



**Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Εφαρμοσμένη  
Μηχανική»  
Εξέταση στην «Εμβιομηχανική των Μαλακών Ιστών»  
Διδάσκων: Επίκουρος Καθηγητής Δ. Ευταξιόπουλος  
4-6-2018**

**Θέμα 1 (7)**

Η κινηματική απεικόνιση της παραμόρφωσης ενός δοκιμίου μαλακού ιστού, σχήματος κύβου με ακμές μοναδιαίου μήκους, δίνεται από τις σχέσεις

$$x_1 = \lambda X_1 \quad (1)$$

$$x_2 = aX_1^2 + bX_2 \quad (2)$$

$$x_3 = X_3 \quad (3)$$

όπου  $X_i$  και  $x_i$  είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες ενός σημείου στο απαραμόρφωτο και στο παραμορφωμένο πλαίσιο αναφοράς, αντίστοιχα. Οι σταθερές  $a$ ,  $b$  και  $\lambda$  είναι όλες θετικές με  $b > a$ .

Το υλικό του ιστού είναι ελαστικό και συμπιεστό, με συνάρτηση πυκνότητας ενέργειας παραμόρφωσης

$$W = C_1 (F_{11}^2 + F_{22}^2 + F_{33}^2 - 3) + C_2 (F_{12}^2 + F_{21}^2) \quad (4)$$

όπου τα  $F_{ij}$  είναι οι καρτεσιανές συνιστώσες του τανυστή βαθμίδας παραμόρφωσης  $\mathbf{F}$  και τα  $C_1$  και  $C_2$  είναι σταθερές.

1. Να σχεδιάσετε το παραμορφωμένο σχήμα του κύβου, στο επίπεδο  $x_1x_2$ .
2. Να υπολογίσετε το συντελεστή διάτασης  $\lambda_{(n)}$  μιας ίνας υλικού απειροστού μήκους που βρίσκεται στο κέντρο του κύβου στην απαραμόρφωτη κατάσταση και είναι παράλληλη προς τον άξονα  $x_1$  στην παραμορφωμένη κατάσταση.
3. Να υπολογίσετε τις κατανομές των καρτεσιανών συνιστωσών  $t_{12}$  και  $t_{21}$ , του πρώτου τανυστή τάσης Piola - Kirchhoff  $\mathbf{t}$ , στον παραμορφωμένο κύβο, ως συνάρτηση των συντεταγμένων  $X_i$  των υλικών σημείων στην απαραμόρφωτη κατάσταση.

**Θέμα 2 (3)**

Για το πρόβλημα εφελκυσμού και στρέψης θηλώδους μυός, δίνεται η ακτινική τάση κατά Cauchy

$$\sigma^{11} = 2C_2 \left( 1 - \frac{R}{\lambda r r^3} \right) \quad (5)$$

και η εξίσωση ισορροπίας κατά την ακτινική διεύθυνση στην παραμορφωμένη κατάσταση

$$3R \frac{dR}{dr} \frac{d^2R}{dr^2} + \left( \frac{dR}{dr} \right)^3 - \left( \frac{R}{r} \right)^3 = 0. \quad (6)$$

Να δείξετε ότι:

1. Η αντίστροφη κινηματική απεικόνιση

$$R = cr \quad (7)$$

όπου  $c$  είναι σταθερά, ικανοποιεί την εξίσωση ισορροπίας.

2. Η συνοριακή συνθήκη τάσεων στην εξωτερική παράπλευρη επιφάνεια του μυός, ικανοποιείται αν

$$c = \lambda^{1/4}. \quad (8)$$