκλίνει.

3.1.3. Απόλυτη Σύγκλιση. Έστω $a > 0$, $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, ολοκληρώσιμη σε κάθε $[a, b]$ με $b > a$. Λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει *απολύτως* αν το $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ συγκλίνει.

Προταση 3.6. *Έστω $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, ολοκληρώσιμη σε κάθε $[a, b]$ με $b > a$. Αν το $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει απολύτως τότε συγκλίνει και κανονικά.*

Αποδειξη. Έχουμε $0 \le f(x) + |f(x) \le 2|f(x)|$ και άρα από το κριτήριο σύγκρισης το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|)\,dx$ συγκλίνει. Από την γραμμικότητα (Πρόταση 3.1) έπεται ότι και το $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} ((f(x) + |f(x)|) - |f(x)|)\,dx$ συγκλίνει. □

Παραδειγμα 3.6. Τα ολοκληρώματα $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^a}\,dx$ και $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a}\,dx$ συγκλίνουν για κάθε $a > 0$.

Αποδειξη. Έστω $a > 0$. Για κάθε $x \ge 1$ έχουμε $\dfrac{|\cos x|}{x^a} \le \dfrac{1}{x^a}$. Άρα αν $a > 1$ επειδή το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι και το $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^a}\,dx$ συγκλίνει απολύτως άρα και κανονικά. Αν τώρα $0 < a \le 1$ τότε για κάθε $t > 1$ έχουμε

$$\int_1^t \frac{\cos x}{x^a}\,dx = \left[\frac{\sin x}{x^a}\right]_1^t - a\int_1^t \frac{\sin x}{x^{1+a}}\,dx$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^a}\,dx &= \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{\cos x}{x^a}\,dx \\
&= \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{\sin x}{x^a}\right]_1^t - a\int_1^t \frac{\sin x}{x^{1+a}}\,dx \\
&= \sin 1 - a\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{1+a}}\,dx
\end{aligned}$$

Επειδή $1 + a > 1$, όπως παρατηρήσαμε πριν το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{1+a}}\,dx$ συγκλίνει και άρα συγκλίνει και το $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^a}\,dx$.

Για το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a}\, dx$ εργαζόμαστε ομοίως. □

2. Γενικευμένα Ολοκληρώματα β′ είδους

3.2.1. Βασικοί Ορισμοί και παραδείγματα. Έστω $a < b$ πραγματικοί αριθμοί και $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[c, b]$ με $a < c < b$. Ορίζουμε

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\, dx$$

Το $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ καλείται *γενικευμένο ολοκλήρωμα της f*. Λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ *συγκλίνει* αν το όριο $\displaystyle\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\, dx$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο. Σε διαφορετική περίπτωση, όταν δηλαδή το όριο είναι $+\infty$ ή $-\infty$ ή δεν υπάρχει τότε λέμε ότι *το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f αποκλίνει*. Ειδικότερα, στην περίπτωση που το όριο είναι $+\infty$ (ή $-\infty$) γράφουμε $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = +\infty$ (ή αντίστοιχα $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = -\infty$) ενώ αν δεν υπάρχει το $\displaystyle\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\, dx$ λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ *δεν υπάρχει*.

Αντίστοιχα, για μία συνάρτηση $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ που είναι είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a, c)$ με $a < c < b$, ορίζουμε

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c \to b^+} \int_c^b f(x)\, dx$$

Ομοίως εδώ λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ *συγκλίνει* αν το όριο $\displaystyle\lim_{c \to b^-} \int_c^b f(x)\, dx$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο ενώ όταν το όριο είναι $+\infty$ ή $-\infty$ ή δεν υπάρχει τότε λέμε ότι *το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f αποκλίνει*.

Παραδειγμα 3.7. Έστω $p > 0$. Τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx$ και $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^p}\, dx$ συγκλίνουν για $0 < p < 1$ και αποκλίνουν για $p \geq 1$.

Γενικότερα, τα ολοκληρώματα $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\, dx$ και $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}\, dx$ συγκλίνουν για $0 < p < 1$ και αποκλίνουν για $p \geq 1$.

Αποδειξη. Θέτοντας $u = 1 - x$ έχουμε $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^p}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{u^p}\, dx$ αρκεί να εξετάσουμε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx$.

Αν $p \neq 1$ τότε $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{c\to 0^+} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_c^1$. Άρα αν $p < 1$,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx = \frac{1}{1-p}$$

ενώ αν $p > 1$,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx = +\infty$$

Αν $p = 1$ τότε

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\, dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x}\, dx = \lim_{c\to 0^+} (\ln 1 - \ln c) = -\lim_{c\to 0^+} \ln c = +\infty$$

□

Σημειώνουμε εδώ ότι τα γεν. ολοκληρώματα β′ είδους συγκλίνουν όταν η f είναι *φραγμένη* συνάρτηση. Συγκεκριμένα, από την θεωρία Ολοκλήρωσης προκύπτει η εξής πρόταση.

Πρόταση 3.7. *Έστω $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε υποδιάστημα $[c, b]$, $a < c < b$ του $[a, b]$ τότε το $\displaystyle\lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\, dx$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Με άλλα λόγια το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\, dx$ συγκλίνει.*

Παράδειγμα 3.8. Το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\, dx$ συγκλίνει.

Απόδειξη. Πράγματι, $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leq 1$ για κάθε $x \in (0, 1]$. □

3.2.2. Κριτήρια σύγκλισης για γενικευμένα ολοκληρώματα β′ είδους. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι τα κριτήρια σύγκλισης για γενικευμένα ολοκληρώματα α′ είδους μη αρνητικών συναρτήσεων εξακολουθούν να ισχύουν (με τις προφανείς μετατροπές) για τα ολοκληρώματα β′ είδους. Πχ. το Οριακό κριτήριο σύγκρισης αναδιατυπώνεται ως εξής.

Πρόταση 3.8. *Έστω $f,\ g : (a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες σε κάθε $[c, b]$ με $a < c < b$. Υποθέτουμε ότι $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ και $\displaystyle\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.*

(1) Αν $0 < \ell < +\infty$ τότε τα $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ και $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx$ είτε και τα δύο συγκλίνουν είτε και τα δύο αποκλίνουν.

(2) Αν $\ell = 0$, τότε αν συγκλίνει το $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx$ συγκλίνει και το $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$.

(3) Αν $\ell = +\infty$, τότε αν αποκλίνει το $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx$ αποκλίνει και το $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$.

Θέτοντας $g(x) = \dfrac{1}{(x-a)^p}$, $x \in (a, b]$ έχουμε το εξής πόρισμα.

Πορισμα 3.9. *Έστω $a > 0$, $f : (a, b] \to [0, +\infty)$, μη αρνητική και ολοκληρώσιμη σε κάθε $[c, b]$ με $a < c < b$.*

(1) Αν υπάρχει $0 < p < 1$ τέτοιο ώστε $\lim_{x\to a}(x - a)^p f(x) < +\infty$ τότε το $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ συγκλίνει.

(2) Αν υπάρχει $p \geq 1$ τέτοιο ώστε $\lim_{x\to a}(x - a)^p f(x) \neq 0$ τότε το $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ αποκλίνει.

Επίσης ισχύει το ανάλογο της Πρότασης 3.6.

Προταση 3.10. *Έστω $f : (a, b] \to \mathbb{R}$, ολοκληρώσιμη σε κάθε $[a, c]$ με $a < c < b$. Αν το $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ συγκλίνει απολύτως τότε συγκλίνει και κανονικά.*

Παραδειγμα 3.9. Το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$ συγκλίνει.

Αποδειξη. Έστω $\dfrac{1}{2} < p < 1$ (πχ. $p = 3/4$). Με τον κανόνα L' Hopital δείχνουμε ότι $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^p \left|\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right| = -\lim_{x\to 0} x^{p-\frac{1}{2}} \ln x = 0$ και άρα το $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$ συγκλίνει απολύτως άρα και κανονικά. □

3. Γενικευμένα Ολοκληρώματα γ΄ είδους

Έστω $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$ και $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του (α, β). Έστω $c \in (\alpha, \beta)$ (άρα $c \in \mathbb{R}$). Θεωρούμε τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\displaystyle\int_\alpha^c f(x)\, dx$ και $\displaystyle\int_c^\beta f(x)\, dx$. Αυτά είναι πρώτου ή δεύτερου είδους ανάλογα αν τα α, β είναι άπειρα ·η πεπερασμένα. Αν και τα δύο αυτά ολοκληρώματα συγκλίνουν ορίζουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f να είναι το άθροισμά τους, δηλαδή ορίζουμε

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = \int_\alpha^c f(x)\, dx + \int_c^\beta f(x)\, dx$$

και λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)\, dx$ *συγκλίνει*. Σε διαφορετική περίπτωση, αν δηλαδή ένα τουλάχιστον από τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\displaystyle\int_\alpha^c f(x)\, dx$ και $\displaystyle\int_c^\beta f(x)\, dx$ αποκλίνει, λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)\, dx$ *αποκλίνει*. Αποδεικνύεται εύκολα ότι ο ορισμός του $\int_a^b f(x)\, dx$ είναι ανεξάρτητος της επιλογής του ενδιάμεσου σημείου c (Παρατήρηση 3.1 παρακάτω).

Σημειώνουμε εδώ ότι όταν η f είναι *φραγμένη* συνάρτηση ορισμένη σε ένα φραγμένο ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$ τότε το γεν. ολοκληρωμα $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ συγκλίνει. Συγκεκριμένα, έχουμε την εξής πρόταση.

Πρόταση 3.11. *Έστω $a < b$ πραγματικοί αριθμοί και $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση ολοκληρώσιμη σε κάθε υποδιάστημα $[c,d]$, $a < c < b$ του (a,b). Τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω $c \in (a,b)$. Από την Πρόταση 3.7 τα ολοκληρώματα $\int_a^c f(x)\,dx$ και $\int_c^b f(x)\,dx$ συγκλίνουν. Άρα και το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ συγκλίνει. □

Παράδειγμα 3.10. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 0.$

Απόδειξη. Επιλέγοντας το 0 ως ενδιάμεσο σημείο, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= \lim_{a\to-\infty} \arctan a + \lim_{b\to+\infty} \arctan b \\
&= -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0.
\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 3.11. Για κάθε $p > 0$ το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ αποκλίνει.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \int_0^{1} \frac{1}{x^p}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx.$$

Αν $p \geq 1$ (αντ. $0 < p < 1$) τότε όπως έχουμε δεί, το $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ αποκλίνει (αντ. συγκλίνει) και το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ συγκλίνει (αντ. αποκλίνει). Άρα για κάθε $p > 0$ το $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ αποκλίνει. □

Παράδειγμα 3.12. Το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ αποκλίνει.

Απόδειξη. Το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = \int_{-\infty}^{0} x\,dx + \int_0^{+\infty} x\,dx.$$

Επειδή

$$\int_{-\infty}^{0} x\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 x\,dx = \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^0 = \lim_{a\to-\infty} \left(-\frac{a^2}{2}\right) = -\infty$$

□

Παρατηρηση 3.1. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι:

1) Για κάθε $c, c' \in (\alpha, \beta)$ τα ολοκληρώματα $\displaystyle\int_\alpha^c f(x)\,dx$ και $\displaystyle\int_\alpha^{c'} f(x)\,dx$ και αντίστοιχα τα $\displaystyle\int_c^\beta f(x)\,dx$ και $\displaystyle\int_{c'}^\beta f(x)\,dx$) είτε συγκλίνουν και τα δύο είτε αποκλίνουν και τα δύο.

2) Στην περίπτωση που συγκλίνουν τα $\displaystyle\int_\alpha^c f(x)\,dx$ και $\displaystyle\int_c^\beta f(x)\,dx$ αποδεικνύεται ότι

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^{c'} f(x)\,dx + \int_{c'}^b f(x)\,dx$$

Από τις παραπάνω παρατηρήσεις προκύπτει ότι ο ορισμός του $\int_a^b f(x)\,dx$ είναι ανεξάρτητος της επιλογής του ενδιάμεσου σημείου c.

Παραδειγμα 3.13. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\Pi(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^t\,dx$$

(1) Η συνάρτηση $\Pi(t)$ παίρνει πραγματικές τιμές για κάθε $t > -1$ και απειρίζεται θετικά για κάθε $t \leq -1$.

(2) $\Pi(t+1) = (t+1)\Pi(t)$ για κάθε $t > -1$.

(3) $\Pi(n) = n!$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Αποδειξη. (1) Παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-x}x^t\,dx$ είναι α′ είδους για $t \geq 0$ και γ′ είδους για $t < 0$. Και στις δύο περιπτώσεις το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^t\,dx = \int_0^1 e^{-x}x^t\,dx + \int_1^{+\infty} e^{-x}x^t\,dx$$

Ισχυρισμός 1. *Το* $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}x^t\,dx$ *συγκλίνει για κάθε* $t \in \mathbb{R}$.

Αποδειξη. Έπεται από το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης με το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ αφού

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x}x^t = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{t+2}}{e^x} = 0$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. □

Ισχυρισμός 2. *Το ολοκλήρωμα* $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}x^t\,dx$ *συγκλίνει για* $t > -1$ *και αποκλίνει για* $t \leq -1$.

Αποδειξη. Το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}x^t\,dx$ είναι ένα κανονικό ολοκλήρωμα για $t \geq 0$. Αν $t < 0$ τότε είναι γενικευμένο β′ είδους. Χρησιμοποιώντας το Οριακό

Κριτήριο Σύγκρισης με το με το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{x^{-t}}\, dx$ έχουμε

$$\lim_{x\to 0} x^{-t} e^{-x} x^t = \lim_{x\to 0} e^{-x} = 1$$

και άρα τα ολοκληρώματα $\int_0^1 e^{-x}x^t\, dx$ και $\int_0^1 \frac{1}{x^{-t}}\, dx$ είναι ισοδύναμα ως προς την σύγκλιση. $\square$

(2) Έστω $t > -1$. Τότε $t+1>0$ και άρα

$$\begin{aligned}\Pi(t+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{t+1}\, dx &= \lim_{y\to+\infty} \int_0^y e^{-x}x^{t+1}\, dx \\ &= \lim_{y\to+\infty} \left(-e^{-x}x^{t+1}|_0^y + (t+1)\int_0^y e^{-x}x^t\, dx \right) \\ &= \lim_{y\to+\infty} -e^{-y}y^{t+1} + (t+1)\Pi(t) \\ &= 0 + (t+1)\Pi(t) = (t+1)\Pi(t)\end{aligned}$$

(3) Με επαγωγή. Έχουμε $\Pi(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1 = 0!$. Έστω τώρα ότι $\Pi(n) = n!$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Από το (2) έχουμε $\Pi(n+1) = (n+1)\Pi(n) = (n+1)n! = (n+1)!$. $\square$

4. Ερωτήσεις και Ασκήσεις

Α. *Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι αληθείς και ποιές είναι ψευδείς δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας:*

Α1. Αν $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ με $p > 1$ τότε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ συγκλίνει.
(*Υπόδειξη: Παράδειγμα 3.1*)

Α2. Αν $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ με $p \geq 1$ τότε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^p}\,dx$ αποκλίνει.
(*Υπόδειξη: Παράδειγμα 3.7*)

Α3. Αν $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ θετική συνεχής συνάρτηση με $\lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ τότε τα $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$ και $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ αποκλίνουν.
(*Υπόδειξη: Οριακό κριτήριο σύγκρισης με τις* $\dfrac{1}{x}$ *και* $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$)

Α4. Αν $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ θετική συνεχής συνάρτηση με $\lim_{x\to 0} f(x) < +\infty$ τότε το $\displaystyle\int_0^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ συγκλίνει.
(*Υπόδειξη: Οριακό κριτήριο σύγκρισης με την* $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$)

Α5. Ισχύει ότι $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan x\,dx = +\infty$.

(*Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι* $\displaystyle\int_0^{b} \tan x\,dx = \ln(\cos b)$ *για* $0 < b < \pi/2$.)

Α6. Ισχύει ότι $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = +\infty$.

(*Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι* $\displaystyle\int_0^{b} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$.)

Α7. Αν $f : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τότε ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

(*Υπόδειξη: Παράδειγμα 3.12*)

Α8. Αν $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ συνεχής και φραγμένη συνάρτηση τότε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{1} f(x)\,dx$ συγκλίνει.
(*Υπόδειξη: Πρόταση 3.11*)

B. *Ασκήσεις* :

B1. Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} x\sin x \ dx$ δεν υπάρχει.

(*Υπόδειξη: Παραγοντική ολοκλήρωση*)

B2. Δείξτε ότι $\int_0^1 \frac{1}{x\ln x} \ dx = -\infty$.

(*Υπόδειξη: Θεωρείστε ένα ενδιάμεσο σημείο* $c \in (0,1)$ *και θέτοντας* $u = \ln t$ *δείξτε ότι* $\int_0^c \frac{1}{x\ln x} \ dx = -\infty$ *και* $\int_c^1 \frac{1}{x\ln x} \ dx = -\infty$)

B3. Δείξτε ότι το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} \ dx$ συγκλίνει ενώ το $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} \ dx$ αποκλίνει.

(*Υπόδειξη:* $x < \sqrt{x^2+1}$ *για κάθε* $x \geq 1$ *και* $\sqrt{x^2+1} \leq 2$ *για κάθε* $x \in (0,1]$.)

B4. (α) Δείξτε ότι τα ολοκληρώματα $\int_0^{+\infty} \cos x^2 \ dx$ και $\int_0^{+\infty} \sin x^2 \ dx$ συγκλίνουν.

(*Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την διάσπαση* $\int_0^{+\infty} \cos x^2 \ dx = \int_0^1 \cos x^2 \ dx + \int_1^{+\infty} \cos x^2 \ dx$, *την αντικατάσταση* $u = x^2$ *και το Παράδειγμα Παράδειγμα 3.6 για* $a = 1/2$).

B5. (α) Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \ dx$ συγκλίνει.

(*Υπόδειξη: Αν* $c \in (0,1)$ *τα ολοκληρώματα* $\int_0^c \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \ dx$ *και* $\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \ dx$ *συγκλίνουν: εφαρμογή του οριακού κριτηρίου σύγκρισης με τις συναρτήσεις* $\frac{1}{\sqrt{x}}$ *και* $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$)

(β) Δείξτε ότι για κάθε $p,q > 0$ το ολοκλήρωμα $\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} \ dx$ συγκλίνει.

(*Υπόδειξη: Αν* $p,q \geq 1$ *έχουμε ένα κανονικό ολοκλήρωμα. Στις άλλες περιπτώσεις εργαστείτε με το Οριακό κριτήριο σύγκρισης όπως στο (α)*)

B6. Αν το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ dx$ συγκλίνει δείξτε ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x) \ dx$.

(*Υπόδειξη: Αν το ολοκλήρωμα* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ dx$ *συγκλίνει τότε*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ dx = \int_{-\infty}^{0} f(x) \ dx + \int_0^{+\infty} f(x) \ dx$$

και τα ολοκληρώματα $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{R}^{0} f(x)\,dx$ *και* $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{0}^{R} f(x)\,dx$ *συγκλίνουν*)

B7. Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[1,b]$, $b > 1$.

(α) Αν το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\ dx$ συγκλίνει ισχύει ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

(*Υπόδειξη: Δες άσκηση B4*)

(β) Αν το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\ dx$ συγκλίνει και επιπλέον το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ υπάρχει δείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

B8. Αν η $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ είναι φθίνουσα και το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\ dx$ συγκλίνει δείξτε ότι:

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(2) $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.

(*Υπόδειξη: Για το (1) παρατηρείστε ότι* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *υπάρχει επειδή η* f *είναι μονότονη. Για το (3) παρατηρείστε ότι* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{x}^{+\infty} f(t)\ dt = 0$ *και*

$$0 \leq xf(x) \leq \int_{x}^{2x} f(t)\ dt \leq \int_{x}^{+\infty} f(t)$$

Μέρος Β: Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Κεφάλαιο 4

Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$, Ακολουθίες, Όριο και Συνέχεια συνάρτησης

1. Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$

1.1. Βασικοί ορισμοί. Ο *Ευκλείδειος χώρος* $\mathbb{R}^n$ είναι το σύνολο όλων των *σημείων (ή διανυσμάτων)*

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$$

(όπου $x_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $1 \leq i \leq n$), εφοδιασμένο με τις πράξεις της *πρόσθεσης*:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

για κάθε $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ και του *βαθμωτού πολλαπλασιασμού*:

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Τα διανύσματα $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$ αποτελούν την λεγόμενη *συνήθη βάση* του $\mathbb{R}^n$. Παρατηρείστε ότι τα διανύσσματα ότι τα $\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n$ είναι όντως μία βάση του $\mathbb{R}^n$ αφού είναι γραμμικά ανεξάρτητα και επίσης αν $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ είναι ένα οποιοδήποτε διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i.$$

1.2. Το συνήθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε ζεύγος διανυσμάτων $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, και $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, ορίζουμε

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Το $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ καλείται *(το συνήθες) εσωτερικό γινόμενο των* $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε τις εξής ιδιότητες:

(1) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$ και άρα $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(2) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$.

(3)$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$.

(4) $(\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$.

Αν $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ τότε τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ καλούνται *ορθογώνια*. Παρατηρείστε ότι $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ για κάθε $i \neq j$ δηλαδή οποιαδήποτε δύο διαφορετικά διανύσματα της συνήθους βάσης του $\mathbb{R}^n$ είναι ορθογώνια.

1.3. Η ευκλείδεια νόρμα και απόσταση στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε το *μέτρο* (ή την *νόρμα*) του $\mathbf{x}$ να είναι η ποσότητα

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Κατά αναλογία της ιδιότητας $|x| = \sqrt{x^2}$ για $x \in \mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}.$$

Πρόταση 4.1. *(Ανισότητα Cauchy-Schwarz) Αν $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ τότε*

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|.$$

ή ισοδύναμα

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

αν $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.

Επίσης είναι εύκολο να διαπιστώσουμε τις παρακάτω ιδιότητες (ανάλογες της απολύτου τιμής του $\mathbb{R}$):

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ και $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$.
2. $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$.
3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Τέλος, όπως και στον $\mathbb{R}$ η απόσταση δύο πραγματικών αριθμών είναι η απόλυτη τιμή της διαφοράς τους, η ποσότητα

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$$

ορίζεται να είναι η *απόσταση* των $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Παρατηρείστε ότι

1. $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
2. $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ και
3. $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|$.

1.4. Βασικές περιοχές σημείων στον $\mathbb{R}^n$. Έστω $\mathbf{x}_0 = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ και $\varepsilon > 0$. Το σύνολο

$$B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon\}$$

καλείται *ανοικτή μπάλα του $\mathbb{R}^n$ κέντρου $\mathbf{x}_0$ και ακτίνας ε.* Με άλλα λόγια το $B_r(\mathbf{x}_0)$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ που απέχουν από το $\mathbf{x}_0$ απόσταση *γνήσια μικρότερη* του ε. Οι ανοικτές μπάλες $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ καλούνται και *(βασικές ανοικτές) περιοχές* του $\mathbf{x}_0$. Το σύνολο

$$\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \varepsilon\}$$

καλείται *κλειστή μπάλα του* $\mathbb{R}^n$ *κέντρου* $\mathbf{x}_0$ *και ακτίνας* ε και τέλος το σύνολο

$$S_\varepsilon((\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \varepsilon\}$$

καλείται *κλειστή σφαίρα του* $\mathbb{R}^n$ *κέντρου* $\mathbf{x}_0$ *και ακτίνας* ε. Προφανώς

$$\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \cup S_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$$

1.5. Χαρακτηρισμοί σημείων και υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Δίνουμε παρακάτω κάποιους χαρακτηρισμούς σημείων και υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$.

Ορισμος 4.2. *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$.*

(1) Ένα σημείο $\mathbf{x} \in X$ καλείται **απομονωμένο σημείο του** *X αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $X \cap B_\delta(\mathbf{x}) = \{x\}$. Ισοδύναμα, η απόσταση κάθε άλλου σημείου του X απο το $\mathbf{x}$ είναι τουλάχιστον δ.*

(2) Ένα σημείο $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ καλείται **σημείο συσσώρευσης του** *X αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $\mathbf{y} \in X$ με $0 < \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \delta$. Ισοδύναμα, οσοδήποτε κοντά στο $\mathbf{x}$ υπάρχει σημείο του X διαφορετικό απο το $\mathbf{x}$.*

(3) Ένα σημείο $\mathbf{x} \in X$ καλείται **εσωτερικό σημείο του** *X αν* υπάρχει $\delta > 0$ *τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq X$.*

Ορισμος 4.3. *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$.*

(1) Το X καλείται **ανοικτό** *αν για κάθε σημείο $\mathbf{x}$ του X υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq X$ ισοδύναμα κάθε σημείο του X είναι και εσωτωρικό του σημείο.*

(2) Το X καλείται **κλειστό** *αν το $X^c = \mathbb{R}^n \setminus X$ (δηλαδή το συμπλήρωμά του) είναι ανοικτό.*

(3) Το X καλείται **φραγμένο** *αν υπάρχει $M > 0$ με $\|\mathbf{x}\| \leq M$ (ισοδύναμα το X είναι υποσύνολο της κλειστής μπάλας $\overline{B}_M(\mathbf{0})$ κέντρου $\mathbf{0}$ και ακτίνας M).*

Προταση 4.4. *Κάθε μονοσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.*

Αποδειξη. Έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Για να δείξουμε ότι το $\{\mathbf{x}\}$ είναι κλειστό πρέπει να δείξουμε ότι το συμπλήρωμά του, δηλαδή το σύνολο $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$ είναι ανοικτό. Έστω $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$. Τότε $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ και άρα $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| > 0$. Θέτοντας $\delta = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ έχουμε $\mathbf{x} \notin B_\delta(\mathbf{y})$ και άρα $B_\delta(\mathbf{y}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$. Άρα για κάθε $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$ υπάρχει $\delta > 0$ με $B_\delta(\mathbf{y}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$, δηλαδή το $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$ είναι ανοικτό. □

Προταση 4.5. *(α) Κάθε ανοικτή μπάλα είναι ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. (β) Αντίστοιχα κάθε κλειστή μπάλλα του είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.*

Αποδειξη. Έστω $B = B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ μία ανοικτή μπάλα του $\mathbb{R}^n$. (α) Έστω $\mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$. Θέτουμε

$$\delta = \varepsilon - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \tag{4.1}$$

Αφού $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon$ έχουμε ότι $\delta = \varepsilon - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| > 0$. Θα δείξουμε ότι $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq B$. Πράγματι, έστω $\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x})$. Τότε $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ και απο τριγωνική ανισότητα,

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \overset{(4.1)}{=} \varepsilon$$

Συνεπώς $\mathbf{y} \in B$. Επειδή το $\mathbf{y}$ είναι τυχόν σημείο της $B_\delta(\mathbf{x})$, έπεται ότι $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq B$. Επίσης το B είναι φραγμένο αφού για κάθε $\mathbf{x} \in B$ έχουμε

$$\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + \|\mathbf{x}_0\| \leq \varepsilon + \|\mathbf{x}_0\| = M.$$

(β) Έστω $C = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ και $\mathbf{x} \in C$. Τότε $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| > \varepsilon$ και άρα

$$\delta = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| - \varepsilon > 0 \tag{4.2}$$

Θα δείξουμε ότι $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq C$ ισοδύναμα $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| > \varepsilon$ για κάθε $\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x})$. Πράγματι έστω $\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x})$. Τότε απο τριγωνική ανισότητα

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| < \delta + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|$$

και συνεπώς

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| > \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| - \delta \overset{(4.2)}{=} \varepsilon.$$

Επίσης όπως στο (α) δείχνουμε ότι η $\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ είναι φραγμένη. □

Η επόμενη πρόταση δίνει έναν χρήσιμο χαρακτηρισμό των κλειστών συνόλων.

Πρόταση 4.6. *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) Το X είναι κλειστό.

(2) Το X περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του.

Απόδειξη. (1) $\Rightarrow$ (2): Έστω ότι το X είναι κλειστό και έστω $\mathbf{x}$ σημείο συσσώρευσης του X. Υποθέτουμε προς απαγωγή σε άτοπο ότι $\mathbf{x} \notin X$. Τότε $\mathbf{x} \in X^c = \mathbb{R}^n \setminus X$ και επειδή το X^c είναι ανοικτό θα υπάρχει $\delta > 0$ με $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq X^c$. Αλλά τότε $B_\delta(\mathbf{x}) \cap X = \varnothing$, άτοπο απο τον ορισμό του σημείου συσσώρευσης.

(2) $\Rightarrow$ (1): Έστω ότι το X περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του. Θα δείξουμε ότι το X είναι κλειστό, ισοδύναμα ότι το X^c είναι ανοικτό, ισοδύναμα κάθε σημείο του X^c είναι εσωτερικό σημείο του X^c. Πράγματι έστω $\mathbf{x} \in X^c$. Επειδή το X περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του το $\mathbf{x}$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του X. Άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε οποιοδήποτε $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ με $0 < \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \delta$ δεν ανήκει στο X. Επειδή από υπόθεση και το $\mathbf{x}$ δεν ανήκει στο X έχουμε ότι όλη η ανοικτή μπάλα $B_\delta(\mathbf{x})$ περιέχεται στο X^c, δηλαδή το $\mathbf{x}$ είναι όντως εσωτερικό σημείο του X^c. □

2. Ακολουθίες στον χώρο $\mathbb{R}^n$

2.1. Βασικοί Ορισμοί. ***Ακολουθία στον*** $\mathbb{R}^n$ είναι κάθε απεικόνιση από το $\mathbb{N}$ στον $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 4.7. *Έστω $(\mathbf{x}_k)$ ακολουθία του $\mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Λέμε ότι το* ***όριο*** *της $(\mathbf{x}_k)$ είναι το $\mathbf{x}$ (ή ότι η $(\mathbf{x}_k)$* ***συγκλίνει*** *στο $\mathbf{x}$) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| < \varepsilon$ για όλα τα $k \geq k_0$.*

Συμβολικά θα γράφουμε $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$ (ή πιο απλά $\lim \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$) ή $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$.

Παρατηρηση 4.1. Παρατηρείστε ότι $\lim \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$ αν και μόνο αν κάθε ανοικτή μπάλα με κέντρο το $\mathbf{x}$ περιέχει *τελικά όλη* την $(\mathbf{x}_k)$.

Πρόταση 4.8. *(Πρώτος χαρακτηρισμός σύγκλισης στον $\mathbb{R}^n$) Έστω $(\mathbf{x}_k)$ ακολουθία του $\mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Τότε $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$ αν και μόνο αν $\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| = 0$.*

Αποδειξη. Θέτουμε $d_k = \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|$, $k \in \mathbb{N}$. Απο τον ορισμό της σύγκλισης ακολουθίας έχουμε

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists k_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall k \geq k_0 \;\; \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists k_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall k \geq k_0 \;\; d_k < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists k_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall k \geq k_0 \;\; |d_k - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} d_k = 0$$

□

Προταση 4.9. *(Δεύτερος χαρακτηρισμός σύγκλισης στον $\mathbb{R}^n$) Έστω $(\mathbf{x}_k)$ ακολουθία του $\mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Έστω*

$$\mathbf{x}_k = (x_{1,k}, \ldots, x_{n,k}) \text{ και } \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$$

Τότε $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$ αν και μόνο αν $\lim_{k\to\infty} x_{i,k} = x_i$ για όλα τα $1 \leq i \leq n$.

Αποδειξη. Θέτουμε $d_k = \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|$ και $d_{i,k} = |x_{i,k} - x_i|$, $k \in \mathbb{N}$. Απο τον ορισμό της απόστασης στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$d_k = \sqrt{d_{1,k}^2 + \cdots + d_{n,k}^2}. \tag{4.3}$$

Έστω ότι $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$. Τότε απο την Πρόταση 4.8 έχουμε ότι $\lim_{k\to\infty} d_k = 0$.Έστω $1 \leq i \leq n$. Απο την (4.3) έπεται ότι

$$0 \leq d_{i,k} \leq d_k$$

οπότε απο το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών στον $\mathbb{R}$ έπεται ότι και $\lim_{k\to\infty} d_{i,k} = 0$.

Αντίστροφα τώρα, έστω ότι $\lim_{k\to\infty} d_{i,k} = 0$ για όλα τα $1 \leq i \leq n$. Τότε απο την (4.3) και τις αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων ακολουθιών στον $\mathbb{R}$, έχουμε

$$\lim_{k\to\infty} d_k = \sqrt{\lim_{k\to\infty} d_{1,k} + \cdots + \lim_{k\to\infty} d_{n,k}} = 0.$$

Άρα πάλι απο την Πρόταση 4.8 έπεται ότι $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$. □

2.2. Το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass στον $\mathbb{R}^n$. Ένα βασικό θεώρημα στις ακολουθίες πραγματικών αριθμών είναι το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass που λέει ότι κάθε φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.9 το θεώρημα αυτό επεκτείνεται εύκολα στον $\mathbb{R}^n$. Πριν το διατυπώσουμε θυμίζουμε τους σχετικούς ορισμούς.

Ορισμος 4.10. *Έστω $(\mathbf{x}_k)$ ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρώντας την ακολουθία $(\mathbf{x}_k)$ ως συνάρτηση απο το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}$, κάθε περιορισμός της σε ένα άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ καλείται* υπακολουθία *της $(\mathbf{x}_k)$.*

Κάθε υπακολουθία της $(\mathbf{x}_k)$ είναι και αυτή ακολουθία του $\mathbb{R}^n$. Πράγματι, αν

$$M = \{m_1 < m_2 < \ldots\}$$

είναι το άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ όπου περιορίζεται η $(\mathbf{x}_k)$, τότε η αντίστοιχη υπακολουθία της $(\mathbf{x}_k)$ είναι η ακολουθία $(\mathbf{y}_k)$ με

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_{m_k}$$

για όλα τα $k \in \mathbb{N}$.

Πρόταση 4.11. *Αν μια ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ συγκλίνει τότε κάθε υπακολουθία της συγκλίνει στο ίδιο όριο με αυτήν.*

Απόδειξη. Έστω $(\mathbf{x}_k)$ συγκλίνουσα ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}$ το όριό της, $M = \{m_1 < m_2 < \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο και $\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_{m_k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ η υπακολουθία της $(\mathbf{x}_k)$ που ορίζεται απο το M. Θα δείξουμε ότι $\mathbf{y}_k \to \mathbf{x}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$ θα υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| < \varepsilon$ για όλα τα $k \geq k_0$. Ισχυριζόμαστε ότι $\|\mathbf{y}_k - \mathbf{x}\| < \varepsilon$ για όλα τα $k \geq k_0$. Πράγματι έστω $k \geq k_0$. Είναι εύκολο να δούμε ότι $m_k \geq k$ για όλα τα $k \in \mathbb{N}$ και άρα $m_k \geq k \geq k_0$ οπότε $\|\mathbf{x}_{m_k} - \mathbf{x}\| < \varepsilon$ δηλαδή $\|\mathbf{y}_k - \mathbf{x}\| < \varepsilon$. □

Στα επόμενα, αν $M = \{m_1 < m_2 < \dots\}$ είναι ένα άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ την υπακολουθία $(\mathbf{y}_k)$ με $\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_{m_k}$ θα την συμβολίζουμε με $(\mathbf{x}_m)$. Επίσης αν $\lim \mathbf{y}_k = \mathbf{x}$ τότε θα γράφουμε

$$\mathbf{x}_m \overset{m\in M}{\to} \mathbf{x}$$

Θεώρημα 4.12. ***(Bolzano-Weierstrass)*** *Κάθε φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n. Για $n = 1$ το θεώρημα ως γνωστόν ισχύει. Έστω $n \geq 2$ και ας υποθέσουμε ότι το θεώρημα ισχύει για φραγμένες ακολουθίες στον $\mathbb{R}^{n-1}$. Έστω $(\mathbf{x}_k)$ φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ και $M > 0$ με $\|\mathbf{x}_k\| \leq M$ για όλα τα $k \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $\mathbf{x}_k = (x_{1,k}, \dots, x_{n,k})$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και από υπόθεση έχουμε $\|\mathbf{x}_k\| = \sqrt{x_{1,k}^2 + \dots + x_{n,k}^2} \leq M$. Συνεπώς

$$\sqrt{x_{1,k}^2 + \dots + x_{n-1,k}^2} \leq M \quad \text{και } |x_{n,k}| \leq M$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Με άλλα λόγια η ακολουθία $\mathbf{x}'_k$ του $\mathbb{R}^{n-1}$ με $\mathbf{x}'_k = (x_{1,k}, \dots, x_{n-1,k})$ καθώς και η ακολουθία $(x_{n,k})$ του $\mathbb{R}$ είναι φραγμένη. Συνεπώς από την επαγωγική μας υπόθεση υπάρχει $M_1 \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο και $\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ με

$$\mathbf{x}'_m \overset{m\in M_1}{\to} \mathbf{x}' \tag{4.4}$$

Αφού η ακολουθία πραγματικών αριθμών $(x_{n,k})$ είναι φραγμένη απο το M το ίδιο ισχύει και για την υπακολουθία $(x_{n,m})_{m\in M_1}$. Από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass για το $\mathbb{R}$ έπεται ότι υπάρχει $M_2 \subseteq M_1$ άπειρο και $x_n \in \mathbb{R}$ με

$$x_{n,m} \overset{m\in M_2}{\to} x_n \tag{4.5}$$

Επειδή $M_2 \subseteq M_1$ η ακολουθία $(\mathbf{x}'_m)_{m\in M_2}$ είναι υπακολουθία της $(\mathbf{x}'_m)_{m\in M_1}$ και άρα συγκλίνει στο ίδιο όριο με αυτή, δηλαδή $\mathbf{x}'_m \overset{m\in M_2}{\to} \mathbf{x}'$. Αφού $\mathbf{x}'_m = (x_{1,m}, \dots, x_{n-1,m})$, απο Πρόταση 4.9 σημαίνει ότι

$$x_{1,m} \overset{m\in M_2}{\to} x_1, \ \dots, \ x_{n-1,m} \overset{m\in M_2}{\to} x_{n-1} \tag{4.6}$$

όπου $(x_1, \dots, x_{n-1}) = \mathbf{x}'$.

Από (4.5), (4.6) και την Πρόταση 4.9 έπεται ότι

$$\mathbf{x}_m \overset{m\in M_2}{\to} \mathbf{x}$$

όπου $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. □

2.3. Ακολουθίες Cauchy στον $\mathbb{R}^n$. Οι ακολουθίες Cauchy στον $\mathbb{R}^n$ ορίζονται όπως στο $\mathbb{R}$.

Ορισμος 4.13. *Μια ακολουθία $(\mathbf{x}_k)$ στον $\mathbb{R}^n$ καλείται* **Cauchy** *αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_m\| < \varepsilon$ για όλα τα $k, m \geq k_0$.*

Θυμίζουμε ότι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι Cauchy. Το γεγονός αυτό γενικεύεται και στον $\mathbb{R}^n$. Με επαγωγή αποδεικνύεται ότι ο ξαρακτηρισμός αυτός ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Θεωρημα 4.14. *Μια ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι Cauchy.*

Μια εφαρμογή εδώ είναι το παρακάτω θεώρημα.

Θεωρημα 4.15. ***(Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach)***. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz συνάρτηση με σταθερά $0 < \vartheta < 1$, δηλαδή η f ικανοποιεί την ιδιότητα $\|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\| \leq \vartheta\ \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$, για κάθε $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ του $\mathbb{R}^n$. Τότε η f έχει ένα σταθερό σημείο που επιπλέον είναι και μοναδικό.*

Αποδειξη. Έστω $\mathbf{x}_0$ ένα σημείο του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε την ακολουθία $(\mathbf{x}_k)$ αναδρομικά θέτοντας $\mathbf{x}_n = f(\mathbf{x}_{n-1})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι η $(\mathbf{x}_k)$ είναι Cauchy και άρα συγκλίνουσα.

Δείχνουμε πρώτα με επαγωγή στο $k \in \mathbb{N}$ ότι

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| \leq \vartheta^k\ \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|. \tag{4.7}$$

Πράγματι για $k = 1$ η (4.7) ισχύει αφού $\mathbf{x}_2 = f(\mathbf{x}_1)$, $\mathbf{x}_1 = f(\mathbf{x}_0)$ και άρα

$$\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| = \|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_0\| \leq \vartheta\ \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|$$

Έστω ότι η (4.7) ισχύει για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι τότε ισχύει και για το $k + 1$ στην θέση του k. Πράγματι,

$$\|\mathbf{x}_{k+2} - \mathbf{x}_{k+1}\| = \|f(\mathbf{x}_{k+1}) - f(\mathbf{x}_k)\| \leq \vartheta \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| \overset{(4.7)}{\leq} \vartheta^{k+1}\ \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|$$

Άρα η (4.7) ισχύει για όλα τα $k \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $k < m$,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_k\| &= \|(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) + (\mathbf{x}_{k+2} - \mathbf{x}_{k+1}) + \cdots + (\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m-1})\| \\
&= \|\sum_{j=k}^{m-1} (\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j)\| \\
&\leq \sum_{j=k}^{m-1} \|\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j\| \\
&\overset{(4.7)}{\leq} \left(\sum_{j=k}^{m-1} \vartheta^j\right) \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| \leq \left(\sum_{j=k}^{\infty} \vartheta^j\right) \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| = \frac{\vartheta^k}{1 - \vartheta}\ \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|.
\end{aligned}$$

Επειδή $0 < \vartheta < 1$ έχουμε ότι $\vartheta^k \to 0$ και η παραπάνω σχέση δίνει ότι η ακολουθία $(\mathbf{x}_k)$ είναι Cauchy. (Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\vartheta^k \to 0$ έπεται και ότι $\dfrac{\vartheta^k}{1 - \vartheta} \to 0$.

Συνεπώς για το $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|}$ υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ με $\dfrac{\vartheta^k}{1-\vartheta} < \varepsilon'$ για κ'θε $k \geq k_0$. Έστω $m, k > k_0$. Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $m \geq k$ και άρα $\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_k\| \leq \dfrac{\vartheta^k}{1-\vartheta}\ \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| \leq \varepsilon$.)

Αφού η $(\mathbf{x}_k)$ είναι Cauchy είναι και συγκλίνουσα και έστω $\mathbf{x}$ το όριό της. Τότε

$$\begin{aligned}\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\| &\leq \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_{k+1}\| + \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}\| \\ &= \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_k)\| + \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}\| \\ &\leq \vartheta\ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| + \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}\|\end{aligned}$$

και άρα

$$0 \leq \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\| \leq \vartheta \lim \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| + \lim \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}\| = 0$$

δηλαδή $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Η f δεν έχει άλλο σταθερό σημείο. Πράγματι αν $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ δύο σταθερά σημεία της f τότε

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq \vartheta \|\mathbf{x} - \mathbf{x}\| < \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

άτοπο. □

Παρατηρηση 4.2. Παρατηρείστε ότι απο την παραπάνω απόδειξη προκύπτει ότι από οποιοδήποτε $\mathbf{x}_0$ και να ξεκινούσαμε στο ίδιο $\mathbf{x}$ θα καταλήγαμε.

3. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Με τον όρο *συνάρτηση πολλών μεταβλητών* εννοούμε γενικά μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}^m$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}^n$ μη κενό (αν $m = n = 1$ τότε έχουμε την κλασική περίπτωση πραγματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής).

3.1. Ταξινόμηση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Οι συναρτήσεις αυτές ταξινομούνται ως εξής:

(I) ***Πραγματικές*** (ή ***βαθμωτές***) Είναι οι συναρτήσεις της μορφής $f : X \to \mathbb{R}$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Μερικά παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = x^2 + y^2$.

2) $f : D \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ όπου

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

είναι ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος του $\mathbb{R}^2$.

3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

4) $f : B \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$, όπου

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

είναι η κλειστή μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^3$.

Στην Φυσική συναρτήσεις της μορφής $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ χρησιμοποιούνται για να αντιστοιχίσουν βαθμωτά φυσικά μεγέθη στα σημεία του χώρου όπως πχ. η θερμοκρασία, η ατμοσφαιρική πίεση.

(II) ***Διανυσματικές Συναρτήσεις μιας μεταβλητής.*** Είναι συναρτήσεις της μορφής $f : X \to \mathbb{R}^m$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}$ και $m \geq 2$. Συνήθως το σύνολο X είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$. Μερικά παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

1) $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(t) = (\cos t, \sin t)$.

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(t) = (t, t^2)$.

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με τύπο $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ με τύπο $f(t) = \big(t, t^2, \ldots, t^m\big)$.

Οι συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R}^m$ με $X \subseteq \mathbb{R}$ γράφονται πάντα στην μορφή

$$f(t) = (f_1(t), \ldots, f_m(t)), \quad t \in X \subseteq \mathbb{R}$$

όπου $f_1(t), \ldots, f_k(t)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής από το X στο $\mathbb{R}$ (δείτε Πρόταση 4.16 παρακάτω).

Παρατηρηση 4.3. Αν $X = I$ είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ τότε οι συναρτήσεις $f : I \to \mathbb{R}^m$ μετασχηματίζουν το διάστημα I του $\mathbb{R}$ σε μια *m-διάστατη καμπύλη*. Πχ. η συνάρτηση $f(t) = (\cos t, sint)$, μετασχηματίζει το διάστημα $[0, 2\pi]$ στον μοναδιαίο κύκλο ενώ η $f(t) = (t, t^2)$ μετασχηματίζει την ευθεία στην παραβολή $y = x^2$. Θεωρώντας τη μεταβλητή t ως *χρόνο*, οι συναρτήσεις της μορφής $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ απεικονίζουν την θέση ενός κινητού την χρονική στιγμή t στον χώρο $\mathbb{R}^n$.

(III) ***Διανυσματικές Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.*** Είναι συναρτήσεις της μορφής $f : X \to \mathbb{R}^m$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $n, m \geq 2$. Αν $n = m$ οι συναρτήσεις αυτές καλούνται *διανυσματικά πεδία*. Τα διανυσματικά πεδία χρησιμοποιούνται στην Φυσική, πχ. πεδίο βαρύτητας, πεδίο ταχύτητας ρευστού κλπ. Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$f(x, y, z) = \left(-\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right)$$

2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(x, y) = \left(-\dfrac{y}{x^2 + y^2}, \dfrac{x}{x^2 + y^2}\right)$.

3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(x, y) = (-y, x)$.

3.2. Ανάλυση μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ σε συνιστώσες συναρτήσεις. Η επόμενη πρόταση ουσιαστικά ανάγει την μελέτη όλων των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών στις βαθμωτές συναρτήσεις.

Προταση 4.16. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Τότε υπάρχουν μοναδικές συναρτήσεις $f_1, \ldots, f_m$ απο το X στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε*

$$f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$$

για κάθε $\mathbf{x} \in X$. Συμβολικά γράφουμε

$$f = (f_1, \ldots, f_m)$$

και οι $f_1, \ldots, f_m$ καλούνται οι **συνιστώσες συναρτήσεις** *της f.*

Απόδειξη. Για κάθε $i \in \{1, \ldots, m\}$ έστω $\pi_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ η i-προβολή του $\mathbb{R}^m$, δηλαδή η συνάρτηση

$$\pi_i(y_1, \ldots, y_m) = y_i.$$

Παρατηρούμε ότι κάθε διάνυσμα $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ του $\mathbb{R}^m$ γράφεται ως

$$\mathbf{y} = (\pi_1(\mathbf{y}), \ldots, \pi_m(\mathbf{y})). \tag{4.8}$$

Έστω τώρα ένα τυχόν $\mathbf{x} \in X$. Θέτοντας $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ απο την (4.8) έχουμε

$$f(\mathbf{x}) = (\pi_1(f(\mathbf{x})), \ldots, \pi_m(f(\mathbf{x}))) \tag{4.9}$$

Άρα αν θέσουμε $f_i = \pi_i \circ f : X \to \mathbb{R}$, να είναι η σύνθεση των π_i και f, τότε $f_i(\mathbf{x}) = \pi_i(f(\mathbf{x}))$ και άρα απο την (4.9) έχουμε

$$f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})). \tag{4.10}$$

Μένει να δειχθεί ότι οι $f_1, \ldots, f_m$ είναι και οι μοναδικές συναρτήσεις που ικανοποιούν την (4.10). Πράγματι αν $g_1, \ldots, g_m$ συναρτήσεις απο τον X στο $\mathbb{R}$ με

$$f(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x}))$$

τότε αναγκαστικά $g_i(\mathbf{x}) = \pi_i(f(\mathbf{x})) = \pi_i \circ f(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x})$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, m\}$ και κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. □

4. Όριο συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Στην παράγραφο αυτή υα μελετήσουμε την έννοια του ορίου συνάρτησης πολλών μεταβλητών. Όπως θα δούμε είναι μια απλή γενίκευση της γνωστής αντίστοιχης έννοιας για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Όπως και για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής, για να ορίζεται το ορίο μιας συνάρτησης $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ σε ένα $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ θα πρέπει το $\mathbf{x}_0$ να είναι *σημείο συσσώρευσης* του πεδίου ορισμού της f.

4.1. Όριο βαθμωτής συνάρτησης.

Ορισμος 4.17. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του X και $L \in \mathbb{R}$. Λέμε ότι η f έχει στο $\mathbf{x}_0$ όριο το L και γράφουμε*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\mathbf{x} \in X$ με $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ ισχύει ότι $|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$.

Το επόμενο θεώρημα είναι πολύ χρήσιμο γιατί μεταφέρει το όριο συνάρτησης σε ακολουθίες. Με βάση το θεώρημα αυτό αποδεικνύονται όλες οι αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων βαθμωτών συναρτήσεων.

Θεωρημα 4.18. *(**Αρχή Μεταφοράς**) Έστω $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του X και $L \in \mathbb{R}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$.

(2) Για οποιαδήποτε ακολουθία $(\mathbf{x}_n)$ απο στοιχεία του X με $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$ ισχύει ότι $f(\mathbf{x}_n) \to L$.

Απόδειξη. $(1) \Rightarrow (2)$: Έστω $(\mathbf{x}_n)$ ακολουθία στο X με $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $(f(\mathbf{x}_n))$ (που είναι ακολουθία πραγματικών αριθμών) συγκλίνει στο L, ισοδύναμα για κάθε $\varepsilon > 0$ πρέπει να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με $|f(\mathbf{x}_n) - L| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$, για το δοθέν ε υπάρχει $\delta > 0$ με

$$|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon \text{ για όλα τα } \mathbf{x} \in X \text{ με } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta. \tag{4.11}$$

Επειδή τώρα $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| < \delta$ για όλα τα $n \geq n_0$. άρα απο την (4.11) έπεται ότι

$$|f(\mathbf{x}_n) - L| < \varepsilon \text{ για όλα τα } n \geq n_0$$

Άρα $f(\mathbf{x}_n) \to L$.

$(2) \Rightarrow (1)$: Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι δεν ισχύει η (1) ενώ ισχύει η (2). Απο την άρνηση του ορισμού του $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$, έχουμε ότι θα υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $\delta > 0$ υπάρχει $\mathbf{x}_\delta \in X$ με $0 < \|\mathbf{x}_\delta - \mathbf{x}_0\| < \delta$ και $|f(\mathbf{x}_\delta) - f(\mathbf{x})| \geq \varepsilon_0$. Άρα για $\delta = 1/n$ υπάρχει $\mathbf{x}_n \in X$ με

$$0 < \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| < 1/n \tag{4.12}$$

και

$$|f(\mathbf{x}_n) - L| \geq \varepsilon_0. \tag{4.13}$$

Απο την (4.12) έπεται ότι $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| \to 0$ και άρα απο την Πρόταση 4.8 έχουμε ότι $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$. Από την υπόθεσή μας έχουμε ότι $f(\mathbf{x}_n) \to 0$ ή ισοδύναμα $|f(\mathbf{x}_n) - L| \to 0$, άτοπο απο (4.13). $\square$

Παράδειγμα 4.1. Δείξτε ότι το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

δεν υπάρχει.

Απόδειξη. Έστω $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ και $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$. Παρατηρούμε ότι το $(0,0)$ είναι ένα σημείο συσσώρευσης του X που δεν ανήκει στο X. Απο την Αρχή Μεταφοράς για να δείξουμε ότι το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει αρκεί να βρούμε δύο ακολουθίες (x_n, y_n) και (x_n', y_n') του X (άρα και $(x_n, y_n), (x_n', y_n') \neq (0,0)$) με $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n', y_n') = (0,0)$ αλλά $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(x_n', y_n')$.

Πράγματι, για την ακολουθία $(1/n, 0)$, έχουμε $(1/n, 0) \in X$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $(1/n, 0) \to (0,0)$ (Πρόταση 4.9) και

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}, 0) = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{\frac{1}{n^2} + 0} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

Ομοίως για την ακολουθία $(1/n, 1/n)$, έχουμε πάλι $(1/n, 1/n) \in X$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $(1/n, 1/n) \to (0,0)$, αλλά

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

□

Παραδειγμα 4.2. Δείξτε ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x \sin\left(\frac{1}{y}\right)\right) = 0.$

Αποδειξη. Έστω $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ και $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = x\sin(\frac{1}{y})$. Παρατηρούμε ότι το $(0,0)$ είναι σημείο συσσώρευσης του X που δεν αν·ηκει στο X. Έστω (x_n, y_n) ακολουθία στο X (οπότε $y_n \neq 0$ και άρα $(x_n, y_n) \neq (0,0)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$) και $(x_n, y_n) \to (0,0)$. Έχουμε $x_n \to 0$ (Πρόταση 4.9) και $|\sin(\frac{1}{y_n})| \leq 1$. Άρα

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \left[x_n \cdot \sin(\frac{1}{y_n})\right] = 0$$

(μηδενική × φραγμένη). Άρα απο την Αρχή Μεταφοράς $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. □

Προταση 4.19. *(Κανόνες παρεμβολής) Έστω $g, f, h : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του X.*

(1) Αν $g(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x})$, για κάθε $\mathbf{x} \in X$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ και $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} h(\mathbf{x}) = L \in \mathbb{R}$ τότε $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$.

(2) Αν $h(\mathbf{x}) \geq 0$ και $|f(\mathbf{x})| \leq h(\mathbf{x})$ για κάθε $\mathbf{x} \in X$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ και $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} h(\mathbf{x}) = 0$ τότε $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = 0$.

Παραδειγμα 4.3. Δείξτε ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0.$

Αποδειξη. Παρατηρούμε ότι για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$ έχουμε

$$\left|\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}\right| \leq \left|\frac{x^3}{x^2 + y^2}\right| + \left|\frac{y^3}{x^2 + y^2}\right| = \left|\frac{x^2}{x^2 + y^2}\right| \cdot |x| + \left|\frac{y^2}{x^2 + y^2}\right| \cdot |y| \leq |x| + |y|$$

Άρα αν θέσουμε $f(x,y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ και $h(x,y) = |x| + |y|$, τότε

$$|f(x,y)| \leq h(x,y)$$

Επιπλέον $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0$. □

Η επόμενη πρόταση είναι και αυτή μια Αρχή Μεταφοράς αλλά με καμπύλες αντί για ακολουθίες. Με τον όρο *καμπύλη* του $\mathbb{R}^n$ θα θεωρούμε μια *συνεχή συνάρτηση* [1] $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

[1] για τον ορισμό της συνέχειας δείτε την επόμενη παράγραφο.

Πρόταση 4.20. *(Όριο κατά μήκος καμπύλης) Έστω* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}_0\} \to \mathbb{R}$ *και* $L \in \mathbb{R}$. *Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$.

(2) Για κάθε συνεχή καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ *με* $\mathbf{r}(0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{x}_0$ *για κάθε* $t \neq 0$ *ισχύει ότι* $\lim_{t\to 0} f(\mathbf{r}(t)) = L$.

Παράδειγμα 4.4. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$.

(1) Βρείτε το όριο της f στο $(0,0)$ κατά μήκος κάθε ευθείας $\mathbf{r}(t) = (t, \lambda t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(2) Βρείτε το όριο της f στο $(0,0)$ κατά μήκος κάθε παραβολής $\mathbf{r}(t) = (t, \lambda t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.

(3) Δείξτε ότι το όριο της f στο $(0,0)$ δεν υπάρχει.

Απόδειξη. (1) Έχουμε

$$\lim_{t\to 0} f(\mathbf{r}(t)) = \lim_{t\to 0} f(t, \lambda t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 \lambda t}{t^4 + \lambda^2 t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\lambda t^3}{t^4 + \lambda^2 t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\lambda t}{t^2 + \lambda^2} = 0$$

Παρατηρούμε ότι το όριο είναι ανεξάρτητο του συντελεστή διεύθυνσης λ της ευθείας.

(2) Ομοίως

$$\lim_{t\to 0} f(\mathbf{r}(t)) = \lim_{t\to 0} f(t, \lambda t^2) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 \lambda t^2}{t^4 + \lambda^2 t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{\lambda t^4}{t^4 + \lambda^2 t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}$$

και άρα το όριο εξάρτάται απο τον συντελεστή λ της παραβολής.

(3) Απο το (2) και την Πρόταση 4.9. το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει. □

Παράδειγμα 4.5. (α) Εξετάστε αν υπάρχει το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$.

(β) Ομοίως για το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y}$.

Απόδειξη. (α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$ είναι όλο το $\mathbb{R}^2$ εκτός της ευθείας $y = -x$. Κατά μήκος της ευθείας $x = y = t$ το όριο είναι 0:

$$\lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{2t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{2} = 0$$

Όμως κατά μήκος της καμπύλης $x = t$, $y = -t + t^2$, το όριο είναι -1:

$$\lim_{t\to 0} f\left(t, -t + t^2\right) = \lim_{t\to 0} \frac{-t^2 + t^3}{t^2} = \lim_{t\to 0}(-1 + t) = -1$$

Άρα το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$ δεν υπάρχει.

(β) Μπορούμε με τον ίδιο τρόπο να δείξουμε ότι το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y}$ δεν υπάρχει. Ένας δεύτερος τρόπος είναι να παρτηρήσουμε ότι $\dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{(x+y)^2}{x+y} - \dfrac{x^2+y^2}{x+y} =$

$x+y-\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ και συνεπώς αν υπήρχε το $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{x+y}=\ell$, θα είχαμε $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x+y}=-\ell$, άτοπο από το (α).

□

5. Όριο γενικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Η έννοια του ορίου μιας γενικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών είναι μια απλή γενίκευση της αντίστοιχης έννοιας για πραγματικές συναρτήσεις που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Ορισμος 4.21. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του X και $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^m$. Λέμε ότι η f έχει στο $\mathbf{x}_0$ όριο το $\mathbf{L}$ και γράφουμε*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\mathbf{x} \in X$ με $0 < \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| < \delta$ ισχύει ότι $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| < \varepsilon$.

Το όριο μιας διανυσματικής συνάρτησης ανάγεται στο όριο των πραγματικών συναρτήσεων που αποτελούν την ανάλυση της f. Συγκεκριμμένα έχουμε την εξής πρόταση που προκύπτει εύκολα απο την Πρόταση 4.9 και την Αρχή Μεταφοράς (Θεώρημα 4.18).

Προταση 4.22. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του X. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) Το όριο $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ υπάρχει.

(2) Αν $f = (f_1, \dots, f_m)$ η ανάλυση της f τότε τα όρια $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x})$ υπάρχουν για όλα τα $i = 1, \dots, m$ και ισχύει ότι

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \left(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x}), \dots, \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_m(\mathbf{x})\right)$$

6. Συνέχεια συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Ορισμος 4.23. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0 \in X$. Λέμε ότι η f είναι* συνεχής *στο $\mathbf{x}_0$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $\mathbf{x} \in X$ με $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| < \delta$ να ισχύει ότι $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$. Η f καλείται* συνεχής *αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του X.*

Όπως και για τις πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής κάθε συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι αυτομάτως συνεχής στα απομονωμένα σημεία του X. Άρα για να δούμε αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής αρκεί να ελέγξουμε τα σημεία του X που είναι σημεία συσσώρευσής του. Ισχύει και εδώ το ανάλογο θεώρημα με τα όρια.

Προταση 4.24. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0 \in X$ σημείο συσσώρευσης του X. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) Η f είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.

(β) Ισχύει ότι $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$.

Η συνέχεια μιας διανυσματικής συνάρτησης ανάγεται στην συνέχεια των συνιστωσών συναρτήσεών της. Συγκεκριμένα απο την προτάσεις 4.22 και 4.24έχουμε το εξής πόρισμα.

Πορισμα 4.25. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0 \in X$ σημείο συσσώρευσης του X. Έστω επίσης $f = (f_1, \ldots, f_m)$ η ανάλυση της f. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(α) Η f είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.

(β) Για κάθε $i = 1, \ldots, m$ η $f_i : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.

7. Ερωτήσεις και Ασκήσεις

Α. *Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι αληθείς και ποιές είναι ψευδείς δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας:*

Α1. Το σύνολο $\{(n,m) : n, m \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ αποτελείται από απομονωμένα σημεία.

Α2. Κάθε άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης.

(*Υπόδειξη: Λάθος, το σύνολο της Ερώτησης Α1 δεν έχει κανένα σημείο συσσώρευσης.*)

Α3. Το σύνολο $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{(q_1, q_2) : q_1, q_2 \in Q\}$ είναι *πυκνό* υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, δηλαδή για κάθε $\epsilon > 0$ και για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ υπάρχει $(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2$ τέτοιο ώστε η απόσταση των (x, y) και (q_1, q_2) να είναι μικρότερη του ϵ.

Α4. Το συμπλήρωμα μιας ευθείας L στο $\mathbb{R}^2$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

(*Υπόδειξη: Για κάθε $\mathbf{x}_0 \notin L$ θεωρείστε την ανοικτή μπάλα κέντρου $\mathbf{x}_0$ και ακτίνας $r = \min\{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| : x \in L\}$*)

Α5. Αν $F \subseteq \mathbb{R}^n$ πεπερασμένο τότε το $\mathbb{R}^n \setminus F$ είναι ανοικτό.

(*Υπόδειξη: Για κάθε $\mathbf{x}_0 \notin F$ θεωρείστε την ανοικτή μπάλα κέντρου $\mathbf{x}_0$ και ακτίνας $r = \min\{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| : x \in F\}$*)

Α6. Η τομή δύο ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Α7. Αν $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ σταθερή σε κάθε ευθεία παράλληλη με τους άξονες των x και y τότε η f είναι σταθερή.
(*Υπόδειξη: Συνδέστε το τυχόν (x, y) με το $(0, 0)$ με ευθ. τμήματα παράλληλα με τους άξονες.*)

Β. ***Ασκήσεις :***

Β1. Δείξτε ότι $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x \sin\frac{1}{y} + y \cos\frac{1}{x} \right) = 0.$

(*Υπόδειξη: Παράδειγμα 4.2*)

Β2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \dfrac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$. Δείξτε ότι (α) $\max |f(x, y)| = \sqrt{2}$ και (β) Το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει.

(*Υπόδειξη: (α) Ανισότητα Cauchy–Schwarz (β) Αρχή Μεταφοράς για τις ακολουθίες* $(1/n, -1/n)$, $(1/n, 0)$)

B3. Έστω $n, m \in \mathbb{N}$ και έστω $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \dfrac{x^n y^m}{x^{2n} + y^{2m}}$ για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$. Δείξτε ότι (α) $\max |f(x,y)| = 1/2$ και (β) Το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

(*Υπόδειξη: (α) Χρησιμοποιήστε την ανισότητα* $a^2 + b^2 \geq 2|ab|$. *(β) Αρχή Μεταφοράς για τις ακολουθίες* (n^{-m}, n^{-n}), $(1/n, 0)$*-δείτε και Παράδειγμα 4.1*)

B4. Δείξτε ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^4}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$

(*Υπόδειξη:* $\left| \dfrac{xy^4}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \dfrac{|xy^2|}{x^2+y^4} \cdot \dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot |y| \leq \dfrac{1}{2}|y|$)

B5. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x = y, \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

(α) Χρησιμοποιώντας την Αρχή Μεταφοράς για κατάλληλες ακολουθίες δείξτε ότι το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

(β) Δείξτε ότι για κάθε $x, y \neq 0$, $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$ και άρα $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0.$

B5. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} \left|\frac{y}{x}\right| & \text{αν } x \neq 0, \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

(α) Χρησιμοποιώντας την Αρχή Μεταφοράς για κατάλληλες ακολουθίες δείξτε ότι το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

(β) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = 0$ και άρα $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right) = 0.$

(γ) Δείξτε ότι για κάθε $y \neq 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = +\infty$ και άρα $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right) = +\infty.$

Κεφάλαιο 5

Παραγώγιση πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την παραγώγιση μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών $f(x, y)$ που παίρνει πραγματικές τιμές. Θα ξεκινήσουμε με τις πιο ασθενείς έννοιες παραγώγισης που είναι οι λεγόμενες *μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης ως προς* x και y και οι *κατεύθυνόμενες παράγωγοι.* Κατόπιν θα ορίσουμε την πιο ισχυρή έννοια της *(ολικής) παραγώγου* μιας πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών και θα δούμε πως σχετίζεται με τις ασθενέστερες έννοιες των μερικών και των κατά κατεύθυνση παραγώγων.

1. Μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.1. *(Μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A και $f : A \to \mathbb{R}$. Το όριο*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$$

καλείται **μερική παράγωγος ως προς x της συνάρτησης f στο σημείο** *(x_0, y_0) και συμβολίζεται με*

$$f_x(x_0, y_0) \quad ή \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Θα λέμε ότι η f είναι **μερικώς παραγωγίσιμη ως προς x στο σημείο** *(x_0, y_0) αν το όριο αυτό είναι πραγματικός αριθμός.*

Ομοίως, το όριο

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}$$

καλείται **μερική παράγωγος ως προς y της συνάρτησης f στο σημείο** *(x_0, y_0) και συμβολίζεται με*

$$f_y(x_0, y_0) \quad ή \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Θα λέμε ότι η f είναι **μερικώς παραγωγίσιμη ως προς y στο σημείο** *(x_0, y_0) αν το όριο αυτό είναι πραγματικός αριθμός.*

Έστω $A_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων (x, y) του A στα οποία η $f_x(x, y)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένη. Η συνάρτηση $(x, y) \to f_x(x, y)$, $(x, y) \in A_1$ καλείται ***μερική παράγωγος της f ως προς*** x και συμβολίζεται με f_x ή $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Ομοίως αν $A_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του A στα οποία η $f_y(x,y)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένη τότε η συνάρτηση $(x,y) \to f_y(x,y)$, $(x,y) \in A_2$ καλείται ***μερική παράγωγος της*** f ***ως προς*** y και συμβολίζεται με f_y ή $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Παραδειγμα 5.1. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = |x| + |y|.$$

Ισχυριζόμαστε ότι οι $f_x(0,0)$ και $f_y(0,0)$ δεν υπάρχουν. Πράγματι,

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

που ως γνωστόν δεν υπάρχει (αφού τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά). Ομοίως

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{|y|}{y}$$

που πάλι δεν υπάρχει.

Παραδειγμα 5.2. Ομοίως για την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

οι $f_x(0,0)$ και $f_y(0,0)$ δεν υπάρχουν, αφού όπως παραπάνω

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{|x|^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

και

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{|y|^2}}{y} = \lim_{x\to 0} \frac{|y|}{y}$$

Παραδειγμα 5.3. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. Τότε

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{|x \cdot 0|} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Ομοίως

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{|0 \cdot y|} - 0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι η ύπαρξη των μερικών παραγώγων σε ένα σημείο (x_0, y_0) δεν συνεπάγεται την συνέχεια της f στο (x_0, y_0).

Παραδειγμα 5.4. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$. Τότε οι $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ υπάρχουν ενώ η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$. Πράγματι, όπως είδαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο (δες Παράδειγμα 4.1) το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει και άρα η f δεν μπορεί να είναι συνεχής στο $(0,0)$. Όμως

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

και ομοίως

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

2. Παράγωγος κατά κατεύθυνση

Κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$ θα καλείται *κατεύθυνση* στο $\mathbb{R}^2$.

Ορισμος 5.2. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A και $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ μια κατεύθυνση στο $\mathbb{R}^2$. Το όριο*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) - f(x_0, y_0)}{t}$$

*καλείται **παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$** και συμβολίζεται με*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0)$$

Παρατηρούμε ότι η παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ είναι στην ουσία η παράγωγος του περιορισμού της f στην τομή της ευθείας $L = \{\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\}$ με το A. Πιο συγκεκριμμένα έστω $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}_0) \subseteq A$. Ορίζουμε $g : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}), \quad t \in (-\delta, \delta)$$

τότε είναι εύκολο να δούμε ότι η g είναι καλά ορισμένη[1] και

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0)$$

Επίσης αν $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ είναι η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^2$ τότε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

και ομοίως

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_2}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Το παρακάτω παράδειγμα δείχνει ότι η ύπαρξη των κατά κατεύθυνση παραγώγων μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο δεν εξασφαλίζει την συνέχεια της f στο σημείο αυτό.

Παραδειγμα 5.5. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

Δείξτε ότι

(1) Η f δεν έχει όριο στο $(0, 0)$.

(2) Όλες οι κατά κατεύθυνση παράγωγοι της f στο $(0, 0)$ υπάρχουν.

---

[1] διότι $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} \in B_\delta(\mathbf{x}_0) \subseteq A$, αφού $\|(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - \mathbf{x}_0\| = \|t\mathbf{u}\| = |t| \cdot \|\mathbf{u}\| = |t| < \delta$

Λύση: (1) Δείτε Παράδειγμα 4.4.

(2) Έστω $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$ μια κατεύθυνση στο $\mathbb{R}^2$. Τότε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0+tu_1, 0+tu_2) - f(0,0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(tu_1, tu_2)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3u_1^2u_2}{t^5u_1^4 + t^3u_2^2}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t^3u_1^2u_2}{t^3(t^2u_1^4 + u_2^2)} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{u_1^2u_2}{t^2u_1^4 + u_2^2}
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να συμβεί $u_1 = u_2 = 0$ αφού $u_1^2 + u_2^2 = 1$. Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

(α) $u_2 = 0$. Τότε $u_1^2 = 1$ και $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^2} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$.

(β) $u_2 \neq 0$. Τότε $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{u_1^2u_2}{t^2u_1^4 + u_2^2} = \frac{u_1^2u_2}{u_2^2} = \frac{u_1^2}{u_2}$.

3. Παράγωγος και διαφορικό

Θυμίζουμε ότι μια συνάρτηση μιας μεταβλητής $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ καλείται *παραγωγίσιμη στο* $x_0 \in \mathbb{R}$, αν το όριο

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

είναι πραγματικός αριθμός. Άρα, αν θέσουμε $a = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ τότε

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - ah}{h} = 0.$$

Παρατηρείστε ότι η συνάρτηση $x \to ax$ είναι μια γραμμική συνάρτηση από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$.

Γενικεύουμε τώρα τα παραπάνω για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών ως εξής.

Ορισμος 5.3. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A. Λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη** (ή **διαφορίσιμη**) **στο σημείο** $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ αν υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - ah - bk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0. \tag{5.1}$$

ή ισοδύναμα[2], *αν υπάρχει* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *γραμμική συνάρτηση τέτοια ώστε*

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \tag{5.2}$$

Οι πραγματικοί αριθμοί a, b που ικανοποιούν την (5.1) είναι μοναδικοί όπως προκύπτει από την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 5.4. *Έστω* $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ *και* $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ *εσωτερικό σημείο του* A. *Αν υπάρχουν* $a, b \in \mathbb{R}$ *ώστε να ικανοποιείται η* (5.1)*, τότε τα* a*,* b *είναι μοναδικά και ισχύει ότι* $a = f_x(x_0, y_0)$ *και* $b = f_y(x_0, y_0)$.

Απόδειξη. Απο την (5.1) για $k = 0$ έχουμε

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0) - ah}{|h|} = 0$$

Άρα

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0) - ah}{h} = 0$$

δηλαδή

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} - a \right) = 0$$

που σημαίνει ότι

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = a$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $f_y(x_0, y_0) = b$. □

Από τα παραπάνω έχουμε τον εξής χαρακτηρισμό παραγωγισιμότητας.

Πόρισμα 5.5. *Έστω* $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ *και* $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ *εσωτερικό σημείο του* A. *Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) Η f *είναι παραγωγισιμη στο* $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$.

(2) Η f *είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο* $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ *και ισχύει ότι*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)\to\mathbf{0}} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0. \tag{5.3}$$

Η ύπαρξη μόνο των μερικών παραγώγων χωρίς την συνθήκη (5.3) δεν συνεπάγεται την παραγωγισιμότητα της f. Σχεικά έχουμε το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 5.6. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

και $f(0, 0) = 0$. Τότε,

(1) Η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.
(2) Ισχύει ότι $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.
(3) Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

[2]Θυμηθείτε ότι κάθε γραμμική συνάρτηση $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι της μορφής $T(x, y) = ax + by$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$

Αποδειξη. (1) Παρατηρούμε ότι

$$|f(x,y)| = \Big|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot |y| \leq |y|$$

και άρα απο τον κανόνα παρεμβολής $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. Συνεπώς η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(2) Έχουμε

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

(3) Αν η f ήταν παραγωγίσιμηστο $\mathbf{x}_0 = (0,0)$ τότε θα έπρεπε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\|(x,y)\|} = 0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$
$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0.$$

Όμως το όριο αυτό δεν υπάρχει. Πράγματι, για την ακολουθία $(x_n,y_n) = (1/n,1/n) \to (0,0)$ έχουμε $f(1/n,1/n) = 1/2$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, οπότε και $\lim_{n\to+\infty} f(x_n,y_n) = 1/2$. Όμως για την ακολουθία $(x_n,y_n) = (1/n,0) \to (0,0)$, έχουμε $f(1/n,0) = 0$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, και άρα $\lim_{n\to+\infty} f(x_n,y_n) = 0$. □

Ορισμος 5.6. *Έστω $f : A\to\mathbb{R}$, $A\subseteq\mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0,y_0)$ εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 = (x_0,y_0)$.*

1) Ο πίνακας γραμμή

$$[f_x(x_0,y_0) \quad f_y(x_0,y_0)]$$

θα καλείται ***παράγωγος της f στο σημείο*** *$\mathbf{x}_0$ και θα συμβολίζεται με $f'(x_0,y_0)$.*

2) Η γραμμική απεικόνιση

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

με τύπο

$$T(x,y) = f_x(x_0,y_0)x + f_y(x_0,y_0)y$$

θα καλείται ***διαφορικό της f στο σημείο*** *$\mathbf{x}_0$ και θα συμβολίζεται με $D_{\mathbf{x}_0}f$.*

Προταση 5.7. *Έστω $f : A\to\mathbb{R}$, $A\subseteq\mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0,y_0)$ εσωτερικό σημείο του A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.*

Αποδειξη. Έστω T η γραμμική απεικόνιση που ικανοποιεί την (5.2). Θέτουμε

$$R(\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{h}) \tag{5.4}$$

για κάθε $\mathbf{h}\in\mathbb{R}^2$ με $\mathbf{x}_0+\mathbf{h}\in A$. Συνεπώς,

$$f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + T(\mathbf{h}) + R(\mathbf{h}). \tag{5.5}$$

Επίσης, από την (5.2), έχουμε[3] $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{R(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0$ και άρα

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} R(\mathbf{h}) = 0.$$

Επιπλέον είναι εύκολο να δούμε ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} T(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}(ax+by) = 0$ και άρα

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} T(\mathbf{h}) = 0$$

Απο τα παραπάνω και την (5.5) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) &= \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \left(f(\mathbf{x}_0) + T(\mathbf{h}) + R(\mathbf{h})\right)\\ &= f(\mathbf{x}_0) + \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} T(\mathbf{h}) + \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} R(\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0)\end{aligned}$$

δηλαδή η f είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$. □

4. Εφαπτόμενο επίπεδο

Θυμίζουμε πρώτα ότι αν $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ το γράφημα (συμβολίζουμε με $Gr(f)$) της f δίνεται από την σχέση

$$Gr(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x,y) \in A \text{ και } z = f(x,y)\} \subseteq \mathbb{R}^3. \tag{5.6}$$

Έστω $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$. Το επίπεδο π του $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από την εξίσωση

$$(x,y,z) \in \pi \Leftrightarrow z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \tag{5.7}$$

θα καλείται ***εφαπτόμενο επίπεδο*** της f στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$. Παρατηρείστε ότι ένα σημείο $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ περιέχεται στο εφαπτόμενο επιπέδο της f στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ αν και μόνο αν το διάνυσμα

$$\mathbf{n} = (-f_x(x_0,y_0),\ -f_y(x_0,y_0),\ 1) \tag{5.8}$$

$\mathbf{n}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $(x-x_0,\ y-y_0,\ z-f(x_0,y_0))$, με άλλα λόγια το διάνυσμα $\mathbf{n}$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο. Το διάνυσμα $\mathbf{n}$ που ορίζεται από την (5.8) καλείται ***κάθετο διάνυσμα*** της f στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$.

5. Κλίση, σχέση παραγώγου και κατά κατεύθυνση παραγώγου

Ορισμος 5.8. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A. Αν η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$, το διάνυσμα $(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0))$ θα καλείται* **κλίση** *της f στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ και θα συμβολίζεται με $\nabla f(x_0, y_0)$.*

---

[3]Είναι $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \|\mathbf{h}\| = 0$, οπότε

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} R(\mathbf{h}) = \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \left(\frac{R(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} \cdot \|\mathbf{h}\|\right) = \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{R(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} \cdot \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \|\mathbf{h}\| = 0.$$

Παρατηρηση 5.1. Παρατηρείστε ότι σύμφωνα με τα παραπάνω το διαφορικό $D_{\mathbf{x}_0}f$ της f στο (x_0, y_0) μπορεί να γραφεί με τις εξής μορφές:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{x}_0}f(x,y) &= f_x(x_0,y_0)x + f_y(x_0,y_0)y \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)y \\ &= f'(x_0,y_0) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (\text{γινόμενο πινάκων}) \\ &= \nabla f(x_0,y_0) \cdot (x,y) \quad (\text{εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων}) \end{aligned} \tag{5.9}$$

για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Παρατηρηση 5.2. Από το Πόρισμα 5.5 έχουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ αν και μόνο αν είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0 \tag{5.10}$$

Προταση 5.9. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) &= f_x(x_0,y_0)u_1 + f_y(x_0,y_0)u_2 \\ &= \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{u} \\ &= D_{\mathbf{x}_0}f(\mathbf{u}) \end{aligned} \tag{5.11}$$

για κάθε κατευθύνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.

Αποδειξη. Έστω $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ μια κατεύθυνση στο $\mathbb{R}^2$ (δηλαδή $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ και $\|\mathbf{u}\| = 1$). Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ από την (5.10) για $\mathbf{h} = t\mathbf{u}$, $t \in \mathbb{R}$, παίρνουμε

$$\lim_{t\to 0} \frac{|f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot(t\mathbf{u})|}{\|t\mathbf{u}\|} = 0 \tag{5.12}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $t \neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{|f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot(t\mathbf{u})|}{\|t\mathbf{u}\|} &= \frac{|f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot(t\mathbf{u})|}{|t|\cdot\|\mathbf{u}\|} \\ &= \frac{|f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot(t\mathbf{u})|}{|t|} \\ &= \left| \frac{f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - t\left(\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{u}\right)}{t} \right| \\ &= \left| \frac{f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} - \left(\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{u}\right) \right| \end{aligned}$$

και άρα η (5.12) γράφεται

$$\lim_{t\to 0} \left| \frac{f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} - \left(\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{u}\right) \right| = 0$$

Οπότε

$$\lim_{t\to 0} \left(\frac{f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} - \left(\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{u}\right) \right) = 0$$

δηλαδή
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}.$$
Επειδή εξ ορισμού $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}$, έπεται το ζητούμενο. □

Η Πρόταση 5.9 θέλει προσοχή στην εφαρμογή της γιατί δεν ισχύει απαραίτητα αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0). Παραθέτουμε σχετικά τα επόμενο παράδειγμα.

Παραδειγμα 5.7. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ αν $(x,y) \neq (0,0)$. Δείξτε τα εξής.

(i) Η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(ii) Για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ η παράγωγος της f στο $(0,0)$ κατά την $\mathbf{u}$ υπάρχει.

(iii) Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

Αποδειξη. (i) Για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$ έχουμε
$$|f(x,y)| = \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|x|^3}{x^2+y^2} + \frac{|y|^3}{x^2+y^2} \leq \frac{|x|^3}{x^2} + \frac{|y|^3}{y^2} = |x| + |y|$$
Άρα $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(ii) Έστω $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$. Είναι
$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\mathbf{u}) - f(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3u_1^3 + t^3u_2^3}{t^2u_1^2 + t^2u_2^2}}{t} = \frac{u_1^3 + u_2^3}{u_1^2 + u_2^2} = u_1^3 + u_2^3.$$
αφού $\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 = 1$ ($\mathbf{u}$ μοναδιαίο).

(iii) Από το (ii) για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 = (1,0)$,
$$f_x(0,0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(0,0) = 1,$$
και αντίστοιχα για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 = (0,1)$,
$$f_y(0,0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_2}(0,0) = 1.$$
Θα δείξουμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ με δύο τρόπους.

1ος τρόπος: Από το Πόρισμα 5.5 γνωρίζουμε ότι f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ αν και μόνο αν
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$
ισοδύναμα,
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y + xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$$

Αλλά τότε αν $x = y = t$ ϑα πρέπει

$$\lim_{t\to 0} \frac{2t^3}{\sqrt{2}|t|^3} = 0 \text{ή} \lim_{t\to 0} \frac{t}{|t|} = 0,$$

που βέβαια δεν ισχύει.

2ος τρόπος: Απο την Πρόταση 5.9 αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ τότε ϑα έπρεπε $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = f_x(0,0)u_1 + f_y(0,0)u_2 = u_1 + u_2$.

Όμως απο το (ii) έχουμε ότι $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = u_1^3 + u_2^3$. Άρα ϑα είχαμε $u_1^3 + u_2^3 = u_1 + u_2$, για όλα τα $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$, άτοπο. □

Παρατηρηση 5.3. Δεν ισχύει το αντίστροφο της Πρότασης 5.9. Δηλαδή μπορεί να ισχύει ο τύπος $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2$ για κάθε κατεύϑυνση $\mathbf{u}$ αλλά η f να μην είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0). Σχετικά δείτε Άσκηση Β8.

Με χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz ($|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \le \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$) έχουμε και το εξής πόρισμα.

Πορισμα 5.10. *Εστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0)\right| \le \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|. \tag{5.13}$$

για κάθε κατευϑύνση $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$. Επιπλέον αν $\nabla f(\mathbf{x}_0) \ne (0,0)$ τότε οι κατευϑύνσεις

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}, \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}$$

είναι αυτές για τις οποίες η f έχει την μέγιστη και αντίστοιχα ελάχιστη κατευϑυνόμενη παράγωγο, δηλαδή

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_1}(\mathbf{x}_0) = \max\left\{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) : u \in \mathbb{R}^2 \text{ με } \|u\| = 1\right\} = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \tag{5.14}$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_2}(\mathbf{x}_0) = \min\left\{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) : u \in \mathbb{R}^2 \text{ με } \|u\| = 1\right\} = -\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \tag{5.15}$$

Αποδειξη. Έστω $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$. Αφού η f είναι παραγωγίσιμηστο $\mathbf{x}_0$ απο την Πρόταση 5.9 έχουμε

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0)\right| = |\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}| \le \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \cdot \|\mathbf{u}\| = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|. \tag{5.16}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_1}(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}_1 &= \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|} \\ &= \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|} = \frac{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|^2}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|} = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|\end{aligned}$$

Άρα αντικαθιστώντας στην (5.16) παίρνουμε

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0)\right| \leq \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_1}(\mathbf{x}_0)$$

που δίνει την (5.14). Ομοίως για το $\mathbf{u}_2$. □

6. Σχέση παραγώγου και μερικών παραγώγων

Είδαμε ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο τότε είναι και μερικώς παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Επίσης είδαμε με παράδειγμα ότι το αντίστροφο δεν ισχύει. Στην παράγραφο αυτή θα δούμε ότι αν υποθέσουμε επιπλέον ότι οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν σε μια περιοχή του σημείου και ως συναρτήσεις δύο μεταβλητών είναι συνεχείς στο σημείο αυτό, τότε η φ είναι παραγωγίσιμη. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το εξής.

Θεωρημα 5.11. ***(Ικανή συνθήκη παραγωγισιμότητας)*** *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε οι f_x, f_y ορίζονται σε μια περιοχή του $\mathbf{x}_0$ και είναι συνεχείς στο $\mathbf{x}_0$. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$.*

Αποδειξη. Απο τον χαρακτηρισμό παραγωγισιμότητας πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών (Πόρισμα 5.5) αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \quad (5.17)$$

Έστω B μια ανοικτή μπάλα με κέντρο το (x_0, y_0) τέτοια ώστε $B \subseteq A$ και οι f_x, f_y να ορίζονται στο B. Έστω $(h, k) \neq (0, 0)$ αρκετά μικρό τέτοιο ώστε το σημείο $(x_0+h, y_0+k) \in B$. Ας υποθέσουμε ότι $h \neq 0$ και $k \neq 0$. (Οι περιπτώσεις $h = 0$ και $k = 0$ αντιμετωπίζονται ομοίως). Προσθαφαιρόντας τον όρο $f(x_0, y_0 + k)$, η διαφορά

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$$

γράφεται ως άθροισμα δύο διαφορών όπου στη μία απο αυτές μένει το y σταθερό και στην άλλη το x ως εξής

$$[f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k)] + [f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)]$$

Απο το Θεώρημα Μέσης Τιμής (για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής) υπάρχουν $\theta_1 = \theta_1(h, k), \theta_2 = \theta_2(h, k) \in (0, 1)$ τέτοια ώστε

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) = f_x(x_0+\theta_1 h, y_0+k)h$$

και

$$f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0+\theta_2 k)k$$

Συνεπώς το πηλίκο

$$\frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \quad (5.18)$$

γράφεται ως $Q_1(h, k) + Q_2(h, k)$ όπου

$$Q_1(h, k) = (f_x(x_0+\theta_1 h, y_0+k) - f_x(x_0, y_0))\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \quad (5.19)$$

και

$$Q_2(h,k) = (f_y(x_0, y_0+\theta_2 k) - f_y(x_0,y_0))\,\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} \tag{5.20}$$

Επειδή η f_x είναι συνεχής στο (x_0, y_0), έπεται

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} (f_x(x_0+\theta_1 h, y_0+k) - f_x(x_0,y_0)) = 0. \tag{5.21}$$

Επιπλέον

$$\left|\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq 1.$$

Άρα

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} Q_1(h,k) = 0 \tag{5.22}$$

Ομοίως επειδή η f_y είναι συνεχής στο (x_0, y_0),

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} (f_y(x_0, y_0+\theta_2 k) - f_y(x_0,y_0)) = 0$$

και αφού

$$\left|\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq 1$$

έπεται ότι

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} Q_2(h,k) = 0 \tag{5.23}$$

Απο τις (5.22) και (5.23) έπεται ότι το όριο του πηλίκου στην (5.18) καθώς το $(h,k)\to(0,0)$ είναι το 0. Συνεπώς η (5.17) ισχύει δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0). □

Ορισμος 5.12. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ για την οποία οι f_x, f_y ορίζονται σε κάθε σημείο του A και είναι συνεχείς καλείται* ***συνεχώς παραγωγίσιμη*** *στο A. Το σύνολο όλων των συνεχώς παραγωγίσιμων πραγματικών συναρτήσεων στο A θα συμβολίζεται με $C^1(A)$.*

Το επόμενο πόρισμα του Θεωρήματος 5.11 είναι ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο παραγωγισιμότητας.

Πορισμα 5.13. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f \in C^1(A)$. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του A.*

Παραδειγμα 5.8. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = e^x y + x^2 e^y$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Επίσης βρείτε την παράγωγο στο σημείο $(1,0)$.

Αποδειξη. Έχουμε $f_x(x,y) = ye^x + 2xe^y$ και $f_y(x,y) = e^x + x^2e^y$. Οι f_x, f_y είναι συνεχείς. Πράγματι, έστω $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ και $(x_n, y_n) \to (x,y)$. Τότε $f_x(x_n,y_n) = y_n e^{x_n} + 2x_n e^{y_n} \to ye^x + 2xe^y$, απο τις αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων πραγματικών ακολουθιών. Αφού λοιπόν οι f_x, f_y είναι συνεχείς η f είναι παραγωγίσιμη. Η παράγωγος της f σε ένα οποιοδήποτε σημείο (x,y) εξ ορισμού είναι ο πίνακας γραμμή $f'(x,y) = [f_x(x,y) \;\; f_y(x,y)]$. Άρα $f'(1,0) = [2 \;\; e+1]$. □

Παραδειγμα 5.9. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = e^{x+2y}$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και υπολογίστε το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+2y} - 1 - x - 2y}{|x| + |y|}$$

Αποδειξη. Είναι $f_x(x,y) = e^{x+2y}$ και $f_y(x,y) = 2e^{x+2y}$. Άρα η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και συνεπώς είναι παραγωγίσιμη.

Επίσης

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+2y} - 1 - x - 2y}{|x| + |y|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{e^{x+2y} - 1 - x - 2y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|+|y|} \right)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+2y} - 1 - x - 2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

λόγω παραγωγισιμότητας της f στο $(0,0)$. Επειδή

$$\left| \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|+|y|} \right| \leq 1$$

έπεται ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+2y} - 1 - x - 2y}{|x| + |y|} = 0.$$

$\square$

7. Ερωτήσεις και Ασκήσεις

Α. *Ερωτήσεις:* *Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι αληθείς και ποιές είναι ψευδείς δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας:*

Α1. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Αν $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε οι μερικές παράγωγοι $f_x(x_0, y_0)$ και $f_y(x_0, y_0)$ υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0).

Α2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^2$.

Α3. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Αν η f έχει κατευθυνόμενη παράγωγο $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0)$ κατά οποιαδήποτε κατεύθυνση $\mathbf{u}$ του $\mathbb{R}^2$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0).

Α4. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε οι $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ υπάρχουν (στο $\mathbb{R}$). Τότε $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2$, για κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ μοναδιαίο.

Α5. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = u_1^2 + u_2^2$, για κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ μοναδιαίο. Τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0).

Β. *Ασκήσεις* :

Β1. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$. Δείξτε ότι η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

Β2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) = x^2 + y^2$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u}$ για το οποίο η παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο $(1, 2)$ γίνεται ελάχιστη.

Β3. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και $f(x, y) = \dfrac{2x^3 + 3y^3}{x^2 + y^2}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$. Δείξτε τα επόμενα:

(1) Η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.
(2) Για κάθε $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$ η $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$ υπάρχει.
(3) Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

Β4. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \dfrac{y^2}{x}\sqrt{x^2 + y^2}$ αν $x \neq 0$ και $f(x, y) = 0$ αν $x = 0$. Δείξτε τα επόμενα:

(1) Για κάθε $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = 0$.
(2) Η f δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$. (*Υπόδειξη: Παρατηρείστε ότι για* $x > 0$, $f(x, y) = \sqrt{y^4 + \dfrac{y^6}{x^2}}$ *και θεωρείστε την καμπύλη* $y = \sqrt[6]{x}$)

Β5. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(1) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ και $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

(2) Ισχύει ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

B6. Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ και $f'(0,0)\neq(0,0)$ δείξτε ότι το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ δεν υπάρχει.

B7. Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ και $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0,y_0). Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C\geq 0$ τέτοια ώστε

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_2}(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_1}(x_0,y_0)\right| \leq C\|\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1\|$$

για όλα τα $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\in\mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}_1\|=\|\mathbf{u}_2\|=1$.

B8. Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ συνάρτηση. Έστω $c\neq f(0,0)$ και έστω $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$g(x,y)=\begin{cases} c & \text{αν } y=x^2 \text{ και } (x,y)\neq(0,0)\\ f(x,y) & \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

Δείξτε τα εξής.

(1) Η g δεν έχει όριο στο $(0,0)$. Κατά συνέπεια η g δεν είναι συνεχής άρα ούτε και παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

(2) Για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$ ισχύει ότι $\dfrac{\partial g}{\partial \mathbf{u}}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)$.

(3) Για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$ ισχύει ότι $\dfrac{\partial g}{\partial \mathbf{u}}(0,0)=g_x(0,0)u_1+g_y(0,0)u_2$.

Κεφάλαιο 6

Καμπύλες, Πρώτος κανόνας Αλυσίδας, Θεώρημα Μέσης Τιμής

1. Καμπύλες στον $\mathbb{R}^2$

Γενικά με τον όρο *(παραμετρική) καμπύλη* στον $\mathbb{R}^2$ θα εννοούμε μια συνάρτηση $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$$

όπου το I είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$. Το σύνολο τιμών $\{\mathbf{r}(t) : t \in I\} \subseteq \mathbb{R}^2$ θα το καλούμε *ίχνος της καμπύλης*. Θα λέμε ότι η καμπύλη $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^2$ είναι *παραγωγίσιμη (ή διαφορίσιμη) στο σημείο* $t_0 \in I$ αν οι $x'(t_0), y'(t_0)$ υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί και στην περίπτωση αυτή το διάνυσμα

$$\mathbf{r}'(t_0) = (x_1'(t_0), y'(t_0))$$

θα καλείται *εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης στο* t_0.

Δύο πολύ χρήσιμα παραδείγματα επίπεδων καμπυλών είναι τα επόμενα:

(1) ***Το κλειστό ευθύγραμμο τμήμα του*** $\mathbb{R}^2$ ***με άκρα τα σημεία*** $\mathbf{a}$**,** $\mathbf{b}$: Έστω $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ δύο διαφορετικά σημεία του $\mathbb{R}^2$. Θεωρούμε την καμπύλη $\mathbf{r} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \quad t \in [0,1] \tag{6.1}$$

Αν $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ και $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ τότε η $\mathbf{r}(t)$ παίρνει την μορφή

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) \tag{6.2}$$

όπου

$$x(t) = a_1 + t(b_1 - a_1) \text{ και } \ y(t) = a_2 + t(b_2 - a_2) \tag{6.3}$$

Το ίχνος της καμπύλης αυτής καλείται *κλειστό ευθύγραμμο τμήμα του* $\mathbb{R}^2$ *με άκρα τα* $\mathbf{a}$*,* $\mathbf{b}$, και συμβολίζεται με $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Άρα,

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) : t \in [0,1]\}$$

Παρατηρούμε ότι

$$x'(t) = b_1 - a_1 \text{ και } y'(t) = b_2 - a_2$$

και συνεπώς το εφαπτόμενο διάνυσμα της $\mathbf{r}$ είναι σταθερό για κάθε $t \in [0,1]$ και δίνεται απο τον τύπο

$$\mathbf{r}'(t) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = \mathbf{b} - \mathbf{a}. \tag{6.4}$$

(2) ***Ο μοναδιαίος κύκλος του*** $\mathbb{R}^2$: Η καμπύλη $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$$

έχει ίχνος τον μοναδιαίο κύκλο του $\mathbb{R}^2$ δηλαδή τον κύκλο κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας $R = 1$. Το εφαπτόμενο διάνυσμα δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

Παρατηρείστε ότι $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) = 0$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$, δηλαδή το εφαπτόμενο διάνυσμα στο t είναι κάθετο στο $\mathbf{r}(t)$.

2. Πρώτος Κανόνας Αλυσίδας

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί την πιο απλή μορφή του κανόνα αλυσίδας για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Θεωρημα 6.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$, τέτοια ώστε το ίχνος της περιέχεται στο A. Ορίζουμε $F : I \to \mathbb{R}$ να είναι η σύνθεσή τους, δηλαδή*

$$F(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(x(t), y(t)),$$

για κάθε $t \in I$. Αν η $\mathbf{r}$ είναι παραγωγίσιμη στο $t_0 \in I$ και η f παραγωγίσιμη στο $\mathbf{r}(t_0)$ τότε η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο t_0 και ισχύει

$$\begin{aligned} F'(t_0) &= \nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0) \\ &= f_x(x(t_0)), y(t_0))\, x'(t_0) + f_y(x(t_0)), y(t_0))\, y'(t_0). \end{aligned} \tag{6.5}$$

Αποδειξη. Θέτουμε $x_0 = x(t_0)$ και $y_0 = y(t_0)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} F'(t_0) &= \lim_{t \to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \to t_0} \frac{f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t_0))}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \to t_0} \frac{f(x(t), y(t)) - f(x_0, y_0)}{t - t_0} \end{aligned} \tag{6.6}$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$ έχουμε

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x - x_0) - f_y(x_0,y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0 \tag{6.7}$$

Για κάθε $(x, y) \in A$ θέτουμε

$$R(x,y) = f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x - x_0) - f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

οπότε

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) + R(x,y) \tag{6.8}$$

Επίσης η (6.7) γράφεται

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{R(x,y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0 \tag{6.9}$$

Έχουμε τώρα

$$\begin{aligned}F(t)-F(t_0) &= f\left(x(t),y(t)\right)-f\left(x_0,y_0\right)\\ &\overset{(6.8)}{=} f_x(x_0,y_0)\left(x(t)-x_0\right)+f_y(x_0,y_0)\left(y(t)-y_0\right)+R\left(x(t),y(t)\right)\\ &= f_x(x_0,y_0)\left(x(t)-x(t_0)\right)+f_y(x_0,y_0)\left(y(t)-y(t_0)\right)+R\left(x(t),y(t)\right)\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}F'(t_0) &= \lim_{t\to t_0}\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0}\\ &= f_x(x_0,y_0)\lim_{t\to t_0}\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}+f_y(x_0,y_0)\lim_{t\to t_0}\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}\\ &+\lim_{t\to t_0}\frac{R\left(x(t),y(t)\right)}{t-t_0}\\ &= f_x(x_0,y_0)x'(t_0)+f_y(x_0,y_0)y'(t_0)+\lim_{t\to t_0}\frac{R\left(x(t),y(t)\right)}{t-t_0}\end{aligned}$$

Για να ολοκληρωθεί συνεπώς η απόδειξη αρκεί να δειχθεί ότι

$$\lim_{t\to t_0}\frac{R\left(x(t),y(t)\right)}{t-t_0}=0 \tag{6.10}$$

Πράγματι, το πηλίκο $\dfrac{R\left(x(t),y(t)\right)}{t-t_0}$ γράφεται ως γινόμενο

$$\frac{R\left(x(t),y(t)\right)}{\sqrt{\left(x(t)-x_0\right)^2+\left(y(t)-y_0\right)^2}}\cdot\frac{\sqrt{\left(x(t)-x_0\right)^2+\left(y(t)-y_0\right)^2}}{t-t_0}.$$

Το όριο στο t_0 του πρώτου παράγοντα είναι το μηδέν αφού

$$\lim_{t\to t_0}\frac{R\left(x(t),y(t)\right)}{\sqrt{\left(x(t)-x_0\right)^2+\left(y(t)-y_0\right)^2}}=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{R\left(x,y\right)}{\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}}\overset{(6.9)}{=}0.$$

Επίσης το όριο του δεύτερου παράγοντα στο t_0 υπάρχει και είναι πεπερασμένο:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0}\frac{\sqrt{\left(x(t)-x_0\right)^2+\left(y(t)-y_0\right)^2}}{t-t_0} &= \lim_{t\to t_0}\sqrt{\left(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}\right)^2+\left(\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}\right)^2}\\ &= \sqrt{\left(x'(t_0)\right)^2+\left(y'(t_0)\right)^2}\end{aligned}$$

□

3. Ισοσταθμικές καμπύλες και κλίση

Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ όπου $A\subseteq\mathbb{R}^2$ και $\mathbf{r}:I\to\mathbb{R}^2$ μια καμπύλη στο $\mathbb{R}^2$ που το ίχνος της περιέχεται στο A. Η καμπύλη $\mathbf{r}$ θα καλείται ***ισοσταθμική καμπύλη της*** f αν ο περιορισμός της f στο ίχνος της είναι σταθερή συνάρτηση (δηλαδή $f(\mathbf{r}(t))=c$ για όλα τα $t\in I$).

Πρόταση 6.2. ***(Καθετότητα του ∇f και των ισοσταθμικών καμπυλών)*** *Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ όπου $A\subseteq\mathbb{R}^2$ ανοικτό και $\mathbf{r}:I\to\mathbb{R}^2$, $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t))$ μια ισοσταθμική καμπύλη της f. Αν η $\mathbf{r}$ είναι παραγωγίσιμη στο $t_0\in I$ και η f*

παραγωγίσιμη στο $\mathbf{r}(t_0)$ *τότε το διάνυσμα* $\nabla f(\mathbf{r}(t_0))$ *της κλίσης της* f *στο σημείο* $\mathbf{r}(t_0)$ *είναι κάθετο με το εφαπτόμενο διάνυσμα* $\mathbf{r}'(t_0)$ *της καμπύλης στο* t_0.

Αποδειξη. Έστω $F(t) = f(\mathbf{r}(t))$, $t \in I$. Η F είναι σταθερή συνάρτηση και άρα $F'(t) = 0$ για όλα τα $t \in I$. Απο την άλλη μεριά έχουμε ότι $F'(t_0) = \nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0)$ και άρα $\nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$. $\square$

4. Το Θεώρημα Μέσης Τιμής για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Θεωρημα 6.3. *Έστω* $A \subseteq \mathbb{R}^2$ *ανοικτό και* $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ *δύο διαφορετικά σημεία του* A *τέτοια ώστε το κλειστό ευθύγραμμο τμήμα* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *με άκρα τα* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *να περιέχεται στο* A. *Έστω* $f : A \to \mathbb{R}$ *παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τότε υπάρχει* $\xi \in (0, 1)$ *τέτοιο ώστε*

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a} + \xi(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \tag{6.11}$$

Ισοδύναμα, υπάρχει σημείο $\boldsymbol{\xi}$ *στο ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα*[1] $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *τέτοιο ώστε*

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\boldsymbol{\xi}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \tag{6.12}$$

Αποδειξη. Έστω $\mathbf{r} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ με $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ και έστω $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$F(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})),$$

για κάθε $t \in [0, 1]$. Επειδή $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1] \subseteq A$ η F είναι καλά ορισμένη. Επιπλέον όπως είδαμε (σχέση (6.4))το **εφαπτόμενο διάνυσμα της** $\mathbf{r}(t)$ είναι σταθερό με $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, για οποιοδήποτε $t \in [0, 1]$. Άρα, αφού η f είναι παραγωγίσιμη, απο τον κανόνα αλυσίδας (Θεώρημα 6.1) έπεται ότι και η F είναι παραγωγίσιμη με

$$F'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = \nabla f(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \tag{6.13}$$

για κάθε $t \in (0, 1)$. Απο το Θεώρημα Μέσης Τιμής (για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής) έχουμε

$$F(1) - F(0) = F'(\xi) \tag{6.14}$$

για κάποιο $\xi \in (0, 1)$. Επειδή $F(0) = f(\mathbf{a})$ και $F(1) = f(\mathbf{b})$ αντικαθιστώντας στην (6.14) παίρνουμε

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a} + \xi(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

Θέτοντας τώρα $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{a} + \xi(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ έχουμε ότι $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ και

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\boldsymbol{\xi}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

$\square$

[1] Το ***ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα του*** $\mathbb{R}^2$ ***με άκρα τα*** $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ορίζεται να είναι το σύνολο

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) : t \in (0, 1)\}$$

Πορισμα 6.4. *Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) Η f είναι σταθερή.

(2) Για κάθε $(x, y) \in A$, ισχύει ότι $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$.

Αποδειξη. (1) $\implies$ (2) Αν η f είναι σταθερή τότε

$$f_x(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

και ομοίως

$$f_y(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

(2) $\implies$ (1) Έστω $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ και έστω $c = f(\mathbf{a})$. Έστω $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ τυχόν σημείο του $\mathbb{R}^2$ διαφορετικό του $\mathbf{a}$. Αφού οι f_x, f_y ως σταθερές είναι και συνεχείς έπεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^2$. Τώρα απο το Θεώρημα 6.3 έχουμε ότι υπάρχει $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ με

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = f_x(\boldsymbol{\xi})(b_1 - a_1) + f_y(\boldsymbol{\xi})(b_2 - a_2)$$

και άρα αφού $f_x = f_y = 0$ έπεται ότι $f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = 0$ δηλαδή $f(\mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) = c$. □

Σημείωση: Προσοχή το Πόρισμα 6.4 δεν ισχύει όταν το πεδίο ορισμού της f είναι ένα οποιοδήποτε υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Πχ. έστω $A = D_1 \cup D_2$, όπου D_1, D_2 δύο ξένοι ανοικτοί δίσκοι του $\mathbb{R}^2$ και $f(x, y) = 1$ αν $(x, y) \in D_1$ ενώ $f(x, y) = 2$ αν $(x, y) \in D_2$. Τότε $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ αλλά η f δεν είναι σταθερή. Το πρόβλημα εδώ είναι ότι ένα ευθ. τμήμα που συνδέει ένα σημείο απο τον ένα δίσκο με ένα σημείο απο τον άλλον δεν περιέχεται όλο στο A και έτσι το Θεώρημα 6.3 δεν μπορεί να εφαρμοστεί.

Πορισμα 6.5. *(Γενίκευση του Θεωρήματος Rolle) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ με $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$. Τότε υπάρχει $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ στο ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ τέτοιο ώστε*

$$\nabla f(\boldsymbol{\xi}) \perp \mathbf{b} - \mathbf{a} \tag{6.15}$$

Αποδειξη. Από το Θεώρημα 6.3 έχουμε ότι υπάρχει $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ τέτοιο ώστε

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\boldsymbol{\xi}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \tag{6.16}$$

Επειδή $f(\mathbf{b}) = f(\mathbf{a})$ έπεται ότι $\nabla f(\boldsymbol{\xi}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0$, δηλαδή $\nabla f(\boldsymbol{\xi}) \perp \mathbf{b} - \mathbf{a}$. □

Ορισμος 6.6. *Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ καλείται τοπικά σταθερή αν γύρω από κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$ είναι σταθερή, δηλαδή για κάθε σημείο $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ υπάρχει $\delta = \delta(a_1, a_2) > 0$ τέτοιο ώστε η f είναι σταθερή στην ανοικτή σφαίρα $B_\delta(a_1, a_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x - a_1, y - a_2)\| \leq \delta\}$ με κέντρο το (a_1, a_2) και ακτίνα δ.*

Πορισμα 6.7. *Κάθε τοπικά σταθερή συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι σταθερή.*

Αποδειξη. Από το Πόρισμα 6.4 αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη και $f_x = f_y = 0$. Πράγματι, έστω $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ και έστω $\delta = \delta(a_1, a_2) > 0$ η ακτίνα της σφαίρας με κέντρο το (a_1, a_2) όπου η f είναι σταθερή. Τότε για κάθε $h \in \mathbb{R}$ με $0 < |h| < \delta$ έχουμε ότι το σημείο $(a_1 + h, a_2)$ ανήκει στην σφαίρα αυτή (αφού η απόστασή του από το $(a_1.a_2)$ ισούται με $|h| < \delta$) και άρα $f(a_1 + h, a_2) = f(a_1, a_2)$. Συνεπώς,

$$f_x(a_1, a_2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h} = 0$$

Ομοίως, για $k \in \mathbb{R}$ με $0 < |k| < \delta$ το σημείο $(a_1, a_2{+}k)$ ανήκει στην σφαίρα αυτή (αφού η απόστασή του από το $(a_1.a_2)$ ισούται με $|k| < \delta$) και άρα $f(a_1, a_2 + k) = f(a_1, a_2)$. Συνεπώς,

$$f_y(a_1, a_2) = \lim_{k\to 0} \frac{f(a_1, a_2 + k) - f(a_1, a_2)}{k} = 0$$

$\square$

Κεφάλαιο 7

Παραγώγιση ανώτερης τάξης

1. Μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $f : A \to \mathbb{R}$. Έστω (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A με την ιδιότητα οι f_x, f_y να υπάρχουν τουλάχιστον σε μια περιοχή του (x_0, y_0). Οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων f_x, f_y ως προς x και y στο σημείο (x_0, y_0) (εφόσον υπάρχουν) καλούνται ***δεύτερης τάξης μερικές παράγωγοι της*** f ***στο σημείο*** (x_0, y_0).

Πιο συγκεκριμένα, έχουμε τέσσερεις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης:

$$f_{xx}(x_0, y_0) = (f_x)_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f_x(x, y_0) - f_x(x_0, y_0)}{x - x_0},$$

$$f_{xy}(x_0, y_0) = (f_x)_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f_x(x_0, y) - f_x(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

$$f_{yx}(x_0, y_0) = (f_y)_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f_y(x, y_0) - f_y(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$f_{yy}(x_0, y_0) = (f_y)_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f_y(x_0, y) - f_y(x_0, y_0)}{y - y_0},$$

Επίσης χρησιμοποιούνται και οι επόμενοι συμβολισμοί

$$f_{xx}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad f_{xy}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

$$f_{yx}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \quad f_{yy}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

Οι μερικές παράγωγοι $f_{xx}(x_0, y_0)$, $f_{xy}(x_0, y_0)$, $f_{yy}(x_0, y_0)$ και $f_{yx}(x_0, y_0)$ είναι οι μερικές παράγωγοι της f στο σημείο (x_0, y_0) δεύτερης τάξης. Ειδικότερα, οι $f_{xy}(x_0, y_0)$ και $f_{yx}(x_0, y_0)$ καλούνται ***μεικτές*** μερικές παράγωγοι της f στο σημείο (x_0, y_0) δεύτερης τάξης.

Με τον παραπάνω τρόπο ορίζονται οι συναρτήσεις f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} στα κατάλληλα σύνολα των σημείων (x, y) του A όπου οι τιμές $f_{xx}(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$, $f_{yx}(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$ υπάρχουν και είναι πεπερασμένες.

Παράδειγμα 7.1. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2$. Για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, έχουμε $f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2$, $f_y(x, y) = 3y^2 + x^2 + 2xy$ και

$$f_{xx}(x, y)(= (f_x)_x(x, y)) = 6x + 2y, \quad f_{xy}(x, y)(= (f_x)_y(x, y)) = 2x + 2y,$$
$$f_{yx}(x, y)(= (f_y)_x(x, y)) = 2x + 2y \quad f_{yy}(x, y)(= (f_y)_y(x, y)) = 6y + 2x.$$

2. Συμμετρία των μεικτών παραγώγων

Στο Παράδειγμα 7.1 οι μεικτές μερικές παράγωγοι f_{xy} και f_{yx} είναι ίσες. Αυτό δεν είναι τυχαίο διότι για την συνάρτηση του παραπάνω παραδείγματος ισχύουν οι υποθέσεις του ακόλουθου θεωρήματος.

Θεωρημα 7.1. *(Θεώρημα Schwarz). Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A. Αν οι μερικές παράγωγοι της f εως και δεύτερης τάξης ορίζονται σε μια περιοχή του (x_0, y_0) και οι f_{xy}, f_{yx} είναι συνεχείς στο (x_0, y_0), τότε $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.*

Για να δείξουμε το Θεώρημα 7.1 χρειαζόμαστε μια προεργασία. Για απλότητα στα επόμενα θα υποθέσουμε ότι $A = \mathbb{R}^2$ και έστω $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Από τους ορισμούς των μικτών παραγώγων έχουμε

$$f_{yx}(x_0, y_0) = (f_y)_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(x_0 + h, y_0) - f_y(x_0, y_0)}{h} \tag{7.1}$$

Επειδή για κάθε $h \neq 0$,

$$f_y(x_0 + h, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)}{k} \tag{7.2}$$

και

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} \tag{7.3}$$

αντικαθιστώντας τις (7.2) και (7.3) στην (7.1), παίρνουμε ότι η $f_{yx}(x_0, y_0)$ ισούται με το παρακάτω επάλληλο όριο

$$\lim_{h \to 0} \left(\lim_{k \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)}{hk} \right) \tag{7.4}$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι Ξ· $f_{xy}(x_0, y_0)$ ισούται με

$$\lim_{k \to 0} \left(\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)}{hk} \right) \tag{7.5}$$

Τα παραπάνω μας οδηγούν να δώσουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμος 7.2. *Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Για κάθε $h, k \neq 0$ ορίζουμε*

$$\Delta(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$$

Η επόμενη πρόταση αποτελεί μια διδιάστατη επέκταση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.

Προταση 7.3. *Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε η f έχει μερικές παραγώγους εως και δεύτερης τάξης. Έστω $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $h, k \neq 0$ και έστω*

$$R(h, k) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_0 < x < x_0 + h, y_0 < y < y_0 + k \right\}$$

το ανοικτό ορθογώνιο με κορυφές τα σημεία $(x_0, y_0), (x_0, y_0 + k), (x_0 + h, y_0), (x_0 + h, y_0 + k)$. Τότε

(1) Υπάρχει $(x_1, y_1) \in R(h, k)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\Delta(h, k)}{hk} = f_{xy}(x_1, y_1). \tag{7.6}$$

(2) Ομοίως υπάρχει $(x_2, y_2) \in R(h,k)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\Delta(h,k)}{hk} = f_{yx}\left(x_2, y_2\right). \tag{7.7}$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε μόνο το (1) (το (2) προκύπτει με όμοιο τρόπο). Ορίζουμε την συνάρτηση

$$\delta(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\Delta(h,k) = \delta(x_0 + h) - \delta(x_0). \tag{7.8}$$

Επίσης παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\delta(x)$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$\delta'(x) = f_x(x, y_0 + k) - f_x(x, y_0) \tag{7.9}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής (μιας μεταβλητής) για την συνάρτηση $\delta(x)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \Delta(h,k) = \delta(x_0 + h) - \delta(x_0) &= h\delta'(x_1) \\ &\overset{(7.9)}{=} h\left(f_x(x_1, y_0 + k) - f_x(x_1, y_0)\right) \end{aligned} \tag{7.10}$$

για κάποιο $x_1 \in (x_0, x_0 + h)$.

Τώρα, παρατηρώντας ότι η συνάρτηση $g(y) = f_x(x_1, y)$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $g'(y) = (f_x)_y(x_1, y) = f_{xy}(x_1, y)$, εφαρμόζοντας πάλι το Θεώρημα Μέσης Τιμής, έχουμε ότι υπάρχει $y_1 \in (y_0, y_0 + k)$ τέτοιο ώστε

$$f_x(x_1, y_0 + k) - f_x(x_1, y_0) = g(y_0 + k) - g(y_0) = kg'(y_1) = kf_{xy}(x_1, y_1) \tag{7.11}$$

Αντικαθιστώντας στην (7.10) προκύπτει το ζητούμενο. □

Είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος του Schwarz:

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.1. Από την (7.6) και την συνέχεια της f_{xy} στο (x_0, y_0) έχουμε

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta(h,k)}{hk} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} f_{xy}\left(x_1, y_1\right) = f_{xy}\left(x_0, y_0\right)$$

Ομοίως από την (7.7) και την συνέχεια της f_{yx} στο (x_0, y_0) έχουμε

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta(h,k)}{hk} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} f_{yx}\left(x_2, y_2\right) = f_{yx}\left(x_0, y_0\right)$$

Άρα $f_{xy}\left(x_0, y_0\right) = f_{yx}\left(x_0, y_0\right)$. □

Το Θεώρημα Schwarz έχει και την παρακάτω πιο ισχυρή μορφή.

Θεώρημα 7.4. *(Ισχυρή μορφή του Θεωρήματος Schwarz) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A και $f : A \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι οι μερικές παράγωγοι f_x, f_y και f_{xy} υπάρχουν σε μια περιοχή του (x_0, y_0) και η f_{xy} είναι συνεχής στο (x_0, y_0). Τότε υπάρχει και η $f_{yx}(x_0, y_0)$ και ισχύει ότι $f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)$.*

Η απόδειξη του Θεωρήματος 7.4 είναι παρόμοια με αυτήν του Θεωρήματος 7.1. Κλείνουμε την παράγραφο αυτή με το επόμενο παράδειγμα που δείχνει ότι η υπόθεση της συνέχειας των μερικών παραγώγων είναι απαραίτητη.

Παραδειγμα 7.2. (***Παράδειγμα συνάρτησης για την οποία*** $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$) Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

αν $(x,y) \neq (0,0)$. Δείξτε ότι $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

Λύση: Έχουμε

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f_x(0,y) - f_x(0,0)}{y} \tag{7.12}$$

και

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_y(x,0) - f_y(0,0)}{x}. \tag{7.13}$$

Πρέπει συνεπώς να υπολογίσουμε τις $f_x(0,0), f_y(0,0), f_x(0,y)$ και $f_y(x,0)$. Για το σημείο $(0,0)$ έχουμε

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0$$

Για το σημείο $(0,y)$, με $y \neq 0$,

$$f_x(0,y) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,y) - f(0,y)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = -y$$

και τέλος για το $(x,0)$ με $x \neq 0$,

$$f_y(x,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(x,y) - f(x,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} - 0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = x$$

Αντικαθιστώντας στις (7.12) και (7.13) παίρνουμε

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{-y-0}{y} = -1$$

ενώ

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1.$$

3. Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A και $f : A \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε οι μερικές παράγωγοι της f εως και δεύτερης τάξης υπάρχουν στα σημεία μιας περιοχής του (x_0, y_0). Οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ στο σημείο (x_0, y_0) ως προς x και y (εφόσον υπάρχουν) καλούνται ***τρίτης τάξης μερικές παραγώγους της*** f ***στο σημείο*** (x_0, y_0). Ακολουθώντας αντίστοιχο συμβολισμό με αυτόν των μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης, συμβολίζουμε τις τρίτης τάξης μερικές παραγώγους της f στο σημείο (x_0, y_0) ως εξής:

$$f_{xxx}(x_0,y_0) = (f_{xx})_x(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(x_0,y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0,y_0)$$
$$f_{xxy}(x_0,y_0) = (f_{xx})_y(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(x_0,y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(x_0,y_0)$$
$$f_{xyx}(x_0,y_0) = (f_{xy})_x(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)(x_0,y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}(x_0,y_0)$$
$$f_{xyy}(x_0,y_0) = (f_{xy})_y(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)(x_0,y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}(x_0,y_0)$$
$$f_{yxx}(x_0,y_0) = (f_{yx})_x(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)(x_0,y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x_0,y_0)$$
$$f_{yxy}(x_0,y_0) = (f_{yx})_y(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)(x_0,y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial y}(x_0,y_0)$$
$$f_{yyx}(x_0,y_0) = (f_{yy})_x(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x_0,y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x_0,y_0)$$
$$f_{yyy}(x_0,y_0) = (f_{yy})_y(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x_0,y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0,y_0)$$

Αν τώρα οι μερικές παράγωγοι της f εως και τρίτης τάξης υπάρχουν στα σημεία μιας περιοχής του (x_0, y_0) τότε οι μερικές τους παράγωγοι στο σημείο (x_0, y_0) ως προς x και y (εφόσον υπάρχουν) καλούνται ***τέταρτης τάξης μερικές παραγωγοι της f στο σημείο*** (x_0, y_0). Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να ορίσουμε τις n-***τάξης μερικές παραγώγους της f στο σημείο*** (x_0, y_0).

Το Θεώρημα 7.1 γενικεύεται με επαγωγή ως εξής.

Θεωρημα 7.5. *Έστω $n \geq 2$, $f : A \to \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A. Αν οι μερικές παράγωγοι της f εως και n-τάξης ορίζονται σε μια περιοχή του (x_0, y_0) και όλες οι μεικτές μερικές παράγωγοι n-τα΄ξης είναι συνεχείς στο (x_0, y_0) τότε όλες οι μεικτές μερικές παράγωγοι στο (x_0, y_0) που περιέχουν τις ίδιες παραγωγίσεις με διαφορετική σειρά είναι ίσες.*

Πχ. κάτω απο τις υποθέσεις του Θεωρήματος 7.5 για $n = 3$ έχουμε

$$f_{xyx}(x_0, y_0) = f_{xxy}(x_0, y_0) = f_{yxx}(x_0, y_0)$$

κτλ.

Κεφάλαιο 8

Τα Θεωρήματα Taylor για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών

1. Σύντομη επανάληψη

Ας θυμηθούμε τα δύο θεωρήματα Taylor για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής πριν προχωρήσουμε στην γενίκευσή τους.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.1. *(Τύπος Taylor για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής) Έστω $m \geq 0$ ακέραιος, I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$ $(m+1)$-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έστω επίσης $a \in I$. Τότε για κάθε $h \neq 0$ με $a+h \in I$ υπάρχει σημείο ξ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα a και $a+h$ τέτοιο ώστε*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} h^{m+1}. \tag{8.1}$$

Το πολυώνυμο

$$T_m(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \tag{8.2}$$

καλείται ***πολυώνυμο Taylor*** m***-τάξης της*** f ***με κέντρο το*** a. Ο τύπος (8.1) γράφεται και ως εξής: Για κάθε $x \in I$,

$$f(x) = T_m(x) + \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x-a)^{m+1} \tag{8.3}$$

για κάποιο ξ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα a και x.

Προφανώς, $T_m(a) = f(a)$. Αν x ένα διαφορετικό από το a σημείο του I, τότε η εξίσωση (8.3) μας λέει ότι η διαφορά $f(x) - T(x)$ γράφεται

$$f(x) - T_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x-a)^{m+1} \tag{8.4}$$

για κάποιο ξ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα a και x.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.2. *Έστω $m \geq 1$ ακέραιος, I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$. Έστω $a \in I$ και έστω ότι η f είναι m-φορές παραγωγίσιμη στο a. Έστω $T_m(x)$ το πολυώνυμο Taylor m-τάξης της f με κέντρο το a. Τότε*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_m(x)}{(x-a)^m} = 0. \tag{8.5}$$

2. Η συνάρτηση $F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$

Για τα επόμενα σταθεροποιούμε μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, ένα σημείο $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$ και ένα μη μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ τέτοιο ώστε το ευθύγραμμα τμήμα $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{h}]$ να περιέχεται στο A.

Έστω επίσης $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$, η συνάρτηση

$$F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) = f(a_1 + th_1, a_2 + th_2) \tag{8.6}$$

για κάθε $t \in [0, 1]$.

Η συνάρτηση F έχει χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη του Θεωρήματος Μέσης Τιμής (Θεώρημα 6.3). Όπως είδαμε εκεί, αν η f είναι παραγωγίσιμη στο A τότε από τον κανόνα αλυσίδας έχουμε

$$F'(t) = \nabla f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} = f_x(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_1 + f_y(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_2$$

Επίσης, παρατηρείστε ότι αν το $\mathbf{h}$ είναι μοναδιαίο τότε η παράγωγος της f στο $\mathbf{a}$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{h}$ στο $\mathbf{a}$, $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}(\mathbf{a})$, ισούται με την $F'(0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}(\mathbf{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{a})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = F'(0)$$

Πρόταση 8.3. *Αν $f \in C^2(A)$ τότε η F είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει ότι*

$$F''(t) = f_{xx}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_1^2 + 2f_{xy}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_1h_2 + f_{yy}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_2^2 \tag{8.7}$$

για κάθε $t \in [0, 1]$.

Ειδικότερα για $t = 0$ έχουμε

$$F''(0) = f_{xx}(\mathbf{a})h_1^2 + 2f_{xy}(\mathbf{a})h_1h_2 + f_{yy}(\mathbf{a})h_2^2. \tag{8.8}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{h} = (a_1 + th_1, a_2 + th_2)$, $t \in [0, 1]$. Όπως έχουμε δεί η $\mathbf{r}$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $t \in [0, 1]$ και το εφαπτόμενο διάνυσμα της σε κάθε $t \in [0, 1]$ είναι το $\mathbf{r}'(t) = (h_1, h_2) = \mathbf{h}$. Επίσης η f είναι C^2 άρα και C^1 και συνεπώς είναι παραγωγίσιμη. Από τον κανόνα αλυσίδας έχουμε

$$F'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = f_x(\mathbf{r}(t))h_1 + f_y(\mathbf{r}(t))h_2 = f_x(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_1 + f_y(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_2$$

Άρα,

$$\begin{aligned} F''(t) = (F')'(t) &= \Big(f_x(\mathbf{r}(t))h_1 + f_y(\mathbf{r}(t))h_2\Big)' \\ &= \Big(f_x(\mathbf{r}(t))h_1\Big)' + \Big(f_y(\mathbf{r}(t))h_2\Big)' \\ &= \Big(f_x(\mathbf{r}(t))\Big)'h_1 + \Big(f_y(\mathbf{r}(t))\Big)'h_2 \end{aligned} \tag{8.9}$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα αλυσίδας για την συνάρτηση $f_x(\mathbf{r}(t))$ έχουμε

$$\begin{aligned} \Big(f_x(\mathbf{r}(t))\Big)' &= \nabla f_x(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \\ &= (f_x)_x(\mathbf{r}(t))h_1 + (f_x)_y(\mathbf{r}(t))h_2 \\ &= f_{xx}(\mathbf{r}(t))h_1 + f_{xy}(\mathbf{r}(t))h_2 \\ &= f_{xx}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_1 + f_{xy}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_2 \end{aligned}$$

Ομοίως εφαρμόζοντας τον κανόνα αλυσίδας για την συνάρτηση $f_y(\mathbf{r}(t))$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι $f_{xy} = f_{yx}$ (λόγω συνέχειας των μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης), έχουμε

$$\begin{aligned}\Big(f_y(\mathbf{r}(t))\Big)' &= \nabla f_y(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\\ &= (f_y)_x(\mathbf{r}(t))h_1 + (f_y)_y(\mathbf{r}(t))h_2\\ &= f_{yx}(\mathbf{r}(t))h_1 + f_{yy}(\mathbf{r}(t))h_2\\ &= f_{xy}(\mathbf{r}(t))h_1 + f_{yy}(\mathbf{r}(t))h_2\\ &= f_{xy}(\mathbf{a}+t\mathbf{h})h_1 + f_{yy}(\mathbf{a}+t\mathbf{h})h_2.\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην (8.9) προκύπτει εύκολα η (8.7). □

Όπως παρατηρήσαμε στην αρχή της παραγράφου αυτής, όταν το διάνυσμα $\mathbf{h}$ είναι μοναδιαίο τότε $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}(\mathbf{a}) = F'(0)$. Υπό αυτή την σκοπιά η δεύτερη παράγωγος $F''(0)$ ορίζεται ως η *δεύτερης τάξης παράγωγος της f στο $\mathbf{a}$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{h}$*.

Παρατηρηση 8.1. Αν $\mathbf{h} = \mathbf{e}_1$ (αντίστοιχα $\mathbf{h} = \mathbf{e}_2$) παρατηρείστε ότι $F''(0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a})$ (αντ. $F''(0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{a})$).

Η Πρόταση 8.3 γενικεύεται και για ανώτερης τάξης παραγώγους. Για να διατυπώσουμε την γενική μορφή της είναι χρήσιμο να εισάγουμε τον παρακάτω συμβολισμό.

Ορισμος 8.4. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $k \geq 1$, $f \in C^k(A)$ και $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$. Ορίζουμε*

$$\begin{aligned}\left[h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(k)} f(x,y) &= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-j}\partial y^j}(x,y)\, h_1^{k-j}h_2^j\\ &= \sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-j}\partial y^j}(x,y)\, h_1^{k-j}h_2^j\end{aligned} \tag{8.10}$$

για κάθε $(x,y) \in A$.

Παρατηρηση 8.2. Ο συμβολισμός $\left[h_1\dfrac{\partial}{\partial x} + h_2\dfrac{\partial}{\partial y}\right]^{(k)}$ δεν είναι τυχαίος. Προέρχεται από τον τύπο του *Διωνύμου του Νεύτωνα*: Αν $a, b \in \mathbb{R}$ και $k \geq 0$ ακέραιος τότε

$$(a+b)^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a^{k-j}b^j \tag{8.11}$$

όπου

$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!} \tag{8.12}$$

για κάθε $j = 0, \ldots, k$.

Στις ειδικές περιπτώσεις όπου $k = 1, 2, 3$ η (8.10) παίρνει αντίστοιχα τις μορφές

$$\left[h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y}\right] f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, h_2$$

$$\left[h_1\frac{\partial}{\partial x}+h_2\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(2)} f(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,h_1^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\,h_1h_2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\,h_2^2$$

$$\begin{aligned}\left[h_1\frac{\partial}{\partial x}+h_2\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(3)} f(x,y)&=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y)\,h_1^3\\ &\quad+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y)\,h_1^2h_2+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x,y)\,h_1h_2^2\\ &\quad+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y)\,h_2^3.\end{aligned}$$

Είμαστε τώρα έτοιμοι να διατυπώσουμε την γενική μορφή της Πρότασης 8.3.

Πρόταση 8.5. *Αν $f\in C^k(A)$ για κάποιο $k\in\mathbb{N}$ τότε η F είναι k-φορές παραγωγίσιμη και ισχύει ότι*

$$F^{(k)}(t)=\left[h_1\frac{\partial}{\partial x}+h_2\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(k)} f(\mathbf{a}+t\mathbf{h}) \tag{8.13}$$

για κάθε $t\in[0,1]$.

Ειδικότερα για $t=0$ έχουμε

$$\begin{aligned}F^{(k)}(0)&=\left[h_1\frac{\partial}{\partial x}+h_2\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(k)} f(\mathbf{a})\\ &=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-j}\partial y^j}(a_1,a_2)\,h_1^jh_2^{k-j}\end{aligned} \tag{8.14}$$

Η απόδειξη της Πρότασης 8.5 γίνεται με επαγωγή και ανάλογα με απόδειξη της Πρότασης 8.3. Αν το $\mathbf{h}$ είναι μοναδιαίο τότε παράγωγος $F^{(k)}(0)$ ορίζεται να είναι *η k-τάξης παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση* $\mathbf{h}$.

3. Ο Τύπος Taylor για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Θεώρημα 8.6. *Έστω $m\ge 0$, $A\subseteq\mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f\in C^{m+1}(A)$ (δηλαδή $f:A\to\mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους έως και $m+1$ τάξης). Έστω $\mathbf{a}=(a_1,a_2)\in A$ και $\mathbf{h}=(h_1,h_2)\neq\mathbf{0}$ τέτοιο ώστε $[\mathbf{a},\mathbf{a}+\mathbf{h}]\subseteq A$. Τότε υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε*

$$\begin{aligned}f(a_1+h_1,a_2+h_2)&=f(a_1,a_2)+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\left[h_1\frac{\partial}{\partial x}+h_2\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(k)} f(a_1,a_2)\\ &\quad+\frac{1}{(m+1)!}\left[h_1\frac{\partial}{\partial x}+h_2\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(m+1)} f(a_1+\xi h_1,a_2+\xi h_2).\end{aligned}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$F(t)=f(\mathbf{a}+t\mathbf{h}),\quad t\in[0,1]$$

Αφού $f\in C^{m+1}(A)$ απο την Πρόταση 8.5 έχουμε ότι η F είναι $m+1$-φορές παραγωγίσιμη. Άπο τον Τύπο του Taylor για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής (Θεώρημα 8.1 για $a=0$ και $h=1$) έχουμε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$F(1)=F(0)+\sum_{k=1}^{m}\frac{F^{(k)}(0)}{k!}+\frac{F^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \tag{8.15}$$

Επειδή $F(0) = f(\mathbf{a})$, $F(1) = f(\mathbf{a}+\mathbf{h})$,

$$F^{(k)}(0) \overset{(8.14)}{=} \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y}\right]^{(k)} f(\mathbf{a})$$

και

$$F^{(m+1)}(\xi) \overset{(8.13)}{=} \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y}\right]^{(m+1)} f(\mathbf{a}+\xi\mathbf{h})$$

η εξίσωση (8.15) δίνει τον τύπο του Taylor. □

Ορισμος 8.7. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f \in C^m(A)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$ και $m \geq 1$ ακέραιος. Το πολυώνυμο*

$$T_m(x,y) = f(a_1,a_2) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} \left[(x-a_1)\frac{\partial}{\partial x} + (y-a_2)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(k)} f(a_1,a_2) \tag{8.16}$$

καλείται ***πολυώνυμο Taylor** m**-τάξης της** f **με κέντρο το*** $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$.

Το Θεώρημα 8.6 λέει ότι για κάθε $\mathbf{x} = (x, y) \in A$ με $[\mathbf{a}, \mathbf{x}] \subseteq A$

$$f(x,y) = T_m(x,y) + R_m(x,y)$$

όπου

$$R_m(x,y) = \frac{1}{(m+1)!}\left[(x-a_1)\frac{\partial}{\partial x} + (y-a_2)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(m+1)} f(a_1+\xi(x-a_1), a_2+\xi(y-a_2))$$

για κάποιο $\xi \in (0,1)$.

Παρατηρείστε επίσης ότι το πολυώνυμο Taylor πρώτης τάξης της f με κέντρο το $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ δίνεται απο τον τύπο

$$T_1(x,y) = f(a_1,a_2) + f_x(a_1,a_2)(x-a_1) + f_y(a_1,a_2)(y-a_2).$$

Αντίστοιχα το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ δίνεται απο τον τύπο

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= f(a_1,a_2) + f_x(a_1,a_2)(x-a_1) + f_y(a_1,a_2)(y-a_2) \\ &+ \frac{1}{2}\left[f_{xx}(a_1,a_2)(x-a_1)^2 + 2f_{xy}(a_1,a_2)(x-a_1)(y-a_2) + f_{yy}(a_1,a_2)(y-a_2)^2\right]. \end{aligned}$$

Παραδειγμα 8.1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y) = e^{3x+2y}$. Για $m = 1, 2$ υπολογίστε τα πολυώνυμα Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0, 1)$.

Λύση: Ελέγχουμε εύκολα ότι

$$f_x(x,y) = 3e^{3x+2y}, \quad f_y(x,y) = 2e^{3x+2y}$$

και

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) = (f_x)_x(x,y) = 9e^{3x+2y}, \ f_{xy}(x,y) = (f_x)_y(x,y) = 6e^{3x+2y} \\ f_{yx}(x,y) = (f_y)_x(x,y) = 6e^{3x+2y}, f_{yy}(x,y) = (f_y)_y(x,y) = 4e^{3x+2y}. \end{aligned}$$

Απο τα παραπάνω έχουμε ότι $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Επίσης βλέπουμε ότι

$$f_x(0,1) = 3e^2, \ f_y(0,1) = 2e^2$$

και

$$f_{xx}(0,1) = 9e^2, \ f_{xy}(0,1) = f_{yx}(0,1) = 6e^2, \ f_{yy}(0,1) = 4e^2.$$

Άρα το πολυώνυμο Taylor πρώτης τάξης της f με κέντρο το $(a_1, a_2) = (0, 1)$ είναι το

$$\begin{aligned}T_1(x,y) &= f(0,1) + f_x(0,1)x + f_y(0,1)(y-1)\\ &= e^2 + 3e^2x + 2e^2(y-1)\\ &= -e^2 + 3e^2x + 2e^2y.\end{aligned}$$

Αντίστοιχα το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0, 1)$ είναι το

$$\begin{aligned}T_2(x,y) &= f(0,1) + f_x(0,1)x + f_y(0,1)(y-1)\\ &\quad + \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(0,1)x^2 + 2f_{xy}(0,1)x(y-1) + f_{yy}(0,1)(y-1)^2\right]\\ &= e^2 + 3e^2x + 2e^2(y-1)\\ &\quad + \frac{1}{2!}\left[9e^2x^2 + 12e^2x(y-1) + 4e^2(y-1)^2\right]\end{aligned}$$

Παραδειγμα 8.2. Έστω C^2 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Αν $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, $f_{xx}(x,y) = f_{yy}(x,y) = f_{xy}(x,y) = 2$, για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, δείξτε ότι $f(x,y) = (x+y)^2$.

Λύση: Έστω $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ με $(x,y) \neq (0,0)$. Από τον Τύπο του Taylor, για $m = 1$, $\mathbf{a} = (0,0)$ και $\mathbf{b} = (x,y)$, έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned}f(x,y) &= f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y\\ &\quad + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi x,\xi y)x^2 + 2f_{xy}(\xi x,\xi y)xy + f_{yy}(\xi x,\xi y)y^2\right)\end{aligned} \tag{8.17}$$

Από τις υποθέσεις μας έπεται ότι

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$$

για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$. Επειδή για $(x,y) = (0,0)$ ο παραπάνω τύπος δίνει ότι $f(0,0) = 0$ έχουμε ότι $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$, για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

4. Θεώρημα Taylor για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Στο Κεφάλαιο της Παραγώγισης είδαμε ότι μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ αν και μόνο αν οι μερικές παράγωγοι $f_x(a_1, a_2)$ και $f_y(a_1, a_2)$ υπάρχουν και

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{f(x,y) - f(a_1,a_2) - f_x(a_1,a_2)(x-a_1) - f_y(a_1,a_2)(y-a_2)}{\|(x-a_1, y-a_2)\|} = 0 \tag{8.18}$$

Επειδή το πρώτης τάξης πολυώνυμο Taylor της f με κέντρο το $\mathbf{a}$ ορίζεται να είναι το

$$T_1(x,y) = f(a_1,a_2) + f_x(a_1,a_2)(x-a_1) + f_y(a_1,a_2)(y-a_2)$$

ο τύπος (8.18) γράφεται

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{f(x,y) - T_1(x,y)}{\|(x-a_1, y-a_2)\|} = 0 \tag{8.19}$$

Το επόμενο Θεώρημα του Taylor γενικεύει την (8.19) όταν η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους έως και m-τάξης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.8. *Έστω* $m \geq 1$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ *ανοικτό και* $f \in C^m(A)$. *Έστω* $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$ *και* $T_m(x, y)$ *το πολυώνυμο Taylor* m*-τάξης της* f *με κέντρο το* $\mathbf{a}$. *Τότε*

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{f(x,y) - T_m(x,y)}{\|(x-a_1, y-a_2)\|^m} = 0 \tag{8.20}$$

Με άλλα λόγια για κάθε $(x, y) \in A$,

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{f(x,y) - T_m(x,y)}{\left((x-a_1)^2 + (y-a_2)^2\right)^{m/2}} = 0 \tag{8.21}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 8.3. Το παραπάνω θεώρημα λέει ότι μπορούμε να γράψουμε την συνάρτηση f ως

$$f(x, y) = T_m(x, y) + R_m(x, y) \tag{8.22}$$

με

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{R_m(x,y)}{\|(x-a_1, y-a_2)\|^m} = 0 \tag{8.23}$$

Πχ. για $m = 2$, έχουμε

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & f(a_1,a_2) + f_x(a_1,a_2)(x-a_1) + f_y(a_1,a_2)(y-a_2) \\ & + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(a_1,a_2)(x-a_1)^2 + 2f_{xy}(a_1,a_2)(x-a_1)(y-a_2) + f_{yy}(a_1,a_2)(y-a_2)^2\right] \\ & + R_2(x,y) \end{aligned}$$

με

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{R_2(x,y)}{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} = 0 \tag{8.24}$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 8.8 θα χρειασθούμε κάποια προεργασία. Έστω $m \geq 1$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f \in C^m(A)$. Έστω $\mathbf{x} = (x, y), \mathbf{x}' = (x', y') \in A$ και $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$. Θέτουμε

$$\delta(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \max\left\{\left|\frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(x', y') - \frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(x, y)\right| : 0 \leq j \leq m\right\} \tag{8.25}$$

και

$$\Delta(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y}\right]^{(m)} f(x', y') - \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y}\right]^{(m)} f(x, y) \tag{8.26}$$

ΛΗΜΜΑ 8.9. *Για κάθε* $\mathbf{x}', \mathbf{x} \in A$ *και* $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ *ισχύει ότι*

$$|\Delta(\mathbf{x}', \mathbf{x})| \leq 2^{m/2} \delta(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \|(h_1, h_2)\|^m . \tag{8.27}$$

Αποδειξη. Έστω $\mathbf{x}', \mathbf{x} \in A$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
|\Delta(\mathbf{x}', \mathbf{x})| &= \left| \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-j} \partial y^j}(x', y')\, h_1^{m-j} h_2^j - \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-j} \partial y^j}(x, y)\, h_1^{m-j} h_2^j \right| \\
&\le \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \left| \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-j} \partial y^j}(x', y') - \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-j} \partial y^j}(x, y) \right| |h_1|^{m-j} |h_2|^j \\
&\le \delta(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} |h_1|^{m-j} |h_2|^j \\
&= \delta(\mathbf{x}', \mathbf{x})\, (|h_1| + |h_2|)^m \qquad \textit{(Διώνυμο του Νεύτωνα)} \\
&\le 2^{m/2} \delta(\mathbf{x}', \mathbf{x})\, \|(h_1, h_2)\|^m
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει απο την *ανισότητα Cauchy–Schwarz*:

$$|h_1| + |h_2| = (1,1) \cdot (|h_1|, |h_2|) \le \|(1,1)\| \cdot \|(|h_1|, |h_2|)\| = 2^{1/2}\, \|(h_1, h_2)\|$$

□

Αποδειξη του Θεωρηματος 8.8. Έστω $m = 1$. Τότε $f \in C^1(A)$ και άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{a}$. Από τον Χαρακτηρισμό της παραγωγισιμότητας της f στο $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ (Πόρισμα 5.5) έχουμε

$$\lim_{(x,y) \to (a_1, a_2)} \frac{f(x,y) - f(a_1, a_2) - f_x(a_1, a_2)(x - a_1) - f_y(a_1, a_2)(y - a_2)}{\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2}} = 0 \tag{8.28}$$

Επειδή $T_1(x, y) = f(a_1, a_2) + f_x(\xi_1, \xi_2)(x - a_1) + f_y(\xi_1, x_2)(y - a_2)$ έχουμε

$$\lim_{(x,y) \to (a_1, a_2)} \frac{f(x,y) - T_1(x,y)}{\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2}} = 0$$

Υποθέτουμε για την συνέχεια ότι $m \ge 2$. Έστω $(x, y) \in A$ αρκετά κοντά στο $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ ώστε το ευθ. τμήμα με άκρα τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{a}$ να περιέχεται στο A. Απο τον Τύπο Taylor (για "$m = m - 1$") έχουμε ότι υπάρχει $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ και $\mathbf{x} = (x, y)$ τέτοιο ώστε

$$f(x, y) = T_{m-1}(x, y) + \frac{1}{m!} \left[(x - a_1) \frac{\partial f}{\partial x} + (x - a_2) \frac{\partial f}{\partial y} \right]^{(m)} (\xi_1, \xi_2).$$

Από τον Ορισμό του πολυωνύμου Taylor παρατηρούμε ότι

$$T_{m-1}(x, y) = T_m(x, y) - \frac{1}{m!} \left[(x - a_1) \frac{\partial f}{\partial x} + (x - a_2) \frac{\partial f}{\partial y} \right]^{(m)} (x, y).$$

Θέτουμε $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ με $h_1 = x - a_1$ και $h_2 = y - a_2$. Απο τα παραπάνω και χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του Λήμματος 8.9 συμπεραίνουμε ότι

$$f(x, y) = T_m(x, y) + \frac{1}{m!} \Delta(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$$

Άρα

$$\left| \frac{f(x,y) - T_m(x,y)}{((x-a_1)^2 + (y-a_2)^2)^{m/2}} \right| = \frac{1}{m!} \frac{|\Delta(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})|}{\|(h_1, h_2)\|^m} \overset{(8.27)}{\le} \frac{2^{m/2}}{m!} \delta(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \tag{8.29}$$

όπου (εξίσωση (8.25)),

$$\delta(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = \max\left\{\left|\frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(\xi_1, \xi_2) - \frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(x, y)\right| : 0 \leq j \leq m\right\}$$

Απο την συνέχεια των μερικών παραγώγων και επειδή το $\boldsymbol{\xi}$ ανήκει στο $[\mathbf{a}, \mathbf{x}]$ βλέπουμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \delta(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = 0$$

οπότε απο την (8.29) προκύπτει ότι

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{f(x,y) - T_m(x,y)}{\left((x-a_1)^2 + (y-a_2)^2\right)^{m/2}} = 0.$$

□

Παραδειγμα 8.3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = e^{x+y}$. Βρίσκοντας πρώτα τα πολυώνυμα Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0, 0)$ υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y} - 1 - x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

και

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y} - 1 - x - y - xy}{x^2 + y^2}.$$

Λύση: Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι όλες οι μερικές παράγωγοι της f οποιασδήποτε τάξης ταυτίζονται με την f και συνεπώς όλες οι μερικές παράγωγοι της f στο $(0, 0)$ οποιασδήποτε τάξης είναι ίσες με το $e^0 = 1$. Συνεπώς τα πολυώνυμα Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0, 0)$ είναι αντίστοιχα τα

$$T_1(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y = 1 + x + y$$

και

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y \\ &\quad + \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2\right] \\ &= 1 + x + y + \frac{1}{2!}\left[x^2 + 2xy + y^2\right]. \end{aligned}$$

Άρα

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - T_1(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y} - 1 - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Επίσης

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - T_2(x,y)}{x^2+y^2} = 0$$

δηλαδή

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y} - 1 - x - y - \frac{1}{2!}\left[x^2 + 2xy + y^2\right]}{x^2+y^2} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{e^{x+y} - 1 - x - y - xy}{x^2+y^2} - \frac{1}{2}\right] = 0$$

που σημαίνει ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y}-1-x-y-xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}.$$

Παραδειγμα 8.4. Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, C^2 συνάρτηση και έστω

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2} = \ell\in\mathbb{R}$$

Δείξτε τα εξής:

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ και $f(0,0)=0$.

(2) Αν $T_1(x,y)$ το πολυώνυμο Taylor της f πρώτης τάξης με κέντρο το $(0,0)$ τότε $T_1(x,y)=0$.

(2) Αν $T_2(x,y)$ το πολυώνυμο Taylor της f δεύτερης τάξης με κέντρο το $(0,0)$ τότε $T_2(x,y)=\ell(x^2+y^2)$.

Αποδειξη. (1) Έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}\cdot\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\right)\\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}\cdot\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2} = \ell\cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Επίσης,

$$f(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}\cdot(x^2+y^2)\right) = \ell\cdot 0 = 0$$

(2) Έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-0\cdot x-0\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

και συνεπώς $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ (δείτε Πρόταση 5.4). Άρα $T_1(x,y)=f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y=0$.

(3) Έχουμε

$$\begin{aligned}
T_2(x,y) &= T_1(x,y)+\frac{1}{2}\left(f_{xx}(0,0)x^2+2f_{xy}(0,0)xy+f_{yy}(0,0)y^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(f_{xx}(0,0)x^2+2f_{xy}(0,0)xy+f_{yy}(0,0)y^2\right)
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$T_2(x,0)=\frac{1}{2}f_{xx}(0,0)x^2 \text{ και } T_2(0,y)=\frac{1}{2}f_{yy}(0,0)y^2$$

Από το Θεώρημα Taylor έχουμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-T_2(x,y)}{x^2+y^2} = 0 \tag{8.30}$$

Άρα

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-T_2(x,0)}{x^2}=0 \text{ και } \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-T_2(0,y)}{y^2}=0$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)}{x^2}=\frac{1}{2}f_{xx}(0,0) \text{ και } \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)}{y^2}=\frac{1}{2}f_{yy}(0,0) \tag{8.31}$$

Επειδή από υπόθεση,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}=\ell \tag{8.32}$$

έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)}{x^2}=\ell \quad \text{και} \quad \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)}{y^2}=\ell$$

και άρα από την (8.31),

$$f_{xx}(0,0)=f_{yy}(0,0)=2\ell$$

Άρα

$$T_2(x,y)=\ell(x^2+y^2)+f_{xy}(0,0)xy \tag{8.33}$$

Μένει να δειχθεί ότι $f_{xy}(0,0)=0$. Πράγματι, από τις (8.30), (8.32), και (8.33) έχουμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{xy}(0,0)\frac{xy}{x^2+y^2}=0$$

Άρα αν $f_{xy}(0,0)\neq 0$, θα έπρεπε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=0$$

που είναι άτοπο, αφού, όπως έχουμε δεί, το όριο αυτό δεν υπάρχει. $\square$

Κεφάλαιο 9

Τοπικά ακρότατα πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε κριτήρια για τοπικά ακρότατα συναρτήσεων δύο μεταβλητών με συνεχείς μερικές παραγώγους εως και δεύτερης τάξης.

1. Βασικές έννοιες

1.1. Αρχίζουμε με τον εξής γενικό ορισμό.

Ορισμος 9.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{a} \in A$.*

(1) Λέμε ότι το $\mathbf{a}$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{a})$. Αν ειδικότερα $f(\mathbf{a}) > f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{a})$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ τότε το $\mathbf{a}$ θα καλείται σημείο αυστηρού τοπικού μεγίστου. Το $\mathbf{a}$ θα καλείται σημείο ολικού μεγίστου της f αν $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A$. Ειδικότερα αν $f(\mathbf{a}) > f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ το $\mathbf{a}$ θα καλείται σημείο αυστηρού ολικού μεγίστου.

(2) Λέμε ότι το $\mathbf{a}$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{a})$. Αν ειδικότερα $f(\mathbf{a}) < f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{a})$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ τότε το $\mathbf{a}$ θα καλείται σημείο αυστηρού τοπικού ελαχίστου. Το $\mathbf{a}$ θα καλείται σημείο ολικού ελαχίστου της f αν $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A$. Ειδικότερα αν $f(\mathbf{a}) < f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ το $\mathbf{a}$ θα καλείται σημείο αυστηρού ολικού ελαχίστου.

(3) Λέμε ότι το $\mathbf{a}$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f αν το $\mathbf{a}$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή τοπικού ελαχίστου για την f. Αντίστοιχα ορίζονται οι έννοιες του σημείου αυστηρού τοπικού ακροτάτου και ολικού τοπικού ακροτάτου.

Παρατηρηση 9.1. Είναι εύκολο να δούμε ότι ένα σημείο $\mathbf{a} \in A$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f αν και μόνο αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν σημεία $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ τέτοια ώστε

$$\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}\| < \delta,\ \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}\| < \delta \text{ και } f(\mathbf{x}_1) < f(\mathbf{a}) < f(\mathbf{x}_2)$$

1.2. Ένα απο τα πλέον κλασικά θεωρήματα σχετικά με τα ακρότατα για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής είναι ότι κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Η ιδιότητα αυτή γενικεύεται για συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών ως εξής.

Θεωρημα 9.2. *Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό και φραγμένο και $f : K \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο K, δηλαδή υπάρχουν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ με $f(\mathbf{x}_1) = \min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in K\}$ και $f(\mathbf{x}_2) = \max\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in K\}$.*

1.3. Στην περίπτωση όπου η f έχει μερικές παραγώγους πρώτης τάξης έχουμε τους εξής ορισμούς.

Ορισμος 9.3. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f : A \to \mathbb{R}$ με μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Ένα σημείο $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$ καλείται κρίσιμο (ή στάσιμο) σημείο της f αν $f_x(\mathbf{a}) = f_y(\mathbf{a}) = 0$.*

Παρατηρηση 9.2. Αν η f είναι παραγωγίσιμη τότε ο τύπος του εφαπτόμενου επιπέδου της f στο $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ είναι

$$z = f(a_1, a_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)(y - a_2)$$

Συνεπώς, αν το $\mathbf{a}$ είναι κρίσιμο σημείο της f τότε ο τύπος του εφαπτόμενου επιπέδου της f στο $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ γίνεται $z = f(a_1, a_2)$ και άρα το εφαπτόμενο επίπεδο της f στο $\mathbf{a}$ είναι παράλληλο προς το xy-επίπεδο.

Προταση 9.4. *(Σχέση τοπικών ακροτάτων και κρίσιμων σημείων) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f : A \to \mathbb{R}$ με μερικές παραγώγους πρώτης τάξης.. Τότε κάθε σημείο τοπικού ακροτάτου της f είναι και κρίσιμο σημείο της f.*

Αποδειξη. Έστω $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ σημείο τοπικού ακροτάτου της f. Θυμίζουμε ότι

$$\begin{aligned} f_x(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(a_1, a_2) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{a})}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = F'(0) \end{aligned} \tag{9.1}$$

όπου $F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_1)$, με $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ για κατάλληλα μικρό $\epsilon > 0$ ώστε $\mathbf{a} + t\mathbf{e}_1 \in A$. Αφού $F(0) = f(\mathbf{a})$ και το $\mathbf{a}$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f έπεται ότι το $t_0 = 0$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της F. Άρα απο την γνωστή πρόταση του Fermat για τοπικά ακρότατα πραγματικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής θα πρέπει $F'(0) = 0$ που λόγω της (9.1) σημαίνει ότι $f_x(\mathbf{a}) = 0$. Ανάλογα δείχνουμε ότι $f_y(\mathbf{a}) = 0$. $\square$

Παρατηρηση 9.3. Όπως συμβαίνει και στις πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής, το αντίστροφο της Πρότασης 9.4 δεν ισχύει. Πχ. είναι εύκολο να δούμε ότι το $(0, 0)$ είναι κρίσιμο σημείο της αν $f(x, y) = x^3 + y^3$ αλλά δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου.

Ορισμος 9.5. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f : A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση. Ένα κρίσιμο σημείο της f που δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου καλείται σαγματικό σημείο (ή σημείο σέλας) της f.*

Παρατηρηση 9.4. Στην περίπτωση όπου η f είναι παραγωγίσιμη, από τις Παρατηρήσεις 9.1 και 9.2, συμπεραίνουμε ότι ένα σημείο $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ είναι σαγματικό σημείο της f αν και μόνο αν το εφαπτόμενο επίπεδο της f στο $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ (το οποίο όπως είδαμε είναι παράλληλο προς το xy-επίπεδο, λόγω του ότι το (a_1, a_2) είναι κρίσιμο σημείο της f) *δεν αφήνει το γράφημα της f απο την μία μεριά του.* Γενικά το γράφημα της $f(x, y)$ γύρω απο ένα σαγματικό σημείο μοιάζει με την επιφάνεια μιας σέλας εξ ου και το όνομα. Τα σαγματικά σημεία αντιστοιχούν στα σημεία *καμπής* των συναρτήσεων μιας μεταβλητής.

2. Το Κριτήριο της Δεύτερης Παραγώγου για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής

ΘΕΩΡΗΜΑ 9.6. *(Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής) Έστω $f : I \to \mathbb{R}$, I ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έστω $a \in I$ κρίσιμο σημείο της f (δηλ. $f'(a) = 0$) και τέτοιο ώστε η $f''(a)$ υπάρχει.*

(1) Αν $f''(a) > 0$ τότε η f έχει στο a αυστηρό τοπικό ελάχιστο.

(2) Αν $f''(a) < 0$ τότε η f έχει στο a αυστηρό τοπικό μέγιστο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (1) Έστω $f''(a) > 0$. Επειδή το a είναι κρίσιμο σημείο έχουμε $f'(a) = 0$. Έχουμε

$$f''(a) = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{x - a} > 0$$

Άρα μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε

$$x \in I, \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \frac{f'(x)}{x - a} > 0$$

Άρα

$$x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f'(x) < 0 \text{ και } x \in I \cap (a, a + \delta) \Rightarrow f'(x) > 0$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(a-\delta, a]$ και γνησίως αύξουσα στο $[a, a+\delta)$, με άλλα λόγια το a είναι σημείο αυστηρού τοπικού ελαχίστου.

(2) Προκύπτει απο το (1) θέτοντας $g = -f$. □

Κλασσικά παραδείγματα που επιβεβαιώνουν το παραπάνω κριτήριο είναι οι συνάρτήσεις $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2$. Πράγματι, η f έχει ολικό ελάχιστο στο 0 και $f''(0) = 2 > 0$, η g έχει ολικό μέγιστο στο 0 και $g''(0) = -2 < 0$. Αν $f''(x_0) = 0$ τότε το παραπάνω κριτήριο δεν αποφαίνεται. Πχ. η $f(x) = x^3$ δεν έχει τοπικά ακρότατα (ως γνησίως αύξουσα) ενώ η $f(x) = x^4$ έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$ και για τις δύο συναρτήσεις έχουμε $h''(0) = \sigma''(0) = 0$.

3. Τετραγωνικές μορφές στον $\mathbb{R}^2$

Για να επεκτείνουμε το Θεώρημα 9.6 για συναρτήσεις δύο μεταβλητών θα μελετήσουμε πρώτα τις πιο απλές μορφές συναρτήσεων δύο μεταβλητών που είναι τα ομογενή πολυώνυμα δύο μεταβλητών. Οι συναρτήσεις αυτές είναι γνωστές από την Γραμμική Άλγεβρα και καλούνται τετραγωνικές μορφές.

ΟΡΙΣΜΟΣ 9.7. *Μια συνάρτηση $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ καλείται τετραγωνική αν είναι της μορφής*

$$Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Η Q γράφεται και υπό την μορφή γινομένου πινάκων:

$$Q(x_1, x_2) = [x_1 \;\; x_2] \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{9.2}$$

Με άλλα λόγια αν θέσουμε

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

τότε το $Q(x_1, x_2)$ ισούται με το (συνήθες) εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ με το διάνυσμα $A\mathbf{x} = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (ax_1 + bx_2, bx_1 + cx_2)$. Έχουμε συνεπώς

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} \tag{9.3}$$

για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Γενικά η μελέτη των τετραγωνικών μορφών γίνεται μέσω των ιδιοτιμών του πίνακα που τις ορίζει. Εδώ, λόγω του ότι έχουμε δύο μόνο μεταβλητές, θα παρουσιάσουμε μια πιο στοιχειώδη προσέγγιση.

Παρατηρούμε εύκολα ότι

$$Q(0,0) = 0$$

Επίσης για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$Q(tx_1, tx_2) = t^2 Q(x_1, x_2) \tag{9.4}$$

για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Η σχέση (9.4) συνεπάγεται ότι αν $Q(x_1, x_2) \neq 0$ τότε η Q διατηρεί το ίδιο πρόσημο σε κάθε μη μηδενικό σημείο της ευθείας που διέρχεται από το $(0,0)$ και το σημείο (x_1, x_2). Επίσης, θέτοντας $t > 1$ και $t < 1$ βλέπουμε ότι ένα τέτοιο σημείο δεν μπορεί να είναι τοπικό ακρότατο της Q. Άρα, έχουμε την εξής πρόταση.

Πρόταση 9.8. *Έστω $Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ μια τετραγωνική μορφή του $\mathbb{R}^2$ και έστω (x_1, x_2) τοπικό ακρότατο της Q. Τότε $Q(x_1, x_2) = 0$.*

Υπενθυμίζουμε τώρα έναν γνωστό ορισμό από την Γραμμική Άλγεβρα.

Ορισμός 9.9. *Έστω $Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ μια τετραγωνική μορφή του $\mathbb{R}^2$.*

(1) *Η Q καλείται θετικά ορισμένη αν $Q(x_1, x_2) > 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \neq (0,0)$.*
(2) *Η Q καλείται αρνητικά ορισμένη αν $Q(x_1, x_2) < 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \neq (0,0)$.*

Παρατήρηση 9.5. Επειδή $Q(0,0) = 0$, παρατηρείστε ότι μια τετραγωνική μορφή Q είναι θετικά (αντ. αρνητικά) ορισμένη αν και μόνο αν το $(0,0)$ είναι σημείο αυστηρού ολικού ελαχίστου (αντ. μεγίστου) της Q.

Πρόταση 9.10. *Έστω $Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ μια τετραγωνική μορφή του $\mathbb{R}^2$. Έστω*

$$D = det \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = ac - b^2$$

(1) *Η Q είναι θετικά ορισμένη αν και μόνο αν $a > 0$ και $D > 0$.*
(2) *Η Q είναι αρνητικά ορισμένη αν και μόνο αν $a < 0$ και $D > 0$.*

Απόδειξη. (1) Έστω ότι η Q είναι θετικά ορισμένη. Τότε $Q(1,0) = a > 0$. Επίσης, είναι εύκολο να δούμε ότι μία τετραγωνική μορφή $Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ με $a \neq 0$ γράφεται στη μορφή

$$Q(x_1, x_2) = a\left[\left(x_1 + \frac{b}{a}\,x_2\right)^2 + \frac{D}{a^2}\,x_2^2\right], \tag{9.5}$$

όπου

$$D = \det\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = ac - b^2$$

Αφού η Q είναι θετική θα πρέπει $Q\left(-\frac{b}{a}, 1\right) = \frac{D}{a^2} > 0$ και άρα $D > 0$. Αντίστροφα τώρα αν $a > 0$ και $D > 0$ τότε από την (9.5) προκύπτει εύκολα ότι $Q(x_1, x_2) > 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, δηλαδή η $Q(x_1, x_2)$ είναι θετικά ορισμένη.

(2) Προκύπτει από το (1) θεωρώντας την $-Q$. $\square$

Από την Πρόταση 9.10 έχουμε ότι αν $D \leq 0$ τότε η Q δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά ορισμένη. Ειδικότερα μπορούμε να δείξουμε την εξής.

Πρόταση 9.11. *Έστω $Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ μια τετραγωνική μορφή του $\mathbb{R}^2$. Έστω*

$$D = det\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = ac - b^2$$

(1) *Αν $D < 0$ τότε υπάρχουν δύο μη μηδενικά σημεία (x_1, x_2) και (x_1', x_2') του $\mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε*

$$Q(tx_1', tx_2') < 0 < Q(tx_1, tx_2)$$

για κάθε $t \neq 0$.

(2) *Αν $D = 0$ τότε υπάρχει σημείο $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ τέτοιο ώστε $Q(tx_1, tx_2) = 0$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. (1) Από την (9.4) αρκεί να βρούμε δύο σημεία στο $\mathbb{R}^2$ όπου η Q παίρνει ετερόσημες τιμές. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις: Αν $a > 0$ τότε από την (9.5) έχουμε ότι $Q\left(-\frac{b}{a}, 1\right) < 0 < Q\,(1, 0)$. Ομοίως αν $a < 0$ τότε $Q\,(1, 0) < 0 < Q\left(-\frac{b}{a}, 1\right)$. Άρα αν $a \neq 0$ και $D < 0$ το συμπέρασμα ισχύει. Με ανάλογο σκεπτικό, το συμπέρασμα ισχύει όταν $c \neq 0$ και $D < 0$. Αν τώρα $a = c = 0$ και $D = -b^2 < 0$ τότε $b \neq 0$ και $Q(x_1, x_2) = 2bx_1x_2$. Άρα $Q(1, 1) \cdot Q(-1, 1) = -4b^2 < 0$ και το συμπέρασμα πάλι ισχύει.

(2) Ομοίως από την (9.4) αρκεί να βρούμε ένα μη μηδενικό σημείο όπου η Q μηδενίζεται. Διακρίνουμε πάλι περιπτώσεις. Αν $a \neq 0$ τότε από την (9.5) έχουμε ότι $Q(x_1, x_2) = a\left(x_1 + \frac{b}{a}\,x_2\right)^2$ και άρα $Q\left(-\frac{b}{a}, 1\right) = 0$. Ανάλογα αποδεικνύεται το ζητούμενο για $c \neq 0$. Αν τώρα $a = c = 0$ έχουμε $D = -b^2 = 0$ και άρα $Q(x_1, x_2) = 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. $\square$

Από τα παραπάνω καταλήγουμε στο εξής σχετικά με τα ακρότατα μιας τετραγωνικής μορφής.

Πορισμα 9.12. *Έστω $Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ μια τετραγωνική μορφή του $\mathbb{R}^2$. Έστω*

$$D = det \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = ac - b^2 \neq 0$$

(1) *Αν $D > 0$ τότε το $(0,0)$ είναι το μοναδικό τοπικό ακρότατο της Q. Ειδικότερα, αν $a > 0$ είναι αυστηρό τοπικό ελάχιστο και αν $a < 0$ είναι αυστηρό τοπικό μέγιστο.*
(2) *Αν $D < 0$ τότε η Q δεν έχει τοπικά ακρότατα. Ειδικότερα το $(0,0)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της Q αλλά είναι σαγματικό σημείο της Q.*

Παρατηρηση 9.6. Στην περίπτωση όπου $D = 0$, το $(0,0)$, από την απόδειξη του (2) της Πρότασης 9.11, έχουμε ότι το $(0,0)$ είναι σημείο ολικού ακροτάτου της Q. Όμως το γεγονός αυτό αποδεικνύεται ότι δεν ισχύει απαραίτητα για τετραγωνικές μορφές περισσοτέρων των δύο μεταβλητών. Το Πόρισμα 9.12 εξακολουθεί να ισχύει και σε αυτή την γενική περίπτωση.

4. Το κριτήριο δεύτερης παραγώγου

Ορισμος 9.13. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f \in C^2(A)$ και $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$. Ο συμμετρικός πίνακας*

$$\begin{bmatrix} f_{xx}(a_1, a_2) & f_{xy}(a_1, a_2) \\ f_{xy}(a_1, a_2) & f_{yy}(a_1, a_2) \end{bmatrix} \tag{9.6}$$

καλείται και *Εσσιανός πίνακας της f στο σημείο $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$*.

Θεωρημα 9.14. *(Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για συναρτήσεις δύο μεταβλητών) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f \in C^2(A)$. Έστω $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$ κρίσιμο σημείο της f (δηλαδή $f_x(a_1, a_2) = f_y(a_1, a_2) = 0$). Έστω*

$$\Delta(a_1, a_2) = f_{xx}(a_1, a_2) f_{yy}(a_1, a_2) - (f_{xy}(a_1, a_2))^2 \tag{9.7}$$

η ορίζουσά του Εσσιανού πίνακα της f στο (a_1, a_2). Υποθέτουμε ότι

$$\Delta(a_1, a_2) \neq 0.$$

Τότε τα επόμενα ισχύουν:

(1) *Αν $f_{xx}(a_1, a_2) > 0$ και $\Delta(a_1, a_2) > 0$ τότε η f έχει αυστηρό τοπικό ελάχιστο στο σημείο $\mathbf{a}$.*
(2) *Αν $f_{xx}(a_1, a_2) < 0$ και $\Delta(a_1, a_2) > 0$ τότε η f έχει αυστηρό τοπικό μέγιστο στο σημείο $\mathbf{a}$.*
(3) *Αν $\Delta(a_1, a_2) < 0$ τότε το $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ είναι σαγματικό σημείο της f.*

Αποδειξη. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f \in C^2(A)$ και $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$ ένα κρίσιμο σημείο της f. Από το Θεώρημα Taylor 8.8 (δείτε και Παρατήρηση 8.3) έχουμε ότι για κάθε $\mathbf{x} = (x, y) \in A$,

$$f(\mathbf{x}) = T_2(\mathbf{x}) + R_2(\mathbf{x}) \quad \text{με} \quad \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} = 0 \tag{9.8}$$

όπου $T_2(\mathbf{x})$ είναι το δεύτερης τάξης πολυώνυμο Taylor της f με κέντρο το $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$. Επειδή $f_x(a_1, a_2) = f_y(a_1, a_2) = 0$, έχουμε

$$T_2(x, y) = f(a_1, a_2) + \frac{1}{2}\left[a(x - a_1)^2 + 2b(x - a_1)(y - a_2) + c(y - a_2)^2\right]$$

όπου $a = f_{xx}(a_1, a_2)$, $b = f_{xy}(a_1, a_2)$ και $c = f_{yy}(a_1, a_2)$. Θέτοντας

$$Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

η (9.8) γράφεται

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}\ Q(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + R_2(\mathbf{x}) \quad \text{με} \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} = 0 \tag{9.9}$$

Απλοποιώντας την κατάσταση ας θεωρήσουμε ότι το σφάλμα $R_2(\mathbf{x})$ είναι μηδέν οπότε απο την (9.9) βλέπουμε ότι αν το $\mathbf{x}$ είναι αρκετά κοντά στο $\mathbf{a}$ τότε

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}Q(\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Τώρα, αν για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ που είναι αρκετά κοντά στο $\mathbf{a}$ είχαμε $Q(\mathbf{x} - \mathbf{a}) > 0$ τότε θα είχαμε και ότι $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) > 0$ και άρα στην περίπτωση αυτή το $\mathbf{a}$ θα ήταν σημείο αυστηρού τοπικού ελαχίστου. Αντίστοιχα, αν $Q(\mathbf{x} - \mathbf{a}) < 0$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ που είναι αρκετά κοντά στο $\mathbf{a}$ τότε το $\mathbf{a}$ θα ήταν σημείο αυστηρού τοπικού μεχίστου. Συνεπώς αν η $Q(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ *διατηρούσε πρόσημο γύρω απο το* $\mathbf{a}$ τότε το $\mathbf{a}$ θα ήταν αυστηρό τοπικό γνήσιο ακρότατο. Απο την άλλη αυτό είναι και αναγκαίο για να είναι το $\mathbf{a}$ αυστηρό τοπικό ακρότατο γιατι αν *οσοδήποτε κοντά στο* $\mathbf{a}$ υπήρχαν και $\mathbf{x}$ με $Q(\mathbf{x} - \mathbf{a}) < 0$ και $\mathbf{x}$ με $Q(\mathbf{x} - \mathbf{a}) > 0$ τότε για τα πρώτα θα είχαμε $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) < 0$ και για τα δεύτερα $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) > 0$ και συνεπώς το $\mathbf{a}$ δεν είναι τοπικό ακρότατο.

Περνούμε τώρα στην γενική περίπτωση όπου το $R_2(\mathbf{x})$ δεν είναι κατανάγκη μηδενικό γύρω από το $\mathbf{a}$.

Πρόταση 9.15. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f \in C^2(A)$ και $\mathbf{a} \in A$ κρίσιμο σημείο της f. Έστω $a = f_{xx}(a_1, a_2)$, $b = f_{xy}(a_1, a_2)$ και $c = f_{yy}(a_1, a_2)$ και έστω*

$$Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

(1) Αν η Q είναι θετικά ορισμένη τότε η f έχει στο $\mathbf{a}$ αυστηρό τοπικό ελάχιστο.

(2) Αν η Q είναι αρνητικά ορισμένη τότε η f έχει στο $\mathbf{a}$ αυστηρό τοπικό μέγιστο.

(3) Αν υπάρχουν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^2$ με $Q(\mathbf{x}_1) < 0$ και $Q(\mathbf{x}_2) > 0$ τότε το $\mathbf{a}$ είναι σαγματικό σημείο της f.

Απόδειξη. Όπως είδαμε στην αρχή της παραγράφου, απο το Θεώρημα Taylor έχουμε

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}Q(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + R_2(\mathbf{x}) \text{ με } \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} = 0$$

για κάθε $\mathbf{x} \in A$. Έστω $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$. Τότε

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) &= \frac{1}{2}Q(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + R_2(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2}Q(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + R_2(\mathbf{x}) \\ &= \left[\frac{1}{2}\frac{Q(\mathbf{x}-\mathbf{a})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2} + \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2}\right]\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2 \\ &\overset{(9.4)}{=} \left[\frac{1}{2}Q\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{a}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}\right) + \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2}\right]\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2 \end{aligned} \tag{9.10}$$

(1) Έστω ότι η Q είναι θετικά ορισμένη, δηλαδή $Q(x_1, x_2) > 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \neq (0,0)$. Τότε [1]

$$m = \min\{Q(\mathbf{y}) : \|\mathbf{y}\| = 1\} > 0 \tag{9.11}$$

Αφού $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2} = 0$, μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow \frac{|R_2(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2} < \frac{m}{2} \tag{9.12}$$

για κάθε $\mathbf{x} \in A$ με $0 < \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < \delta$. Από τις (9.10)–(9.12) προκύπτει ότι $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) > \frac{m}{2}\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2 > 0$, για κάθε $\mathbf{x} \in A$ με $0 < \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < \delta$ και συνεπώς το $\mathbf{a}$ είναι αυστηρό τοπικό ελάχιστο.

(2) Έστω ότι η Q είναι αρνητικά ορισμένη, δηλαδή $Q(x_1, x_2) < 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \neq (0,0)$. Τότε[2]

$$M = \max\{Q(\mathbf{y}) : \|\mathbf{y}\| = 1\} < 0 \tag{9.13}$$

Επειδή $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2} = 0$ μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow \frac{|R_2(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2} < \frac{M}{2} \tag{9.14}$$

Από τις (9.10), (9.13) και (9.14) προκύπτει ότι $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) < \frac{M}{2}\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2 < 0$, για κάθε $\mathbf{x} \in A$ με $0 < \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < \delta$, δηλαδή το $\mathbf{a}$ είναι σημείο αυστηρού τοπικού μεγίστου.

(3) Έστω ότι υπάρχουν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^2$ με $Q(\mathbf{x}_1) < 0$ και $Q(\mathbf{x}_2) > 0$. Επειδή $Q(0,0) = 0$ έχουμε $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|\mathbf{x}_1\| = \|\mathbf{x}_2\| = 1$ (αφού $Q\left(\frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|}\right) \overset{(9.4)}{=} \frac{Q(\mathbf{x}_1)}{\|\mathbf{x}_1\|^2} < 0$ και ομοίως $Q\left(\frac{\mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_2\|}\right) > 0$). Θα δείξουμε ότι το $\mathbf{a}$ δεν είναι τοπικό ακρότατο. Από την Παρατήρηση 9.1 αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν $\mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2' \in B_\delta(\mathbf{a})$ τέτοια ώστε

$$f(\mathbf{x}_1') < f(\mathbf{a}) < f(\mathbf{x}_2')$$

[1]Το m στην (9.11) ορίζεται γιατί η Q λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στην $S_n = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{y}\| = 1\}$, αφού είναι ***συνεχής*** και η S_n είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$

[2]Ομοίως το M ορίζεται καλώς για τους ίδιους λόγους

Έστω ένα οποιοδήποτε $\delta > 0$. Επειδή $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2} = 0$ μπορούμε να επιλέξουμε $0 < \delta_1 < \delta$ τέτοιο ώστε για κάθε $\mathbf{x} \in A$ με $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < \delta_1$ να ισχύει

$$\frac{|R_2(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2} < \frac{1}{2}\min\{|Q(\mathbf{x}_1)|, Q(\mathbf{x}_2)\} \tag{9.15}$$

Θέτουμε

$$\mathbf{x}_1' = \mathbf{a} + \delta_1\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_2' = \mathbf{a} + \delta_1\mathbf{x}_2$$

Τότε $\|\mathbf{x}_1' - \mathbf{a}\| = \|\mathbf{x}_2' - \mathbf{a}\| = \delta_1 < \delta$ και συνεπώς $\mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2' \in B_\delta(\mathbf{a})$. Επίσης, $Q\left(\frac{\mathbf{x}_1'-\mathbf{a}}{\|\mathbf{x}_1'-\mathbf{a}\|}\right) = Q(\mathbf{x}_1)$ και άρα

$$f(\mathbf{x}_1') - f(\mathbf{a}) \overset{(9.10)}{=} \left[\frac{1}{2}Q(\mathbf{x}_1) + \frac{R_2(\mathbf{x}_1')}{\|\mathbf{x}_1'-\mathbf{a}\|^2}\right]\|\mathbf{x}_1'-\mathbf{a}\|^2 \overset{(9.15)}{<} 0$$

και άρα $f(\mathbf{x}_1') < f(\mathbf{a})$. Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $f(\mathbf{x}_2') > f(\mathbf{a})$. □

Από τις Προτάσεις 9.10 και 9.15 προκύπτει άμεσα το Κριτήριο της Δεύτερης Παραγώγου. □

Παρατηρησεις 9.1. (α) Αν $\Delta(a_1, a_2) = 0$ τότε ακολουθώντας την μέθοδο απόδειξης του Θεωρήματος 9.14, δεν μπορούμε να αποφανθούμε γενικά αν το $\mathbf{a}$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου ή όχι (δείτε σχετικά τις Ασκήσεις 9.3, 9.4 παρακάτω). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι υπάρχει ευθεία (Πρόταση 9.11) που διέρχεται από το (a_1, a_2) όπου εκεί η $Q(x-a_1, y-a_2)$ μηδενίζεται, οπότε για τα σημεία (x, y) της ευθείας αυτής, η διαφορά $f(x, y) - T_2(x, y)$ ισούται με το $R_2(x, y)$ που ναι μεν τείνει στο 0 καθώς πλησιάζουμε το (a_1, a_2) αλλά δεν διατηρεί απαραίτητα πρόσημο.

(β) Αν $\Delta(a_1, a_2) \neq 0$ τότε οι τρείς περιπτώσεις (1)-(3) του θεωρήματος είναι όλες οι δυνατές περιπτώσεις που μπορούν να συμβούν. Πράγματι, η εναπομείνουσα περίπτωση $\Delta(a_1, a_2) > 0$ και $f_{xx}(a_1, a_2) = 0$ είναι αδύνατον να συμβαίνει αφού τότε απο τον ορισμό του $\Delta(a_1, a_2)$ (εξίσωση (9.7)) θα είχαμε $f_{xy}^2(a_1, a_2) < 0$ που φυσικά είναι αδύνατον.

(γ) Υπάρχουν κάποιες περιπτώσεις (ειδικά αν η συνάρτηση που μελετούμε έχει πολύ απλό τύπο) όπου μπορούμε εντελώς στοιχειωδώς να βρούμε τα τοπικά ακρότατα απευθείας χωρίς την βοήθεια του κριτηρίου. Πχ. μπορούμε να δούμε εύκολα ότι το $(0, 0)$ είναι το μοναδικό σημείο τοπικού ακροτάτουπου έχει η $f(x, y) = x^2 + y^2$. Πράγματι, για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0, 0)$ και άρα η f έχει στο $(0, 0)$ ολικό ελάχιστο. Αν τώρα υπήρχε και άλλο σημείο τοπικού ακροτάτου τότε θα έπρεπε αυτό να ήταν κρίσιμο σημείο δηλαδή θα ήταν λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x = 0 \\ f_y(x, y) &= 2y = 0 \end{aligned}$$

Αλλά το παραπάνω σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x, y) = (0, 0)$.

5. Παραδείγματα

Δίνουμε εδώ κάποια παραδείγματα για το Θεώρημα 9.14.

Παραδειγμα 9.1. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2 + 3y \\ f_y(x,y) &= 3y^2 + 3x \\ f_{xx}(x,y) &= 6x \\ f_{yy}(x,y) &= 6y \\ f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 3 \end{aligned}$$

και άρα $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Υπολογίζουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2 + 3y = 0 \\ f_y(x,y) &= 3y^2 + 3x = 0 \end{aligned}$$

Η πρώτη εξίσωση γράφεται $y = -x^2$ και άρα αντικαθιστώντας στην δεύτερη παίρνουμε

$$x^4 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^3+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1$$

Άρα έχουμε δύο πιθανά τοπικά ακρότατα τα $(0,0)$ και $(-1,-1)$. Τώρα για κάθε (x,y) είναι

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - \left(f_{xy}(x,y)\right)^2 = 36xy - 9$$

Έχουμε $\Delta(0,0) = -9 < 0$ και άρα $(0,0)$ είναι σαγματικό. Επίσης $\Delta(-1,-1) = 36 - 9 > 0$ και $f_{xx}(-1,-1) = -6 < 0$. Άρα το $(-1,-1)$ είναι αυστηρό τοπικό μέγιστο.

Παραδειγμα 9.2. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2 + 3y^2 - 6x \\ f_y(x,y) &= 6xy - 6y \\ f_{xx}(x,y) &= 6x - 6 \\ f_{yy}(x,y) &= 6x - 6 \\ f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 6y \end{aligned}$$

και άρα $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Υπολογίζουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0 \\ f_y(x,y) &= 6xy - 6y = 0 \end{aligned}$$

Η δεύτερη εξίσωση γράφεται $6y(x-1)=0$ και άρα

$$y=0 \text{ ή } x=1 \tag{9.16}$$

Για $y=0$ από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε $3x^2-6x=0 \Leftrightarrow 3x(x-2)=0$ και άρα $x=0$ ή $x=2$. Συνεπώς έχουμε τα σημεία

$$(0,0) \quad \text{και} \quad (2,0).$$

Αντίστοιχα για $x=1$ η πρώτη εξίσωση δίνει $3+3y^2-6=0 \Leftrightarrow y^2-1=0$ και άρα $y=1$ ή $y=-1$. Οπότε έχουμε και τα σημεία

$$(1,1) \quad \text{και} \quad (1,-1).$$

Συνολικά δηλαδή έχουμε τέσσερα πιθανά τοπικά ακρότατα , τα $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$ και $(1,-1)$. Τώρα για κάθε (x,y) είναι

$$\Delta(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-(f_{xy}(x,y))^2=(6x-6)\cdot(6x-6)-36y^2$$

Έχουμε

(1) $\Delta(0,0)=36>0$, $f_{xx}(0,0)=-6<0$ και άρα το $(0,0)$ είναι αυστηρό τοπικό μέγιστο.

(2) $\Delta(2,0)=36>0$, $f_{xx}(2,0)=6>0$ και άρα το $(0,2)$ είναι αυστηρό τοπικό ελάχιστο.

(3) $\Delta(1,1)=-36<0$ και άρα το $(1,1)$ είναι σαγματικό.

(4) $\Delta(1,-1)=-36<0$ και άρα το $(1,-1)$ είναι σαγματικό.

Παράδειγμα 9.3. Βρείτε (αν υπάρχουν) τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y)=x^4+y^4-(x-y)^4$.

Λύση: Έχουμε

$$f_x(x,y)=4x^3-4(x-y)^3, \quad f_y(x,y)=4y^3+4(x-y)^3,$$
$$f_{xx}(x,y)=12x^2-12(x-y)^2,\ f_{yy}(x,y)=12y^2-12(x-y)^2$$

και

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=12(x-y)^2$$

και άρα $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$f_x(x,y)=4x^3-4(x-y)^3=0$$
$$f_y(x,y)=4y^3+4(x-y)^3=0$$

Με πρόσθεση των εξισώσεων, παίρνουμε ότι $x^3+y^3=0$ ή ισοδύναμα

$$y=-x \tag{9.17}$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση έχουμε

$$4x^3-4(x-y)^3=4x^3-4(2x)^3=4x^3-32x^3=-28x^3=0$$

και άρα $x=0$. Οπότε από την (9.17) παίρνουμε ότι το μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι το $(0,0)$. Έχουμε $f_{xx}(0,0)=f_{yy}(0,0)=f_{xy}(0,0)=0$ και άρα $\Delta(0,0)=0$. Συνεπώς απο το κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το αν το $(0,0)$ είναι ή όχι τοπικό ακρότατο. Όμως παρατηρούμε ότι

(1) $f(0,0) = 0$,

(2) για κάθε σημείο της ευθείας $y = x$ διάφορο του $(0,0)$, είναι $f(x,y) = f(x,x) = 2x^4 > 0$ και

(3) για κάθε σημείο της ευθείας $y = -x$ διάφορο του $(0,0)$, είναι $f(x,y) = f(x,-x) = 2x^4 - 16x^4 < 0$.

Άρα σε *κάθε περιοχή του* $(0,0)$ μπορούμε να βρούμε δύο σημεία τέτοια ώστε η τιμή της f στο ένα από αυτά να είναι αυστηρά μικρότερη του $f(0,0)$ ενώ η τιμή στο άλλο να είναι αυστηρά μεγαλύτερη του $f(0,0)$. Αυτό σημαίνει ότι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f είναι σαγματικό σημείο. Άρα η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

Παράδειγμα 9.4. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

Λύση: Η $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4x^3 - 4(x-y) = 4x^3 - 4x + 4y \\ f_y(x,y) &= 4y^3 + 4(x-y) = 4y^3 + 4x - 4y \\ f_{xx}(x,y) &= 12x^2 - 4 \\ f_{yy}(x,y) &= 12y^2 - 4 \\ f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 4 \end{aligned}$$

όλες συνεχείς. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία λύνοντας το σύστημα

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4x^3 - 4(x-y) = 0 \\ f_y(x,y) &= 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{aligned}$$

με πρόσθεση κατά μέλη δίνει ότι $x^3 = -y^3$ ισοδύναμα

$$y = -x$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση βρίσκουμε ότι $4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-2) = 0$ και άρα

$$x = 0 \text{ ή } x = \sqrt{2} \text{ ή } x = -\sqrt{2}$$

Συνεπώς τα πιθανά τοπικά ακρότατα είναι τα σημεία

$$(0,0), \quad (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \quad \text{και} \quad (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Έχουμε

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y) f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2 = (12x^2 - 4) \cdot (12y^2 - 4) - 16$$

(1) $\Delta(0,0) = 0$ και άρα δεν μπορούμε να αποφανθούμε από το Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου για το αν το $(0,0)$ είναι ή όχι τοπικό ακρότατο. Όμως παρατηρούμε ότι

(α) $f(0,0) = 0$,

(β) για κάθε $0 < x \leq 1$, είναι $f(x,0) = x^4 - 2x^2 < 0$ και (γ) για κάθε $x = y \neq 0$ είναι $f(x, y) = f(x, x) = 2x^4 > 0$.

Τα παραπάνω δείχνουν ότι *σε κάθε περιοχή του* $(0, 0)$ μπορούμε να βρούμε δύο σημεία που η τιμή της f στο ένα από αυτά να είναι μικρότερη του $f(0, 0)$ ενώ η τιμή στο άλλο να είναι μεγαλύτερη του $f(0, 0)$, πράγμα που σημαίνει ότι το $(0, 0)$ δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της F.

(2) Όπως εύκολα βλέπουμε

$$\Delta(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \Delta(\sqrt{2}, \sqrt{2}) > 0$$

και $f_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) > 0$ οπότε στα σημεία $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ και $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ η f έχει αυστηρό τοπικό ελάχιστο. Άρα η f έχει ακριβώς δύο τοπικά ακρότατα που είναι και τα δύο αυστηρά τοπικά ελάχιστα.

Κεφάλαιο 10

Το Θεώρημα της Πεπλεγμένης Συνάρτησης

1. Το Θεώρημα της Πεπλεγμένης Συνάρτησης για δύο μεταβλητές

Στην παράγραφο αυτή θα εξετασθεί το πρόβλημα της επίλυσης μιας εξίσωσης δύο μεταβλητών

$$F(x,y)=0 \tag{10.1}$$

ως προς την μια από τις μεταβλητές συναρτήσει της άλλης. Θέλουμε δηλαδή να δώσουμε κάποιες συνθήκες ώστε δεδομένης της εξίσωσης (10.1) να υπάρχει μία λύση της μορφής

$$y=f(x) \text{ ή } x=g(y) \tag{10.2}$$

Το πρόβλημα αυτό έχει και την εξής γεωμετρική ερμηνεία: Πότε το σύνολο των σημείων $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ που ικανοποιούν την εξίσωση $F(x,y)=0$, αποτελεί το ίχνος μιας "φυσιολογικής" καμπύλης του $\mathbb{R}^2$, δηλαδή είναι το γράφημα μιας συνάρτησης από ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$;

Παραδειγμα 10.1. Αν η $F(x,y)=0$ είναι η εξίσωση

$$F(x,y)=ax+by+c=0 \tag{10.3}$$

τότε αν $b\neq 0$, η (10.3) λύνεται ως προς την μεταβλητή y,

$$y=f(x)=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b} \tag{10.4}$$

και συνεπώς όλα τα σημεία $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ που ικανοποιούν την (10.3) αποτελούν το γράφημα της συνάρτησης (10.4) δηλαδή μια ευθεία του $\mathbb{R}^2$.

Παραδειγμα 10.2. Από την άλλη μεριά αν έχουμε την εξίσωση

$$F(x,y)=x^2+y^2-1=0 \tag{10.5}$$

βλέπουμε ότι για κάθε $x\in(-1,1)$ υπάρχουν δύο διαφορετικά y_1,y_2 με $F(x,y_1)=F(x,y_2)=0$ και αντίστοιχα για κάθε $y\in(-1,1)$ υπάρχουν δύο διαφορετικά x_1,x_2 με $F(x_1,y)=F(x_2,y)=0$. Συνεπώς η εξίσωση $x^2+y^2-1=0$ δεν μπορεί να επιλυθεί πλήρως ως προς καμία απο τις μεταβλητές x, y. Όμως αν περιορίσουμε τα (x,y) με $F(x,y)=0$ που θεωρούμε τότε μπορούμε να επιλύσουμε την $F(x,y)=0$ ως προς μια μεταβλητή συναρτήσει της άλλης. Πχ. παρατηρούμε ότι ισχύει η εξής ισοδυναμία

$$F(x,y)=0 \text{ και } y\geq 0 \Leftrightarrow y=\sqrt{1-x^2}, x\in[-1,1]$$

Ομοίως

$$F(x,y)=0 \text{ και } x\leq 0 \Leftrightarrow x=-\sqrt{1-y^2}, y\in[-1,1]$$

Γενικά μπορούμε να δούμε ότι για κάθε (x_0, y_0) με $F(x_0, y_0) = 0$ υπάρχει πάντα ένα διάστημα I_0 που έχει το x_0 στο εσωτερικό του και ένα διάστημα J_0 που έχει το y_0 στο εσωτερικό του όπου μέσα στο ορθογώνιο $I_0 \times J_0 = \{(x, y) : x \in I_0,\ y \in J_0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ μπορούμε να επιλύσουμε την $F(x, y) = 0$ είτε ως προς y είτε ως προς x. Πχ. Στο σημείο $(0, 1)$ η $F(x, y) = 0$ επιλύεται ως προς y ($y = \sqrt{1 - x^2}$) όταν περιοριστούμε στα (x, y) με $x \in [-1, 1]$ και $y \geq 0$.

Στο δεύτερο παράδειγμα λύνουμε την εξίσωση $F(x, y) = 0$ *τοπικά* δηλαδή γύρω από κάθε σημείο (x_0, y_0) με $F(x_0, y_0) = 0$. Πιο συγκεκριμένα, αν (x_0, y_0) μια λύση της $F(x, y) = 0$ τότε επιλέγοντας κατάλληλα ανοικτά διαστήματα X και Y που περιέχουν τα x_0 και y_0 αντίστοιχα, μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση $f : X \to Y$ (ή μια συνάρτηση $g : Y \to X$) τέτοια ώστε $y = f(x)$ (αντίστοιχα $x = g(y)$) για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$. Το Θεώρημα της Πεπλεγμένης συνάρτησης μας δίνει μια ικανή συνθήκη ώστε να μπορεί να συμβαίνει αυτό.

ΘΕΩΡΗΜΑ 10.1. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $F \in C^1(A)$. Έστω*

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$$

Αν $(x_0, y_0) \in C$ τέτοιο ώστε

$$F_y(x_0, y_0) \neq 0 \tag{10.6}$$

τότε υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα $Y = (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$ με κέντρο το y_0, ένα ανοικτό διάστημα $X = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ με κέντρο το x_0 και μια μοναδική C^1 συνάρτηση $f : X \to Y$ τέτοια ώστε

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x) \tag{10.7}$$

για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$. Ισοδύναμα,

$$\{(x, y) \in C : x \in X \text{ και } y \in Y\} = \{(x, f(x)) : x \in X\} \tag{10.8}$$

και άρα το σύνολο C σε μια περιοχή του σημείου (x_0, y_0) είναι το γράφημα μιας C^1 συνάρτησης μιας μεταβλητής.

Επιπλέον,

$$f'(x) = -\frac{F_x\,(x, f(x))}{F_y\,(x, f(x))} \tag{10.9}$$

για κάθε $x \in X$. Ειδικότερα,

$$f'(x_0) = -\frac{F_x\,(x_0, y_0)}{F_y\,(x_0, y_0)} \tag{10.10}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απόδειξη χωρίζεται σε τρία βήματα. Πρώτα προσδιορίζουμε τα ανοικτά διαστήματα κατά σειρά πρώτα το Y και ύστερα το X, έτσι ώστε για κάθε $x \in X$ να υπάρχει μοναδικό $y \in Y$ τέτοιο ώστε $F(x, y) = 0$ και ταυτόχρονα αν $y', y'' \in Y$ τότε

$$y' < y < y'' \Leftrightarrow F(x, y') < 0 < F(x, y'')$$

Άρα αν $f : X \to Y$ είναι η συνάρτηση που στέλνει κάθε $x \in X$ στο μοναδικό $y \in Y$ με $F(x, y) = 0$ τότε θα έχουμε ότι η γραφική παράσταση C της f θα χωρίζει το ορθογώνιο $X \times Y$ σε δύο μέρη έτσι ώστε η $F(x, y)$ να είναι γνήσια αρνητική κάτω από την C, μηδέν επί της C και γνήσια θετική πάνω απο την C. Στο δεύτερο βήμα δείχνουμε ότι αυτή η συνάρτηση είναι συνεχής και στο τρίτο και τελευταίο βήμα, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής δείχνουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο που δίνεται από τον τύπο (10.9).

Βήμα 1. Έστω $F_y(x_0, y_0) > 0$ (αν $F_y(x_0, y_0) < 0$ η απόδειξη προχωρά ανάλογα). Επειδή η $F_y : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $F_y(x, y) > 0$ για κάθε $(x, y) \in B_\delta(x_0, y_0)$. Θέτουμε

$$\delta_2 = \delta/2,\ y_0^- = y_0 - \delta_2,\ y_0^+ = y_0 + \delta_2,\ \text{και } Y = (y_0^-, y_0^+).$$

Περιορίζουμε τώρα την F στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα (x_0, y_0^-) και (x_0, y_0^+), δηλαδή θεωρούμε την συνάρτηση $g_0 : Y \to \mathbb{R}$ με $g_0(y) = F(x_0, y)$ για κάθε $y \in Y$. Είναι εύκολο να δούμε ότι $g_0'(y) = F_y(x_0, y)$ και συνεπώς $g_0'(y) > 0$ για κάθε $y \in Y$. Αυτό σημαίνει ότι η g_0 είναι μια γνησίως αύξουσα συνεχής συνάρτηση. Επειδή $g_0(y_0) = F(x_0, y_0) = 0$ θα πρέπει $g_0(y) < 0 < g_0(y')$ για κάθε $y < y_0 < y'$ στο Y. Ειδικότερα,

$$F(x_0, y_0^-) < 0 < F(x_0, y_0^+)$$

Επειδή η F είναι συνεχής στα (x_0, y_0^-) και (x_0, y_0^+) θα υπάρχει ένα $\delta' > 0$ τέτοιο ώστε

$$F(x, y) < 0 \text{ αν } (x, y) \in B_{\delta'}(x_0, y_0^-) \text{ και } F(x, y) > 0 \text{ αν } (x, y) \in B_{\delta'}(x_0, y_0^+)$$

Μπορούμε να υποθέσουμε (μικραίνοντας το δ' αν χρειάζεται) ότι το δ' είναι αρκετά μικρό ώστε οι δίσκοι $B_{\delta'}(x_0, y_0^-)$ και $B_{\delta'}(x_0, y_0^-)$ περιέχονται στον αρχικό $B_\delta(x_0, y_0)$. Θέτουμε

$$\delta_1 = \delta',\ x_0^- = x_0 - \delta_1,\ x_0^+ = x_0 + \delta_1,\ \text{και } X = (x_0^-, x_0^+).$$

Τότε

$$F(x, y_0^-) < 0,\ F(x, y_0^+) > 0$$

για κάθε $x \in X$. Επιπλέον $X \times Y \subseteq B_\delta(x_0, y_0)$ και άρα αν σταθεροποιήσουμε ένα $x \in X$ και θεωρήσουμε όπως προηγουμένως την συνάρτηση $g(y) = F(x, y)$, $y \in Y$, θα έχουμε ότι $g'(y) = F(x, y) > 0$ δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής. Επειδή $g(y_0^-) = F(x, y_0^-) < 0$ και $h(y_0^+) = F(x, y_0^+) > 0$ θα υπάρχει ένα μοναδικό $y \in Y$ με $h(y) = F(x, y) = 0$. Έστω $f : X \to Y$ η συνάρτηση που στέλνει κάθε $x \in X$ στο μοναδικό $y \in Y$ με $F(x, y) = 0$.

Βήμα 2. Δείχνουμε τώρα ότι η f είναι συνεχής. Επιλέγουμε ένα σημείο $a \in X$ και έστω $\epsilon > 0$. Από την επιλογή των X και Y παραπάνω το $b = f(a)$ θα είναι το μοναδικό σημείο του διαστήματος Y με τις ιδιότητες $F(a, b) = 0$ και $F(a, y) < 0 < F(a, y')$ αν και μόνο αν $y < b < y'$. Περνώντας σε μικρότερο $\epsilon > 0$ αν χρειάζεται μπορούμε να υποθέσουμε ότι $(b - \epsilon, b + \epsilon) \subseteq Y$. Επειδή $F(a, b - \epsilon) < 0 < F(a, b + \epsilon)$ και η F είναι συνεχής, μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $F(x, y) < 0$ αν $(x, y) \in B_\delta(a, b - \epsilon)$ και $F(x, y) > 0$ αν $(x, y) \in B_\delta(a, b + \epsilon)$. Ειδικότερα, για κάθε $x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ έχουμε $F(x, b - \epsilon) < 0 < F(x, b + \epsilon)$, πράγμα που σημαίνει ότι $b - \epsilon < f(x) < b + \epsilon$, αφού, από την επιλογή των Y, X και τον ορισμό της f στο Βήμα 1, το $f(x)$ είναι το μοναδικό σημείο y στο Y με την ιδιότητα $F(x, y') < 0 < F(x, y'') \Leftrightarrow y' < y < y''$.

Βήμα 3. Έστω $a \in X$ και έστω $x \in X$ με $x \neq a$. Παρατηρείστε ότι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $\mathbf{a} = (a, f(a))$ και $\mathbf{x} = (x, f(x)$ είναι όλο εντός του $X \times Y$ και άρα εντός του A. Επειδή η F είναι C^1 είναι και παραγωγίσιμη και άρα από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, θα υπάρχει $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbf{a}, \mathbf{x})$ τέτοιο ώστε

$$F(x, f(x)) - F(a, f(a)) = F_x(\boldsymbol{\xi})(x-a) + F_y(\boldsymbol{\xi})(f(x) - f(a))$$

Επειδή $F(x, f(x)) = F(a, f(a)) = 0$ έπεται ότι

$$F_x(\boldsymbol{\xi})(x-a) + F_y(\boldsymbol{\xi})(f(x) - f(a)) = 0$$

Επειδή $\boldsymbol{\xi} \in X \times Y \subseteq B_\delta(x_0, y_0)$ (δες Βήμα 1), $F_y(\boldsymbol{\xi}) > 0$. Ειδικότερα, $F_y(\boldsymbol{\xi}) \neq 0$ και άρα

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\frac{F_x(\boldsymbol{\xi})}{F_y(\boldsymbol{\xi})}$$

Λόγω συνέχειας της f, $\lim_{x\to a}(x, f(x)) = (a, f(a))$. Επειδή $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ με $0 < |\xi_1 - a| < |x - a|$ και $0 < |\xi_2 - f(a)| < |f(x) - f(a)|$ έχουμε ότι $\lim_{x\to a} \boldsymbol{\xi} = (a, f(a)$ και άρα

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\lim_{x\to a} \frac{F_x(\boldsymbol{\xi})}{F_y(\boldsymbol{\xi})} = -\frac{F_x(a, f(a))}{F_y(a, f(a))}.$$

□

Παρατηρησεις 10.1. (1) Το Παράδειγμα 10.1 αποτελεί ένα απλό παράδειγμα που επιβεβαιώνει την συνθήκη $F_y(x, y) \neq 0$ για να λύνεται η F ως προς y. Πράγματι, η F λύνεται ως προς y συναρτήσει του x αν $b = F_y(x, y) \neq 0$.

(2) Παρατηρείστε ότι η επίλυση της $F(x, y) = 0$ ως προς $y = f(x)$ είναι *τοπική* στο (x_0, y_0) δηλαδή υπάρχει μια περιοχή X του x_0 και μια περιοχή Y του y_0,όπου η $F(x, y) = 0$ λύνεται ως προς y συναρτήσει του x. Εν γένει όμως μπορεί για κάποια ή και για όλα τα $x \in X$ να υπάρχουν και άλλα y που δεν ανήκουν στο Y αλλά είναι τέτοια ώστε $F(x, y) = 0$. Πχ. στο Παράδειγμα 10.2 όπου $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, αν $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $X = (-1, 1)$ και $Y = (0, 2)$ έχουμε $F(x, +\sqrt{1 - x^2}) = 0$ για κάθε $x \in X$ (εδώ $f(x) = +\sqrt{1 - x^2}$), ενώ για $Y = (-2, 0)$, $F(x, -\sqrt{1 - x^2}) = 0$, πάλι για κάθε $x \in X$ (και άρα $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$).

(3) Η συνάρτηση $f : X \to Y$ που επιλύει την $F(x, y) = 0$ ως προς y συνήθως δεν δίνεται από κάποιον κλειστό τύπο. Αυτό που γνωρίζουμε για την f είναι ότι είναι κλάσης C^1. Γενικότερα, αποδεικνύεται ότι αν $F \in C^k(A)$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ τότε και η f είναι $C^k(X)$.

Ισχύουν ανάλογα αποτελέσματα αν υποθέσουμε ότι $F_x(x_0, y_0) \neq 0$. Πιο συγκεκριμένα, από το Θεώρημα 10.2 και με εναλλαγή των x και y έχουμε το εξής.

Θεωρημα 10.2. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $F \in C^1(A)$. Έστω*

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$$

Αν $(x_0, y_0) \in C$ τέτοιο ώστε

$$F_x(x_0, y_0) \neq 0 \tag{10.11}$$

τότε υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα $X = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ με κέντρο το x_0, ένα ανοικτό διάστημα $Y = (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$ με κέντρο το y_0, και μια μοναδική C^1 συνάρτηση $g : Y \to X$ τέτοια ώστε

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = g(y) \tag{10.12}$$

για κάθε $x \in X$ *και* $y \in Y$. *Ισοδύναμα,*

$$\{(x, y) \in C : x \in X \text{ και } y \in Y\} = \{(g(y), y) : y \in Y\} \tag{10.13}$$

και άρα το σύνολο C *σε μια περιοχή του σημείου* (x_0, y_0) *ταυτίζεται με το γράφημα μιας* C^1 *πραγματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής.*

Επιπλέον,

$$g'(y) = -\frac{F_y\,(g(y), y)}{F_x\,(g(y), y)} \tag{10.14}$$

για κάθε $y \in Y$. *Ειδικότερα*

$$g'(y_0) = -\frac{F_y\,(x_0, y_0)}{F_x\,(x_0, y_0)} \tag{10.15}$$

Παραδειγμα 10.3. Δείξτε ότι υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση f ορισμένη σε ανοικτό διάστημα με κέντρο το 1 που ικανοποιεί την σχέση $f(x) = 2x^{f(x)}$.

Αποδειξη. Θέτοντας $y = f(x)$ έχουμε $y = 2x^y \Leftrightarrow 2x^y - y = 0$. Θέτουμε $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$ και ορίζουμε την συνάρτηση $F : A \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$F(x, y) = 2x^y - y$$

Έχουμε,

$$F_x(x, y) = 2yx^{y-1} \text{ και } \quad F_y(x, y) = 2\ln x \cdot x^y - 1$$

και άρα η F είναι C^1. Επίσης,

$$F(1, 2) = 0 \text{ και } \quad F_y(1, 2) = -1 \neq 0$$

Από το Θεώρημα της Πεπλεγμένης συνάρτησης η F λύνεται τοπικά στο $(1, 2)$ ως προς y, δηλαδή υπάρχουν ανοικτά διαστήματα X και Y με κέντρα τα $x_0 = 1$ και $y_0 = 2$ αντίστοιχα και μια C^1 συνάρτηση $f : X \to Y$ τέτοια ώστε $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$, για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$. Συνεπώς $f(1) = 2$ και $F(x, f(x)) = 0 \Leftrightarrow 2x^{f(x)} - f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2x^{f(x)}$, για κάθε $x \in X$. □

2. Το Θεώρημα της Πεπλεγμένης Συνάρτησης για πολλές μεταβλητές

Το Θεώρημα 10.1 γενικεύεται (με παρόμοια απόδειξη) και για εξισώσεις περισσοτέρων των δύο μεταβλητών. Ταυτίζοντας τον $\mathbb{R}^{n+1}$ με το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}^{n+1}$ θα το συμβολίζουμε με $(x_1, \ldots, x_n, y)$ ή $(\mathbf{x}, y)$ όπου $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ και $y \in \mathbb{R}$. Η μεταβλητή y θα είναι η μεταβλητή ως προς την οποία σκοπεύουμε να λύσουμε την εξίσωση $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ συναρτήσει της $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Θεωρημα 10.3. *Έστω* $n \in \mathbb{N}$ *θετικός ακέραιος,* $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, *ανοικτό,* $F \in C^1(A)$ *και έστω*

$$S = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : F(\mathbf{x}, y) = 0\}$$

Αν $(\mathbf{x}_0, y_0) \in S$ *τέτοιο ώστε*

$$F_y(\mathbf{x}_0, y_0) \neq 0 \tag{10.16}$$

τότε υπάρχει μια ανοικτή περιοχή $Y \subseteq \mathbb{R}$ *του* y_0*, μια ανοικτή περιοχή* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *του* $\mathbf{x}_0$ *και μια μοναδική* C^1 *συνάρτηση* $f : X \to Y$ *τέτοια ώστε*

$$F(\mathbf{x}, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(\mathbf{x}) \tag{10.17}$$

για κάθε $\mathbf{x} \in X$ *και* $y \in Y$*. Ισοδύναμα,*

$$\{(\mathbf{x}, y) \in S : \mathbf{x} \in X \text{ και } y \in Y\} = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in X\} \tag{10.18}$$

και άρα το σύνολο S *σε μια περιοχή του* $(\mathbf{x}_0, y_0)$ *ταυτίζεται με το γράφημα μιας πραγματικής συνάρτησης* n*-μεταβλητών. Επιπλέον,*

$$f_{x_i}(\mathbf{x}) = -\frac{F_{x_i}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))}{F_y(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))} \tag{10.19}$$

για κάθε $\mathbf{x} \in X$ *και* $i = 1, \dots, n$*. Ειδικότερα,*

$$f_{x_i}(\mathbf{x}_0) = -\frac{F_{x_i}(\mathbf{x}_0, y_0)}{F_y(\mathbf{x}_0, y_0)} \tag{10.20}$$

Παραδειγμα 10.4. Η εξίσωση

$$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 4 = 0$$

λύνεται ως προς $z = z(x, y)$ σε μια περιοχή του σημείου $(1, 1, 2)$.

Πράγματι,

$$F_x(x, y, z) = 3x^2 - 3yz, \quad F_y(x, y, z) = 3y^2 - 3xy, \quad F_z(x, y, z) = 3z^2 - 3xy.$$

Άρα η F είναι C^1. Επιπλέον $F(1, 1, 2) = 0$ και $F_z(1, 1, 2) = 12 - 3 = 9 \neq 0$. Άρα από το Θεώρημα 10.3 υπάρχει αν. περιοχή $U \subseteq \mathbb{R}^2$ του $(1, 1)$ και αν. περιοχή $Z \subseteq \mathbb{R}$ του $z = 2$, ώστε για κάθε $(x, y) \in U$ υπάρχει μοναδικό $z = z(x, y) \in Z$ με $F(x, y, z(x, y)) = 0$. Επίσης

$$z_x(x, y) = -\frac{F_x(x, y, z(x, y))}{F_z(x, y, z(x, y))}, \; z_y(x, y) = -\frac{F_y(x, y, z(x, y))}{F_z(x, y, z(x, y))}$$

και άρα (αφού $z(1, 1) = 2$),

$$z_x(1, 1) = -\frac{-3}{9} = 1/3, \; z_y(1, 1) = -\frac{-3}{9} = 1/3.$$

Παραδειγμα 10.5. Δίνεται η συνα΄ρτηση $F(x, y, z) = z^3 + z - x^2 - y^2 - 2$.

(α) Δείξτε ότι η εξίσωση $F(x, y, z) = 0$ λύνεται ως προς $z = z(x, y)$ σε μια περιοχή του $(0, 0, 1)$.

(β) Δείξτε ότι η $z(x, y)$ παρουσιάζει τοπικό ελαχιστο στο $(0, 0)$.

(β) Γράψτε το πολυώνυμο Taylor $T_2(x, y)$ δεύτερης τάξης της $z = z(x, y)$ με κέντρο το $(0, 0)$ και υπολογίστε το όριο $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x, y) - z(0, 0)}{x^2 + y^2}$.

Λύση: (α) Η F είναι C^2 συνάρτηση ως πολυωνυμική. Επίσης έχουμε $F(0, 0, 1) = 0$ και $F_z(x, y, z) = 3z^2 + 1 \neq 0$ για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (οπότε και $F_z(0, 0, 1) \neq 0$). Άρα η εξίσωση $F(x, y, z) = 0$ λύνεται ως προς $z = z(x, y)$ όπου $z = z(x, y) : U \to \mathbb{R}$ C^2 συνάρτηση και $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτή περιοχή του $(0, 0)$.

(β) Έχουμε $F_x(x,y,z) = -2x$, $F_y(x,y,z) = -2y$ και όπως είδαμε $F_z(x,y,z) = 3z^2+1$. Είναι

$$z_x(x,y) = -\frac{F_x(x,y)}{F_z(x,y)} = \frac{2x}{3z^2+1}, \quad z_y(x,y) = -\frac{F_y(x,y)}{F_z(x,y)} = \frac{2y}{3z^2+1}$$

και άρα

$$z_{xx}(x,y) = \frac{2(3z^2+1) - 2x \cdot 6z \cdot z_x}{(3z^2+1)^2}$$

$$z_{yy}(x,y) = \frac{2(3z^2+1) - 2y \cdot 6z \cdot z_y}{(3z^2+1)^2}$$

$$z_{xy}(x,y) = \frac{-2x \cdot 6z \cdot z_y}{(3z^2+1)^2}$$

Άρα, επειδή $z(0,0) = 1$, $z_x(0,0) = z_y(0,0) = 0$. Συνεπώς το $(0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο για την $z = z(x,y)$. Επιπλέον, $z_{xx}(0,0) = z_{yy}(0,0) = 8/16 = 1/2$ και $z_{xy}(0,0) = 0$. Άρα $z_{xx}(0,0) > 0$ και $\Delta = z_{xx}(0,0) \cdot z_{yy}(0,0) - z_{xy}(0,0)^2 = 1/4 > 0$ και άρα, απο το Κριτήριο δεύτερης μερικής παραγώγου, η $z(x,y)$ παρουσιάζει τοπικό ελαχιστο στο $(0,0)$.

(β) Έχουμε

$$T_2(x,y) = z(0,0) + z_x(0,0)x + z_y(0,0)y + \frac{1}{2}\left(z_{xx}(0,0)x^2 + 2z_{xy}(0,0)xy + z_{yy}(0,0)y^2\right)$$

και άρα αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$T_2(x,y) = 1 + \frac{1}{4}(x^2+y^2).$$

Από το Θεώρημα Taylor έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x,y) - T_2(x,y)}{x^2+y^2} = 0$$

δηλαδή

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x,y) - 1 - \frac{1}{4}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{z(x,y)-1}{x^2+y^2} - \frac{1}{4}\right] = 0$$

Συνεπώς, αφού $z(0,0) = 1$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x,y) - z(0,0)}{x^2+y^2} = \frac{1}{4}.$$