ΔΙΑΦΑΝΕΙΕΣ ΕΡΓΟ-ΕΝΕΡΓΕΙΑ

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Οι νόμοι διατήρησης φυσικών μεγεθών, όπως η ενέργεια, η ορμή και η στροφορμή, απλοποιούν πολλές φορές το πρόβλημα της κίνησης ενός σώματος υπό την επίδραση δυνάμεων, αφού βοηθούν στον προσδιορισμό χαρακτηριστικών της κίνησης χωρίς την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων της κίνησης.

Σε ένα σύστημα σωμάτων για το οποίο οι αλληλεπιδράσεις δεν εξαρτώνται άμεσα από τον χρόνο, διατηρείται μία ποσότητα που ονομάζεται ενέργεια του συστήματος.

ΕΝΕΡΓΕΙΑ - ΕΡΓΟ

Στην Μηχανική η ενέργεια είναι άμεσα συνυφασμένη με την έννοια του έργου μιας δύναμης.

Έργο W που παράγει δύναμη F κατά την μετακίνηση σώματος από θέση y_0 σε θέση y : $W \equiv F(y\text{-}y_0)$.

ή γενικότερα $W_{1\to 2} \equiv \int_{y_1}^{y_2} F(y)dy$.

Είναι ακόμη : $U = -W_{1\to 2} \equiv -\int_{y_1}^{y_2} F(y)dy$,

όπου U η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας από το 1 στο 2 λόγω του πεδίου της δύναμης F.

Επομένως: $F(y) = -\dfrac{dU}{dy}$.

Παράδειγμα : Η δυναμική ενέργεια μάζας M μέσα στο ομογενές βαρυτικό πεδίο της Γης είναι $U = Mgh$, όπου h το ύψος που βρίσκεται το σώμα (υποθέτοντας μηδενική ενέργεια στην επιφάνεια).

Κατά την πτώση σώματος και σε οποιοδήποτε ενδιάμεσο ύψος y ισχύει

$\frac{1}{2}Mv^2 + Mgy = Mgh =$ σταθερά (ολική ενέργεια), με $K = \frac{1}{2}Mv^2$ την κινητική ενέργεια του σώματος.

ΕΡΓΟ

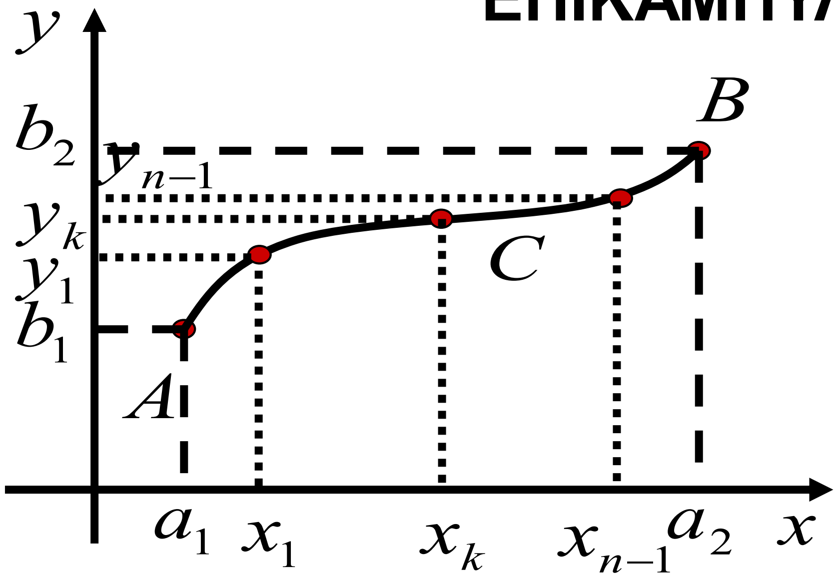
Στις 3 διαστάσεις το έργο W που παράγει μία σταθερή δύναμη $\vec{F}$ κατά την μετατόπιση $\Delta\vec{r}$ δίνεται από την σχέση: $W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$.

Αν η δύναμη μεταβάλλεται με την θέση το έργο W δίνεται από την σχέση:

$$W = \lim_{\Delta\vec{r}_j \to 0} \sum_j \vec{F}\left(\vec{r}_j\right)\cdot\Delta\vec{r}_j = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}\left(\vec{r}\right)\cdot d\vec{r},$$

δηλαδή από ένα γραμμικό ή επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.

ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ



Έστω καμπύλη C στο επίπεδο xy. Έστω ακόμη ότι $\mathrm{A}=(a_1,b_1)$ και $\mathrm{B}=(a_2,b_2)$ είναι η αρχή και το πέρας, αντίστοιχα, για ένα τμήμα της C.

Χωρίζουμε την C σε n διαστήματα μέσω των σημείων (x_k, y_k) και ορίζουμε τα σημεία (ξ_k, η_k) στο μέσο του k διαστήματος.

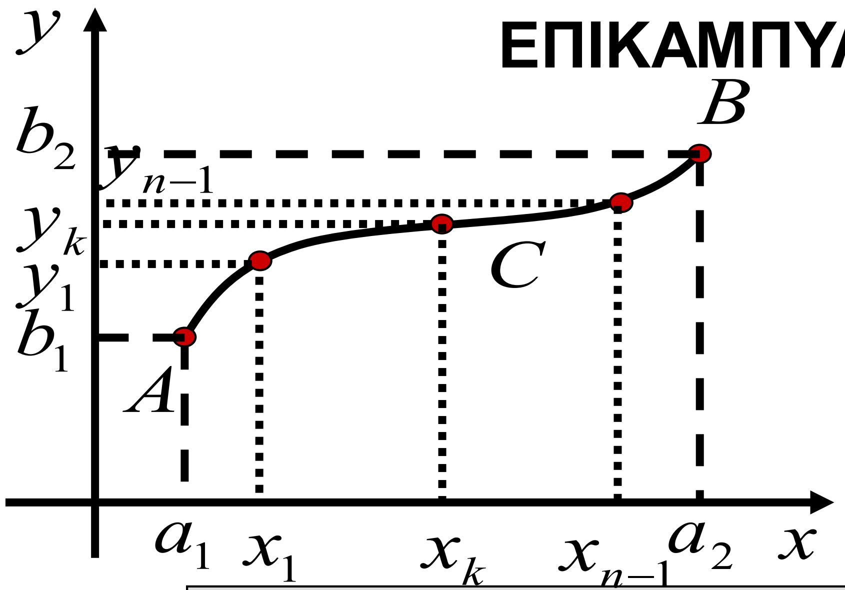
Για δύο συναρτήσεις $P(x,y)$ και $Q(x,y)$ μπορούμε να σχηματίσουμε το άθροισμα $\mathrm{I_C} = \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k$.

Αν υπάρχει το όριο του $\mathrm{I_C}$ για πολύ μικρά $\Delta x_k, \Delta y_k$, τότε το όριο αυτό

ορίζει το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\mathrm{I_C}$ της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{R}(x,y) = \hat{x}P(x,y) + \hat{y}Q(x,y)$ πάνω στο τμήμα AB της καμπύλης C.

Συμβολισμός: $I_C \equiv \int_C \vec{R}\cdot d\vec{r} \equiv \int_C \left[P(x,y)dx + Q(x,y)dy\right]$

ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ



Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_A^B P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

μπορεί να υπολογιστεί με έναν από τους κάτωθι τρόπους :

1) Αν η καμπύλη περιγράφεται από την συνάρτηση $y = f(x)$, τότε

$$dy = f'(x)dx \text{ και } I_C = \int_{a_1}^{a_2} P(x, f(x))dx + Q(x, f(x))f'(x)dx.$$

2) Αντίστοιχα, αν η C περιγράφεται από την συνάρτηση $x = g(y)$, τότε

$$dx = g'(y)dy \text{ και } I_C = \int_{b_1}^{b_2} P(g(y), y)g'(y)dy + Q(g(y), y)dy.$$

3) Αν η καμπύλη περιγράφεται από την παραμετρική μορφή

$$x = f(t) \text{ και } y = g(t), \text{ τότε } I_C = \int_{t_A}^{t_B} P(f(t), g(t))f'(t)dt + Q(f(t), g(t))g'(t)dt,$$

όπου $a_1 = f(t_A), a_2 = f(t_{\mathrm{B}}), b_1 = g(t_A), b_2 = g(t_{\mathrm{B}})$.

ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να υπολογιστεί το $I=\int_{(0,1)}^{(1,2)}\left(x^2-y\right)dx+\left(y^2+x\right)dy$ (α) κατά μήκος της ευθείας γραμμής από το $(0,1)$ έως το $(1,2)$, (β) κατά μήκος της ευθείας γραμμής από το $(0,1)$ έως το $(1,1)$ και μετά της ευθείας γραμμής από το $(1,1)$ έως το $(1,2)$, (γ) κατά μήκος της παραβολής $x=t,\ y=t^2+1$.

(α) Η ευθεία που περνάει από τα σημεία $(0,1)$ και $(1,2)$ είναι η $y=x+1$.

Κατά μήκος της ευθείας είναι $dy=dx$.

Επομένως $I=\int_0^1\left[x^2-(x+1)\right]dx+\left[(x+1)^2+x\right]dx=\int_0^1\left[2x^2+2x\right]dx=2\frac{1}{3}+1=\frac{5}{3}$.

(β) Για την ευθεία από το $(0,1)$ στο $(1,1)$ είναι $y=1$ και $dy=0$.

Το κομμάτι αυτό για το επικαμπύλιο δίνει $I_1=\int_0^1\left(x^2-1\right)dx=-2/3$.

Για την ευθεία από το $(1,1)$ στο $(1,2)$ είναι η $x=1$ και $dx=0$.

Το σχετικό επικαμπύλιο δίνει $I_2=\int_1^2\left(y^2+1\right)dy=10/3$.

Άρα $I=I_1+I_2=8/3$.

ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να υπολογιστεί το $I=\int_{(0,1)}^{(1,2)}\left(x^2-y\right)dx+\left(y^2+x\right)dy$ (α) κατά μήκος της ευθείας γραμμής από το $(0,1)$ έως το $(1,2)$, (β) κατά μήκος της ευθείας γραμμής από το $(0,1)$ έως το $(1,1)$ και μετά της ευθείας γραμμής από το $(1,1)$ έως το $(1,2)$, (γ) κατά μήκος της παραβολής $x=t,\ y=t^2+1$.

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{a_1}^{a_2}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ μπορεί να υπολογιστεί με έναν από τους κάτωθι τρόπους :

3) Αν η καμπύλη περιγράφεται από την παραμετρική μορφή

$x=f(t)$ και $y=g(t)$, τότε $I_C=\int_{t_A}^{t_B}P(f(t),g(t))f'(t)dt+Q(f(t),g(t))g'(t)dt$,

όπου $a_1=f(t_A),\ a_2=f(t_B),\ b_1=g(t_A),\ b_2=g(t_B)$.

(γ) Για το σημείο $(0,1)$ έχουμε $t=0$, ενώ για το σημείο $(1,2)$ είναι $t=1$.

Σε αυτή τη περίπτωση είναι $f(t)=t\Rightarrow f'(t)=1$ και $g(t)=t^2+1\Rightarrow g'(t)=2t$.

Επομένως $\int_0^1\left[t^2-\left(t^2+1\right)\right]dt+\left[\left(t^2+1\right)^2+t\right]2tdt=\int_0^1\left(2t^5+4t^3+2t^2+2t-1\right)dt=2$.

ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Έστω δύναμη $\vec{F} = \hat{x}(3x^2 - 6yz) + \hat{y}(2y + 3xz) + \hat{z}(1 - 4xyz^2)$. Υπολογίστε το έργο για μετακίνηση α) από το $(0,0,0)$ στο $(1,1,1)$ κατά μήκος του δρόμου C $x = t, y = t^2, z = t^3$, β) κατά μήκος των ευθειών από το $(0,0,0)$ στο $(0,0,1)$, και μετά στο $(0,1,1)$.

Το σημείο $(1,1,1)$ προκύπτει για $t = 1$.

Το σημείο $(0,0,0)$ προκύπτει για $t = 0$.

ΛΥΣΗ : α) Είναι $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C F_x dx + F_y dy + F_z dz =$

$$= \int_0^1 (3t^2 - 6t^2 t^3) dt + (2t^2 + 3tt^3) d(t^2) + (1 - 4tt^2 t^6) d(t^3) =$$

$$= \int_0^1 (3t^2 - 6t^5) dt + (4t^3 + 6t^5) dt + (3t^2 - 12t^{11}) dt = 2.$$

β) Από το $(0,0,0)$ στο $(0,0,1)$ είναι $x = 0, y = 0, dx = 0, dy = 0$, ενώ το z μεταβάλλεται από το 0 στο 1. Άρα $W_1 = \int_{z=0}^1 [1 - 4(0)(0)z^2] dz = 1$.

Από το $(0,0,1)$ στο $(0,1,1)$ είναι $x = 0, z = 1, dx = 0, dz = 0$, ενώ το y μεταβάλλεται από το 0 στο 1. Άρα $W_2 = \int_{y=0}^1 [2y + 3(0)(1)] dy = 1$. Οπότε $W = W_1 + W_2 = 2$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΡΓΟΥ-ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του έργου και τον 2^{o} νόμο του Νεύτωνα βρίσκουμε :

$$W=\int_{\vec r_A}^{\vec r_B}\vec F(\vec r)\cdot d\vec r = M\int_{\vec r_A}^{\vec r_B}\frac{d\vec v}{dt}\cdot d\vec r = M\int_{t_A}^{t_B}\frac{d\vec v}{dt}\cdot\frac{d\vec r}{dt}dt = M\int_{t_A}^{t_B}\frac{d\vec v}{dt}\cdot\vec v dt =$$

$$=\frac{1}{2}M\int_{t_A}^{t_B}\frac{d(\vec v\cdot\vec v)}{dt}dt=\frac{1}{2}M\int_{t_A}^{t_B}\frac{dv^2}{dt}dt=\frac{1}{2}M\left(v_B^2-v_A^2\right).$$

Δηλαδή: $W_{A\to B}=K_B-K_A,\ (1)$

όπου $K\equiv\frac{1}{2}Mv^2$ είναι η κινητική ενέργεια του σώματος.

Είναι ακόμη: $W=-\Delta U_{AB}=U_A-U_B.$

Επομένως, βρίσκουμε από την (1)

$$K_B-K_A=U_A-U_B\Rightarrow K_A+U_A=K_B+U_B\ (2)$$

Η (2) εκφράζει την αρχή διατήρησης της ενέργειας $E=K+U.$

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ-ΕΡΓΟ

$$U_{A\to B} = -\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_{\varepsilon\mu\varepsilon\acute{\iota}\varsigma}(\vec{r})\cdot d\vec{r}.$$

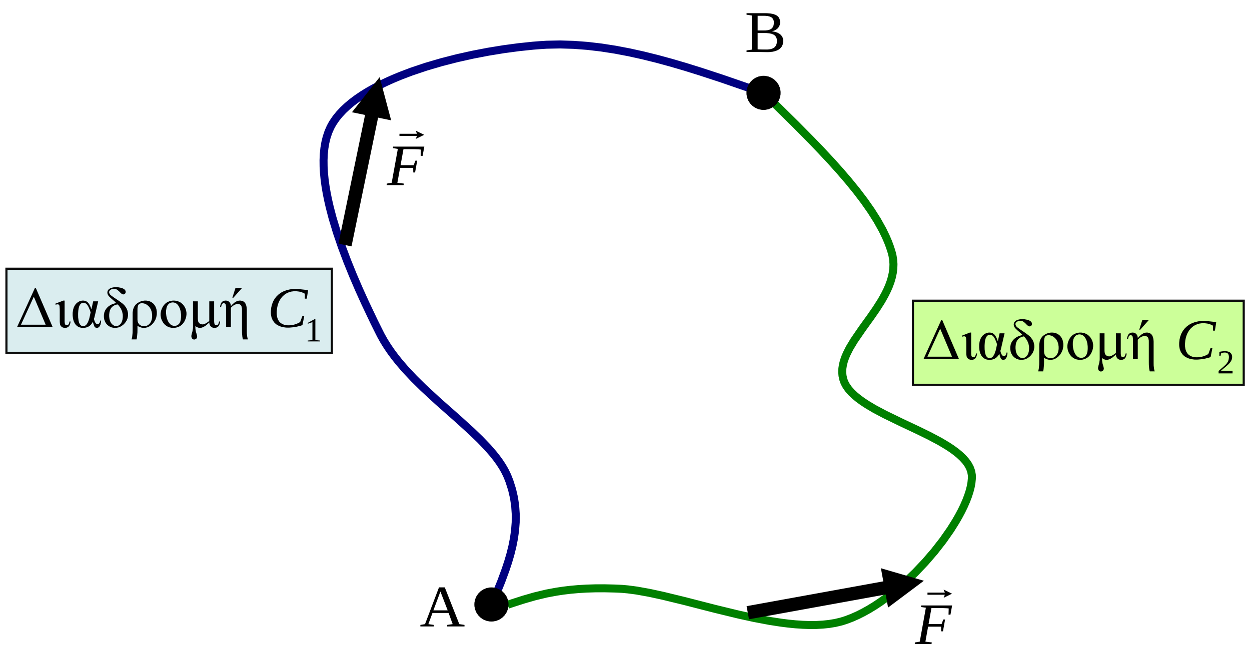
Δηλαδή, αν απαιτείται να ασκήσουμε δύναμη για να πετύχουμε μετακίνηση από το Α στο Β, τότε η δυναμική ενέργεια αυξάνει.

Αν αντίθετα το πεδίο προκαλεί την μετατόπιση χωρίς να ασκούμε δύναμη, τότε παράγεται έργο και η δυναμική ενέργεια μειώνεται.

Η τάση στην φύση είναι τα σώματα να κινούνται από υψηλότερη σε χαμηλότερη δυναμική ενέργεια.

ΔΙΑΤΗΡΗΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Μία δύναμη $\vec{F}$ ονομάζεται διατηρητική (ή συντηρητική) αν το έργο που παράγει κατά την μετατόπιση από ένα σημείο Α σε ένα άλλο σημείο Β είναι ανεξάρτητο της διαδρομής.



Δηλαδή για συντηρητική δύναμη $\vec{F}(\vec{r})$ ισχύει $\int_{C_1}^{A\to B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_2}^{A\to B} \vec{F}\cdot d\vec{r}$

για κάθε ζευγάρι διαδρομών από τυχαίο σημείο Α σε τυχαίο σημείο Β.

ΔΙΑΤΗΡΗΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Έστω $I_1 = \int_{C_1}^{A\to B} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ το έργο της $\vec{F}$ κατά μήκος διαδρομής C_1 από το σημείο Α στο Β. Έστω επίσης $I_2 = \int_{C_2}^{A\to B} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ το έργο της $\vec{F}$ κατά μήκος διαδρομής C_2 από το σημείο Α στο Β.

Από ιδιότητες επικαμπύλιου ολοκληρώματος είναι $\int_{C_2}^{B\to A} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -I_2$.

Από τον ορισμό είναι για διατηρητική δύναμη $I_1 = I_2 \Rightarrow I_1 - I_2 = 0$

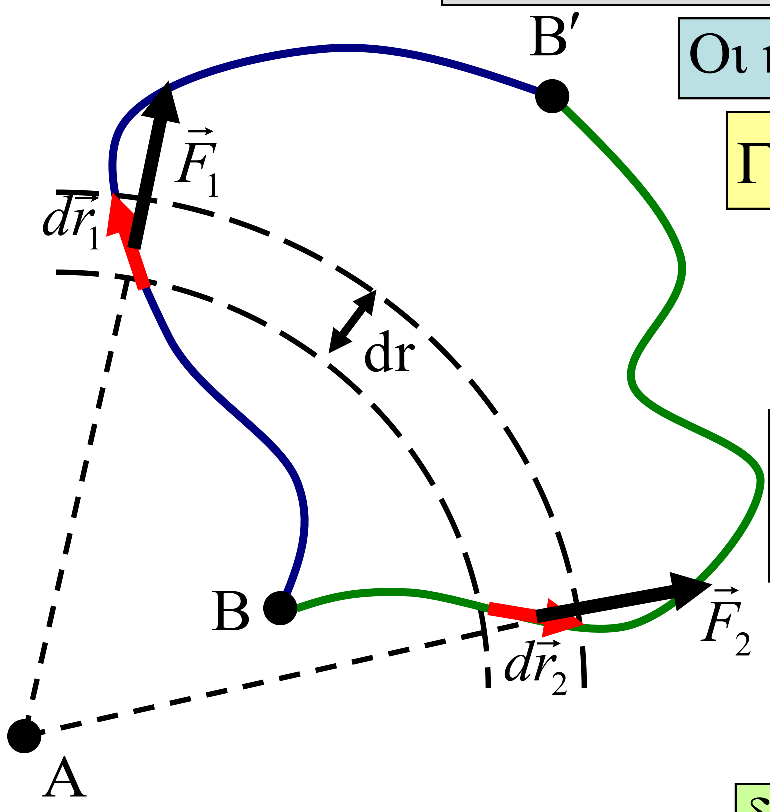
Επομένως : $\int_{C_1}^{A\to B} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2}^{B\to A} \vec{F}\cdot d\vec{r} \equiv \oint_{C_1+C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$, όπου $\oint$ συμβολίζει

το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα για τη διαδρομή $\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{A}$.

ΚΕΝΤΡΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Μία δύναμη $\vec{F}$ που ασκεί ένα σώμα Α σε ένα σώμα Β ονομάζεται κεντρική όταν ισχύει: $\vec{F} = F(r_{AB})\hat{r}_{AB}$,

όπου $\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ με $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$ τα διανύσματα θέσης των Α και Β.



Οι κεντρικές δυνάμεις είναι διατηρητικές δυνάμεις.

Για τα $d\vec{r}_1$ και $d\vec{r}_2$ ισχύει: $\vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 = \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 = F_1 dr$.

και επομένως η συνεισφορά των τμημάτων αυτών στο παραγόμενο έργο είναι η ίδια.

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να διαιρέσουμε τις διαδρομές σε μικρά τμήματα με ίσο έργο

και τελικά $\underset{\text{διαδρομή}1}{\int_B^{B'} \vec{F} \cdot d\vec{r}} = \underset{\text{διαδρομή}2}{\int_B^{B'} \vec{F} \cdot d\vec{r}}$,

δηλαδή το έργο για τη μετατόπιση από το Β στο Β′ είναι ανεξάρτητο της διαδρομής.

ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

Έστω βαθμωτή συνάρτηση πολλών (n) μεταβλητών $y = f\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right)$.

Η μερική παράγωγος ως προς μεταβλητή x_i ορίζεται το όριο

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f\left(x_1, x_2, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n\right) - f\left(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n\right)}{\Delta x_i}$$

Παράδειγμα : Υπολογίστε την μερική παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial x}$ της $f\left(x, y\right) = 3x^2 y$.

ΛΥΣΗ : Είναι $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial\left(3x^2 y\right)}{\partial x} = 3y\frac{\partial x^2}{\partial x} = 6xy$.

Παράδειγμα : Υπολογίστε την μερική παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial z}$ της $f\left(x, y, z\right) = 3x^2 y + x\cos z$.

ΛΥΣΗ : Είναι $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial\left(3x^2 y + x\cos z\right)}{\partial z} = \frac{\partial\left(x\cos z\right)}{\partial z} = -x\sin z$.

ΒΑΘΜΙΔΑ (grad) ΒΑΘΜΩΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η βαθμίδα (ή grad) βαθμωτής συνάρτησης 3 μεταβλητών $f(x,y,z)$

ορίζεται η διανυσματική συνάρτηση $\vec{\nabla} f(x,y,z) \equiv \hat{x}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \hat{y}\dfrac{\partial f}{\partial y} + \hat{z}\dfrac{\partial f}{\partial z}$

Διανυσματικός τελεστής $\vec{\nabla} \equiv \hat{x}\dfrac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\dfrac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\dfrac{\partial}{\partial z}$ είναι η βαθμίδα ή grad.

Παράδειγμα : Αν $f(x,y,z) = 3x^2 y + \sin z$ βρίσκουμε

$$\vec{\nabla} f = \hat{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial f}{\partial z} = 6xy\hat{x} + 3x^2\hat{y} + (\cos z)\hat{z}.$$

Η βαθμίδα δείχνει την διεύθυνση μέγιστης μεταβολής της f στο χώρο xyz.

Το μέτρο $\left|\vec{\nabla} f\right|$ δείχνει το μέτρο της μεταβολής της f για μοναδιαία μετατόπιση κατά μήκος της φοράς του $\vec{\nabla} f$.

ΔΙΑΤΗΡΗΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ-ΣΥΝΘΗΚΗ

Είναι $F = -\frac{dU}{dx}$, όπου $U(x)$ η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας

και γενικότερα στις 3 διαστάσεις

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial U}{\partial z}\hat{z}, \text{ ή αλλιώς } \vec{F} = -\vec{\nabla} U = -gradU \quad (1),$$

όπου $grad = \vec{\nabla} \equiv \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$.

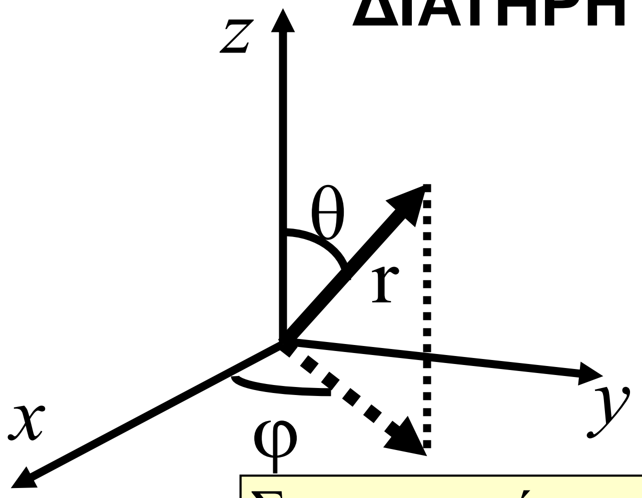
Εάν για μία διανυσματική συνάρτηση $\vec{F}(\vec{r})$ υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση $U(\vec{r})$ ώστε να ισχύει η $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r})$, τότε η $\vec{F}(\vec{r})$ περιγράφει μια διατηρητική δύναμη.

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει η (1) είναι η σχέση

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \equiv \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0 \quad (2).$$

Η (2) ορίζει τον διανυσματικό τελεστή curl ($\equiv \vec{\nabla} \times$) του στροβιλισμού.

ΔΙΑΤΗΡΗΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ-ΣΥΝΘΗΚΗ



Ικανή και αναγκαία για να ισχύει η $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$

είναι η σχέση: $\vec{\nabla}\times\vec{F} \equiv \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0 \quad (2).$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες ο τελεστής curl παίρνει την μορφή

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} \equiv \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ F_r & rF_\theta & r\sin\theta F_\varphi \end{vmatrix} \quad (3), \text{ όπου } \vec{F} = \hat{r}F_r + \hat{\theta}F_\theta + \hat{\varphi}F_\varphi.$$

Από την (3) προκύπτει ότι κεντρικές δυνάμεις $\vec{F}_\kappa = \hat{r}f(r)$ είναι διατηρητικές.

Όντως, για κεντρικές δυνάμεις είναι $F_r = f(r), F_\theta = F_\varphi = 0$ και άρα:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}_\kappa = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\hat{r}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - r\hat{\theta}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ f(r) & 0 \end{vmatrix} + r\sin\theta\hat{\varphi}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} \\ f(r) & 0 \end{vmatrix}\right] = 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Σώμα μάζας m διαγράφει τροχιά στον χώρο που δίνεται από το διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t)=\beta_0\hat{x}-\gamma_0\hat{y}+\frac{1}{2}(\beta\hat{x}-\gamma\hat{y})t^2$, όπου β_0, γ_0, β, γ σταθερές. Βρείτε:

α) Τη δύναμη που ασκείται στο σώμα. Δείξτε ότι η δύναμη είναι διατηρητική.

β) Το έργο που θα κάνει η δύναμη αυτή για να κινήσει το σώμα από τη θέση $\vec{r}_1=0\hat{x}+0\hat{y}$ στην θέση $\vec{r}_2=2\hat{x}+3\hat{y}$. γ) Τη δυναμική ενέργεια, αν $U(\vec{r}=0)=0$.

ΛΥΣΗ: α) Από το διάνυσμα θέσης βρίσκουμε την ταχύτητα

$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=(\beta\hat{x}-\gamma\hat{y})t$ και κατόπιν την επιτάχυνση: $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=(\beta\hat{x}-\gamma\hat{y})$.

Για την δύναμη έχουμε από τον $2^{\text{ο}}$ νόμο του Νεύτωνα $\vec{F}=m\vec{a}=m(\beta\hat{x}-\gamma\hat{y})$.

$$\text{Είναι } \vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ m\beta & -m\gamma & 0\end{vmatrix}=0, \text{ άρα η } \vec{F} \text{ είναι συντηρητική.}$$

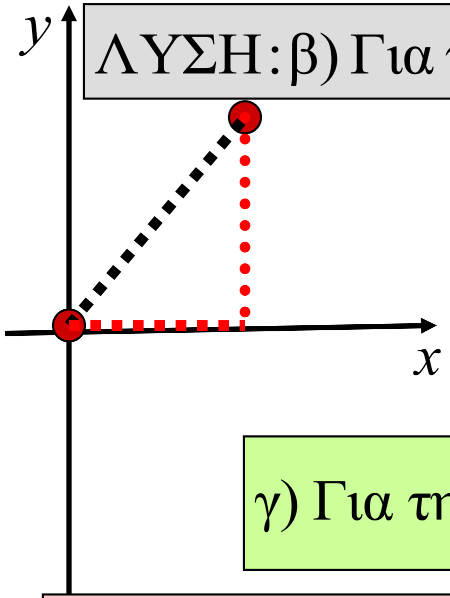
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Σώμα μάζας m διαγράφει τροχιά στον χώρο που δίνεται από το διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t)=\beta_0\hat{x}-\gamma_0\hat{y}+\frac{1}{2}(\beta\hat{x}-\gamma\hat{y})t^2$, όπου β_0, γ_0, β, γ σταθερές. Βρείτε:

α) Τη δύναμη που ασκείται στο σώμα. Δείξτε ότι η δύναμη είναι διατηρητική.

β) Το έργο που κάνει η δύναμη αυτή για να κινήσει το σώμα από τη θέση $\vec{r}_1=0\hat{x}+0\hat{y}$ στην θέση $\vec{r}_2=2\hat{x}+3\hat{y}$.

γ) Τη δυναμική ενέργεια, αν $U(\vec{r}=0)=0$.



ΛΥΣΗ: β) Για το έργο της $\vec{F}$ κατά την μετατόπιση από το $\vec{r}_1$ στο $\vec{r}_2$ βρίσκουμε:

$$W=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{(0,0,0)}^{(2,3,0)}m(\beta\hat{x}-\gamma\hat{y})\cdot(\hat{x}dx+\hat{y}dy+\hat{z}dz)$$

$$W=\int_{(0,0,0)}^{(2,3,0)}(m\beta dx-m\gamma dy)=\int_0^2 m\beta dx-\int_0^3 m\gamma dy=m(2\beta-3\gamma)$$

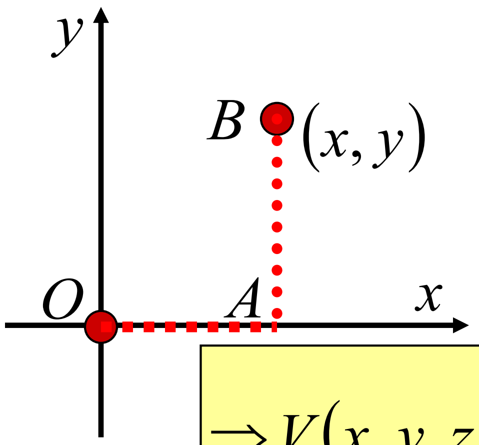
γ) Για την δυναμική ενέργεια έχουμε $U(\vec{r})-U(\vec{0})=-\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}\vec{F}\cdot d\vec{r}'=$

$$=-m\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(\beta\hat{x}-\gamma\hat{y})\cdot(\hat{x}dx'+\hat{y}dy'+\hat{z}dz')=-m\beta\int_0^x dx'+m\gamma\int_0^y dy'=-m(\beta x-\gamma y)$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Δίνονται τα διανυσματικά πεδία $\vec{F}_1 = (x-y, y-x, 0)$ και $\vec{F}_2 = (x^2 y, y^2 x, 0)$. α) Να βρείτε ποιο από τα δύο πεδία μπορεί να παριστάνει διατηρητική δύναμη και ποιο όχι. β) Για εκείνο το πεδίο που παριστάνει διατηρητική δύναμη, να υπολογιστεί η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $V = V(x,y,z)$ από την οποία αυτό προέρχεται, θεωρώντας ως σημείο αναφοράς (μηδενικής δυναμικής ενέργειας) το σημείο $(0,0,0)$.

Είναι $\vec{\nabla}\times\vec{F}_1 \equiv \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x-y & y-x & 0 \end{vmatrix} = 0,\ \vec{\nabla}\times\vec{F}_2 \equiv \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y & y^2 x & 0 \end{vmatrix} = \hat{z}\left(y^2 - x^2\right) \neq 0.$



Άρα η $\vec{F}_1$ είναι διατηρητική δύναμη, ενώ η $\vec{F}_2$ δεν είναι.

β) Από τον ορισμό της δυναμικής ενέργειας $V(x,y,z)$

$$V(x,y) = -W_{O\to B} = -\int_{O\to A} \vec{F}\cdot d\vec{r}\,' - \int_{A\to B} \vec{F}\cdot d\vec{r}\,' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(x,y,z) = \int_0^x (0-x')dx' + \int_0^y (x-y')dy' = -\frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} = -\frac{(x-y)^2}{2}.$$

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΒΑΡΥΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Έστω δύο μάζες M_1 και M_2 αρχικά σε απόσταση $\vec{r}$.

Για να αλλάξει η απόσταση κατά $d\vec{r}$ θα πρέπει να καταβληθεί έργο

$$dW = \frac{GM_1M_2}{r^3}\vec{r}\cdot d\vec{r} = \frac{GM_1M_2}{r^3}\frac{1}{2}d(\vec{r}\cdot\vec{r}) = \frac{GM_1M_2}{r^3}\frac{1}{2}d(r^2)$$

$$dW = \frac{GM_1M_2}{r^3}rdr = \frac{GM_1M_2}{r^2}dr$$

Επομένως, για μετατόπιση από $\vec{r}_A$ στο $\vec{r}_B$ χρειάζεται έργο

$$\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} dW = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} G\frac{M_1M_2}{r^2}dr = -G\frac{M_1M_2}{r_B} + G\frac{M_1M_2}{r_A} = \Delta U \quad (1).$$

Θέτοντας $U = 0$ για $r = \infty$, η (1) δίνει για την δυναμική ενέργεια βαρυτικού πεδίου :

$$U(r) = -G\frac{M_1M_2}{r} \quad (2).$$

Αρχή διατήρησης της ενέργειας : $\frac{1}{2}M_1v_A^2 - G\frac{M_1M_2}{r_A} = \frac{1}{2}M_1v_B^2 - G\frac{M_1M_2}{r_B}$.

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΒΑΡΥΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Θέτοντας $U = 0$ για $r = \infty$, η (1) δίνει για την δυναμική ενέργεια βαρυτικού πεδίου :

$$U(r) = -G\frac{M_1 M_2}{r} \quad (2).$$