



**Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Εφαρμοσμένη  
Μηχανική»**

**Εξέταση στην «Εμβιομηχανική των Μαλακών Ιστών»**

**Διδάσκων: Επίκουρος Καθηγητής Δ. Ευταξιόπουλος**

**9 - 6 - 2020**

**Θέμα 1 (3,3)**

Ένα κολλαγόνου έχει στην απαραμόρφωτη κατάσταση τη διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος  $\mathbf{m}_c$ . Η συνάρτηση πυκνότητας ενέργειας παραμόρφωσης  $\underline{W}(\epsilon)$  για το κολλαγόνο δίνεται από τη σχέση

$$\underline{W}(\epsilon) = \frac{K_c}{2k_c} \left( e^{k_c \epsilon^2} - 1 \right) \quad (1)$$

όπου  $K_c$  είναι ένα μέτρο στιβαρότητας της ίνας,  $k_c$  είναι σταθερά και

$$\epsilon = \langle \mathbf{E}_G : \mathbf{M}_c \rangle. \quad (2)$$

Η βαθμωτή ποσότητα  $\epsilon$  εκφράζει την ορθή παραμόρφωση κατά μήκος της ίνας,  $\mathbf{E}_G$  είναι ο τανυστής παραμόρφωσης Green - Lagrange και  $\mathbf{M}_c = \mathbf{m}_c \otimes \mathbf{m}_c$  είναι ο τανυστής πλέξης (fabric tensor), που αναφέρεται στη διεύθυνση της ίνας. Οι τεθλασμένες παρενθέσεις  $\langle \rangle$  συμβολίζουν το θετικό μέρος της ποσότητας που περικλείουν. Να υπολογίσετε το δεύτερο τανυστή τάσης Piola - Kirchhoff  $\underline{\tau}$ .

**Θέμα 2 (3,4)**

Η ηλεκτροχημική ισορροπία ενός συστατικού στον αρθρικό χόνδρο, προσομοιάζεται από το μονοδιάστατο μοντέλο της απλής διάχυσης ιόντων, μεταξύ μιας αρνητικά φορτισμένης στήλης και ενός ηλεκτρολύτη.  $z$  είναι η οριζόντια απόσταση μεταξύ της ηλεκτρικά φορτισμένης στήλης και σημείων του ηλεκτρολύτη. Το ηλεκτροχημικό δυναμικό  $g^{ec}$  είναι ομοιόμορφο (σταθερό) κατά μήκος του  $z$  και δίνεται από τη σχέση

$$g^{ec} = RT \ln x(z) + \zeta F \phi(z). \quad (3)$$

$R$  είναι η παγκόσμια σταθερά αερίων,  $T$  είναι η απόλυτη θερμοκρασία,  $x(z)$  είναι το γραμμομοριακό κλάσμα του συστατικού,  $\zeta$  είναι το χημικό σθένος,  $F$  είναι το ισοδύναμο ηλεκτρικό φορτίο Faraday και  $\phi(z)$  είναι το ηλεκτρικό δυναμικό. Να αποδείξετε τη σχέση Boltzmann

$$x(z) = x(\infty) e^{\left( -\frac{\zeta F}{RT} [\phi](z) \right)} \quad (4)$$

όπου

$$[\phi](z) = \phi(z) - \phi(\infty). \quad (5)$$

**Θέμα 3 (3,3)**

Ο αρθρικός χόνδρος θεωρείται ως πορώδες μέσο για το οποίο ισχύει η θεωρία των μικρών παραμορφώσεων. Θεωρούμε επίσης ότι ο στερεός σκελετός αποτελείται από ασυμπίεστο υλικό. Να δείξετε ότι:

1.  $\det \mathbf{F} = 1 + \text{tr} \epsilon$ , όπου  $\mathbf{F}$  είναι ο τανυστής βαθμίδας παραμόρφωσης για ολόκληρο το πορώδες μέσο και  $\epsilon$  είναι ο τανυστής μικρών παραμορφώσεων για ολόκληρο το πορώδες μέσο.

2.  $\frac{V^F}{V_0^F} = 1 + \frac{\text{tr}\epsilon}{n_0^F}$ , όπου  $V^F$  είναι ο όγκος του ρευστού (fluid) στην παραμορφωμένη κατάσταση,  $V_0^F$  είναι ο όγκος του ρευστού στην απαραμόρφωτη κατάσταση και  $n_0^F = \frac{V_0^F}{V_0}$  είναι το πορώδες κατ' όγκο στην απαραμόρφωτη κατάσταση.