



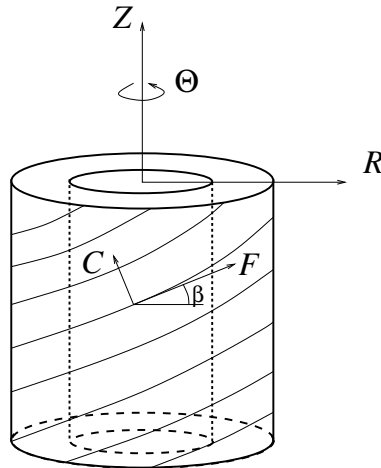
**Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Εφαρμοσμένη Μηχανική»**  
**Εξέταση στην «Εμβιομηχανική των Μαλακών Ιστών»**  
**Διδάσκων: Επίκουρος Καθηγητής Δ. Ευταξιόπουλος**  
**12-6-2012**

**Θέμα 1 (65%)**

Ένα απλό προσομοίωμα της αριστερής καρδιακής κοιλίας, αποτελείται από ένα κυλινδρικό σωλήνα με παχύ τοίχωμα (Σχήμα 1). Η κοιλία υποβάλλεται σε εσωτερική πίεση, αξονικό εφελκυσμό και στρέψη. Η μετάβαση από την απαραμόρφωτη στην παραμορφωμένη κατάσταση περιγράφεται από την απεικόνιση

$$r = r(R), \quad \theta = \Theta + \psi Z, \quad z = \lambda Z \quad (1)$$

της οποίας οι παράμετροι θεωρούνται γνωστές.



Σχήμα 1: Απλοποιημένο κυλινδρικό προσομοίωμα της αριστερής κοιλίας στην απαραμόρφωτη κατάσταση.

Το τοίχωμα περιέχει ίνες σε ελικοειδή μορφή, που σχηματίζουν γωνία  $\beta$  με την εφαπτομενική οριζόντια διεύθυνση. Το υλικό του καρδιακού τοιχώματος, είναι συμπίεστο και εγκάρσια ισότροπο σε σχέση με την τοπική διεύθυνση των μυικών ινών. Στην απαραμόρφωτη κατάσταση το τοπικό κύριο Καρτεσιανό σύστημα του υλικού  $(R, F, C)$  περιλαμβάνει τους άξονες κατά την ακτινική διεύθυνση  $(R)$ , κατά τη διεύθυνση των ινών (fiber)  $(F)$  και κατά τη διεύθυνση κάθετα προς τις ίνες (cross fiber)  $(C)$ . Τα μοναδιαία διανύσματα  $\mathbf{e}_R$ ,  $\mathbf{e}_F$  και  $\mathbf{e}_C$  κατά τις κύριες διευθύνσεις του υλικού, δίνονται σαν συνάρτηση των μοναδιαίων διανυσμάτων  $\mathbf{e}_R$ ,  $\mathbf{e}_\Theta$  και  $\mathbf{e}_Z$  του κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων  $(R, \Theta, Z)$ , από τις σχέσεις

$$\mathbf{e}_R = \mathbf{e}_R \quad (2)$$

$$\mathbf{e}_F = \mathbf{e}_\Theta \cos \beta + \mathbf{e}_Z \sin \beta \quad (3)$$

$$\mathbf{e}_C = -\mathbf{e}_\Theta \sin \beta + \mathbf{e}_Z \cos \beta \quad (4)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας ενέργειας παραμόρφωσης  $W$  του υλικού δίνεται σαν συνάρτηση των φυσικών συνιστωσών  $\hat{E}_{RR}$ ,  $\hat{E}_{FF}$ ,  $\hat{E}_{CC}$  και  $\hat{E}_{FC}$  από τη σχέση

$$W = C(e^Q - 1) \quad (5)$$

όπου

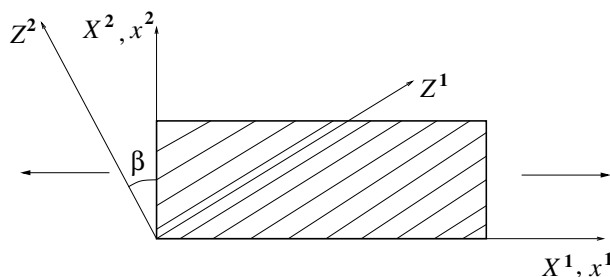
$$Q = 2a_1(\hat{E}_{RR} + \hat{E}_{FF} + \hat{E}_{CC}) + a_2\hat{E}_{FF}^2 + 2a_3\hat{E}_{FC}^2. \quad (6)$$

Τα  $C$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  είναι σταθερές. Να υπολογιστούν:

1. Ο τανυστής της βαθμίδας παραμόρφωσης  $\mathbf{F}$  ως προς τη βάση των μοναδιαίων διανυσμάτων των κυλινδρικών συστημάτων  $(r, \theta, z)$  και  $(R, \Theta, Z)$  στην παραμορφωμένη και στην απαραμόρφωτη κατάσταση αντίστοιχα.
2. Ο τανυστής  $\mathbf{E}$  της παραμόρφωσης κατά Lagrange ως προς τη βάση των μοναδιαίων διανυσμάτων του συστήματος  $(R, \Theta, Z)$  στην απαραμόρφωτη κατάσταση.
3. Ο τανυστής  $\mathbf{E}$  της παραμόρφωσης κατά Lagrange ως προς τη βάση των μοναδιαίων διανυσμάτων του συστήματος  $(R, F, C)$  στην απαραμόρφωτη κατάσταση.
4. Η ορθή φυσική συνιστώσα  $\hat{s}^{FF}$  του δεύτερου τανυστή τάσης Piola - Kirchhoff, κατά τη διεύθυνση των ινών στην απαραμόρφωτη κατάσταση.

### Θέμα 2 (35%)

Ένα ορθογώνιο κομμάτι ιστού του καρδιακού τοιχώματος του προηγούμενου προβλήματος, αποκόπτεται και υποβάλλεται σε πείραμα ομοιόμορφου μονοαξονικού εφελκυσμού κατά τον άξονα  $X^1$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 2. Οι συντελεστές διάτασης  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  και  $\lambda_3$ , παράλληλα προς τους άξονες του Καρτεσιανού συστήματος  $(X^1, X^2, X^3)$ , είναι δεδομένοι. Να υπολογιστούν:



Σχήμα 2: Ορθογώνια λωρίδα του καρδιακού τοιχώματος υπό ομοιόμορφο εφελκυσμό.

1. Ο τανυστής βαθμίδας παραμόρφωσης  $\mathbf{F}$ , ως προς τη βάση μοναδιαίων διανυσμάτων  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}^I$ .
2. Ο τανυστής της παραμόρφωσης κατά Lagrange  $\mathbf{E}$ , ως προς τη βάση μοναδιαίων διανυσμάτων  $\mathbf{e}^I \mathbf{e}^J$ .
3. Ο τανυστής της παραμόρφωσης κατά Lagrange  $\mathbf{E}$ , ως προς τη βάση του Καρτεσιανού συστήματος  $(Z^1, Z^2, Z^3)$  του υλικού.
4. Το διατμητικό στοιχείο  $s_{12}$  του τανυστή της δεύτερης τάσης Piola - Kirchhoff, ως προς τη βάση του Καρτεσιανού συστήματος  $(X^1, X^2, X^3)$ .