Stewart Shapiro[*]

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ[†]

Μετάφραση: Μαρία Παναγιωτάτου
Επιμέλεια: Αριστείδης Αραγεώργης

Εισαγωγή. Δύσκολα μπορεί να αρνηθεί κανείς το γεγονός ότι πρέπει να έχει επαρκή γνώση μαθηματικών αν πρόκειται να συλλάβει με επιστημονικό τρόπο το μη μαθηματικό σύμπαν. Ας πάρουμε, για παράδειγμα, τα μαθηματικά που προϋποτίθενται για οποιονδήποτε κλάδο των φυσικών ή κοινωνικών επιστημών. Βασική υπόθεση αυτού του άρθρου είναι ότι υπάρχει πράγματι σχέση μεταξύ του αντικειμένου των μαθηματικών (όποιο κι αν είναι αυτό) και του αντικειμένου της επιστήμης (όποιο κι αν είναι *αυτό*) και, ειδικότερα, ότι δεν είναι τυχαίο που τα μαθηματικά εφαρμόζονται στην πραγματικότητα. Ο σκοπός μου είναι μετα-φιλοσοφικός: η μελέτη του προβλήματος που αφορά την εξήγηση αυτής της σχέσης.

Η πρώτη ενότητα ασχολείται με το πόσο σημαντικό είναι το πρόβλημα αυτό για τη φιλοσοφία. Η περιγραφή του αντικειμένου των μαθηματικών είναι ένα από τα κυριότερα προβλήματα στη φιλοσοφία των μαθηματικών, ενώ η περιγραφή του επιστημονικού κόσμου είναι ένα από τα κυριότερα προβλήματα της γνωσιολογίας/μεταφυσικής γενικότερα, και της φιλοσοφίας της επιστήμης ειδικότερα. Υποστηρίζεται ότι πολλοί από τους λόγους να εμπλακεί κανείς με τη φιλοσοφία καθιστούν μια περιγραφή της σχέσης μεταξύ μαθηματικών και πραγματικότητας προτεραιότητα για τα παραπάνω πεδία. Οποιαδήποτε άποψη για τον κόσμο η οποία δεν παρέχει μια τέτοια περιγραφή είναι, στην καλύτερη περίπτωση, ατελής.

Η δεύτερη ενότητα περιλαμβάνει μια επισκόπηση των σημαντικότερων παραδοσιακών σχολών φιλοσοφίας των μαθηματικών, εστιάζοντας στο πώς η κάθε μία αντιμετωπίζει το συγκεκριμένο πρόβλημα. Προκύπτει ότι οι καθιερωμένες διατυπώσεις κάποιων από αυτές φαίνεται να αρνούνται ευθύς εξ αρχής ότι υπάρχει σχέση μεταξύ μαθηματικών και οποιασδήποτε μη μαθηματικής πραγματικότητας. Για αυτό το λόγο, τέτοιες φιλοσοφικές σχολές δεν είναι αποδεκτές. Άλλες απόψεις, αν και μπορεί να μην είναι εκ πρώτης όψεως ασύμβατες με μια σχέση των μαθηματικών με την πραγματικότητα, αφήνουν τη σχέση μάλλον μυστηριώδη. Τέτοιες αντιλήψεις, για αυτό το λόγο, δεν είναι πλήρεις. Η ενότητα αυτή είναι σχετικά σύντομη εφόσον αντιστοιχεί σε μια συντονισμένη κριτική τεσσάρων απόψεων που έχουν ιδιαίτερα επικριθεί.

Η τελευταία και πιο θεωρητική ενότητα προσφέρει την κατεύθυνση για μια περιγραφή της εν λόγω σχέσης. Παρουσιάζονται τα σημαντικότερα στοιχεία μιας άποψης για τα μαθηματικά ως μελέτης προτύπων ή δομών και διατυπώνεται η πρόταση ότι τα μαθηματικά εφαρμόζονται στην επιστήμη μέσω της ανακάλυψης των μαθηματικών δομών που υπόκεινται του μη μαθηματικού σύμπαντος. Το άρθρο τελειώνει με μια σύγκριση της άποψης αυτής με εκείνη που παρουσιάζεται στο προκλητικό έργο του Hartry Field, *Επιστήμη χωρίς αριθμούς* (*Science without numbers*, 1980).

I

Ένας φίλος μού είπε κάποτε, ότι κατά τη διάρκεια ενός πειράματος σε μάθημα φυσικής, παρατήρησε ένα φαινόμενο (πέραν των επιδιώξεων του μαθήματος) που τον προβλημάτισε. Όταν ζήτησε μια εξήγηση, ο υπεύθυνος του εργαστηρίου έγραψε ένα ολοκλήρωμα στον πίνακα και είπε ότι το φαινόμενο συνέβη διότι η συνάρτηση που ορίζεται από το ολοκλήρωμα μηδενίζεται για μία συγκεκριμένη τιμή. Ο φίλος μου με πληροφόρησε ότι προβληματίστηκε ακόμη περισσότερο από το γεγονός ότι ο μηδενισμός μιας συνάρτησης ολοκληρώματος θεωρείται εξήγηση ενός φυσικού συμβάντος, στο πλαίσιο όμως του μαθήματος δεν μπορούσε να επιμείνει περισσότερο στο θέμα. Θα ήθελα, εκ μέρους του, να επιμείνω εγώ περισσότερο σε αυτό το σημείο.

Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι συχνά η επιστημονική εξήγηση ενός φυσικού γεγονότος δεν είναι τίποτα παραπάνω από μια μαθηματική «περιγραφή». Πράγματι, μεγάλο μέρος του θεωρητικού έργου στην επιστήμη συνίσταται στην κατασκευή (ή την ανακάλυψη) μαθηματικών μοντέλων για τα

---

[*] Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους Mike Resnik, John Corcoran, Robert Kraut, Mark Steiner, και Bill Lycan για πολλά χρήσιμα σχόλια σε προηγούμενες εκδοχές αυτού του άρθρου και για την ενθάρρυνση τους στο να συνεχίσω το πρόγραμμα. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω, ομαδικά, τα μέλη του συμποσίου στο Kenyon, του σεμιναρίου φιλοσοφίας στο πανεπιστήμιο του Ohio, του σεμιναρίου λογικής στο Buffalo, και του σεμιναρίου φιλοσοφίας στο Εβραϊκό Πανεπιστήμιο, γιατί αφιέρωσαν στο πρόγραμμα αυτό μία συνεδρίαση και συνεισέφεραν πολλά συνετά και χρήσιμα σχόλια.

[†] Το πρωτότυπο αγγλικό κείμενο δημοσιεύτηκε στο περιοδικό *Philosophy of Science* **50** (1983), σσ. 523-548, με τίτλο "Mathematics and Reality". Η παρούσα ελληνική μετάφραση δημοσιεύτηκε στο περιοδικό *Δευκαλίων* **23/2**, Δεκέμβριος 2005, σσ. 345-376.

φυσικά φαινόμενα. Πολλά από τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι επιστήμονες και οι μηχανικοί περιγράφονται ως η ανάγκη να βρεθεί η σωστή διαφορική εξίσωση, ο σωστός τύπος, η σωστή συνάρτηση, ή το σωστό ολοκλήρωμα που θα συσχετιστεί με μια κατηγορία φαινομένων.

Αυστηρά μιλώντας, μια μαθηματική περιγραφή, ένα μοντέλο, μια δομή, μια θεωρία ή οτιδήποτε άλλο, δεν μπορεί να χρησιμεύσει ως εξήγηση ενός μη μαθηματικού συμβάντος χωρίς να έχει αποτιμηθεί η σχέση των μαθηματικών καθ' εαυτών με την επιστημονική πραγματικότητα καθ' εαυτή. Χωρίς μια τέτοια αποτίμηση δεν είναι σαφές με ποιον τρόπο οι "επιστημονικές εξηγήσεις" εξηγούν επιτυχώς οτιδήποτε. Με άλλα λόγια, δεν μπορεί κανείς να εξηγήσει πώς η επιστήμη συμβάλλει στη γνώση χωρίς να έχει εξηγήσει τη σχέση της μαθηματικής-επιστημονικής δραστηριότητας με την πραγματικότητα, στη γνώση της οποίας συμβάλλει η επιστήμη. Το πρόβλημα αυτό γίνεται ιδιαίτερα σημαντικό στο πλαίσιο της φιλοσοφίας της επιστήμης και της φιλοσοφίας των μαθηματικών.

Σχεδόν για κάθε πεδίο μελέτης, υπάρχει ένας κλάδος της φιλοσοφίας, που ονομάζεται η «φιλοσοφία του» πεδίου αυτού. Αν και το ενδιαφέρον μας περιορίζεται στις επιστήμες και στα μαθηματικά, θα ήταν χρήσιμο να κάνουμε μερικά σύντομα σχόλια σχετικά με τη φιλοσοφία ενός τυχόντος πεδίου Χ.

Εφόσον ο βασικός σκοπός ενός δεδομένου πεδίου μελέτης είναι να συμβάλει στη γνώση, η φιλοσοφία του Χ είναι, κατά ένα τουλάχιστον μέρος, κλάδος της γνωσιολογίας. Σκοπός της είναι να εκθέσει τους στόχους, τη μεθοδολογία και το αντικείμενο του Χ. Ειδικότερα, ένας φιλόσοφος του Χ προσπαθεί να περιγράψει τη δραστηριότητα του Χ, και να δείξει πώς αυτή η δραστηριότητα πετυχαίνει τους στόχους της -δηλαδή, πώς η δραστηριότητα του Χ συνεισφέρει στη γνώση του αντικειμένου του Χ.

Η φιλοσοφία του Χ, εάν γίνει αντιληπτή με αυτό τον τρόπο, δεν θα θεωρείται πεδίο απομονωμένο από την πρακτική του Χ. Θα ήταν ορθότερο να πούμε ότι η φιλοσοφία του Χ ασκείται από ανθρώπους που ενδιαφέρονται για το Χ ώστε να περιγράψουν και να αξιολογήσουν τη δραστηριότητά του, τις επιτυχίες και τις αποτυχίες του, καθώς και τη σπουδαιότητά του. Επομένως, ο ειδικός του Χ θα πρέπει να έχει κάποιο κέρδος υιοθετώντας μια τέτοια φιλοσοφία. Η φιλοσοφία που υιοθετεί θα πρέπει να τον προσανατολίζει στη δουλειά του παρέχοντάς του ξεκάθαρη εικόνα του τι προσπαθεί να καταφέρει και του πώς η πρακτική του συμβάλλει σε αυτό.

Σε πάρα πολύ γενικές γραμμές, ο στόχος της επιστήμης είναι να κατανοήσει ποικίλες όψεις (για παράδειγμα, φυσικές, χημικές, συμπεριφορικές) του κόσμου. Αν εξαιρέσουμε τους Πυθαγόρειους, αυτός ο κόσμος είναι εκ πρώτης όψεως μη μαθηματικός. Η μεθοδολογία της επιστήμης, όμως, περιλαμβάνει πολλά μαθηματικά. Θα πρέπει συνεπώς μια αποτίμηση του πώς η επιστημονική μεθοδολογία πετυχαίνει τους στόχους της, να αφορά και το πώς τα μαθηματικά μπορούν να συμβάλλουν στην κατανόηση του εκ πρώτης όψεως μη μαθηματικού επιστημονικού κόσμου.

Το πρόβλημα μπορεί να ανακύψει σε αρκετά επίπεδα. Μπορεί να ξεκινήσει όταν κάποιος αναρωτηθεί πώς είναι δυνατόν ένα *ιδιαίτερο* μαθηματικό γεγονός να χρησιμεύσει ως εξήγηση ενός μη μαθηματικού συμβάντος. Αυτό συνέβη, για παράδειγμα, όταν ο φίλος μου προβληματίστηκε από το πώς ο μηδενισμός μιας ορισμένης συνάρτησης για ορισμένη τιμή μπορεί να εξηγήσει ένα φυσικό συμβάν. Στην περίπτωση αυτή, η απάντηση μπορεί να συνίσταται σε μια λεπτομερή περιγραφή της σχετικής επιστημονικής *θεωρίας* η οποία συνδέει μια ορισμένη κλάση συναρτήσεων με μια κλάση φυσικών φαινομένων.[1] Ένα ερώτημα διαφορετικού επιπέδου μπορεί να προκύψει τότε, όπως τι σχέση μπορεί να έχει μια κλάση μαθηματικών αντικειμένων (όπως συναρτήσεις, απειροσύνολα ή διατεταγμένα ζεύγη) με φυσικά φαινόμενα. Εδώ, η έρευνα αφορά τη συνάφεια της δεδομένης μαθηματικής-επιστημονικής θεωρίας. Μία δυνατή απάντηση στο δεύτερο ερώτημα θα ήταν να επισημάνουμε ότι παρεμφερείς χρήσεις των μαθηματικών παίζουν σημαντικό ρόλο στην επιστημονική μεθοδολογία. Όταν αυτό -το όλο εγχείρημα- τεθεί υπό αμφισβήτηση, αρκεί να τονίσει κάποιος την τεράστια επιτυχία της μεθοδολογίας στην πρόβλεψη και τον έλεγχο του κόσμου.

Η τελευταία απάντηση εξηγεί ξεκάθαρα γιατί κάποιος μπορεί να ασχοληθεί με τη μαθηματική/επιστημονική έρευνα και (μέσα στα όρια που θέτουν οι καθιερωμένοι χιουμιανοί προβληματισμοί) παρέχει τη σιγουριά ότι η μεθοδολογία θα συνεχίσει να προβλέπει και να ελέγχει. Ωστόσο, μια τέτοια δήλωση δεν θα έπρεπε να ικανοποιεί τον επιστημολόγο/φιλόσοφο της επιστήμης, δουλειά του οποίου είναι να αναλύσει την επιστημονική εξήγηση και, ειδικότερα, να δείξει πώς και γιατί η μαθηματική μεθοδολογία επιτυγχάνει στην πρόβλεψη και στον έλεγχο του μη μαθηματικού κόσμου.

Στη φιλοσοφία των μαθηματικών, η κατάσταση δεν είναι διόλου τόσο ξεκάθαρη. Εφόσον τα περισσότερα μαθηματικά (στην πραγματικότητα, σχεδόν όλα) δεν έχουν κατευθυντήριο σκοπό τους την κατανόηση του μη μαθηματικού κόσμου, μπορεί πιθανότατα να αποτιμηθεί η δραστηριότητα και

[1] Θα μπορούσε να προτείνει κανείς στον ερωτώντα ότι αν θέλει να καταλάβει πλήρως την απάντηση θα πρέπει να παρακολουθήσει μερικά μαθήματα.

οι στόχοι των περισσότερων τουλάχιστον μαθηματικών χωρίς καν να αναφερθούμε στη δυνατότητα μιας σχέσης με τη μη μαθηματική πραγματικότητα. Αυτό συμβαίνει, παραδείγματος χάριν, με τις παραδοσιακές σχολές της φιλοσοφίας των μαθηματικών, οι οποίες εξετάζονται στην επόμενη ενότητα. Ωστόσο, εάν οποιαδήποτε τέτοια φιλοσοφία θεωρείται πλήρης, θα πρέπει να προϋποθέτει μια αυστηρή διάκριση, μια διάκριση είδους, μεταξύ των καθαρών μαθηματικών και των λεγομένων «εφαρμοσμένων μαθηματικών» – των μαθηματικών που αποβλέπουν στον μη μαθηματικό κόσμο. Τα τελευταία θα αποτελούν τότε ξεχωριστό θέμα.

Η φράση «εφαρμοσμένα μαθηματικά» είναι διφορούμενη. Η μία σημασία του όρου αναφέρεται σε ιδιαίτερους *κλάδους* των μαθηματικών, όπως οι θεωρίες των εφαρμοσμένων διαφορικών εξισώσεων, η αριθμητική ανάλυση και η μαθηματική βιολογία. Τέτοιου είδους κλάδοι συγκροτούν συχνά σημαντικά τμήματα των επιστημονικών θεωριών. Η άλλη σημασία των «εφαρμοσμένων μαθηματικών» αφορά την άτυπη χρήση των μαθηματικών εννοιών και μεθόδων στην επιστήμη, στην τεχνολογία, ή στην καθημερινή ζωή. Η χρήση αυτή συμπεριλαμβάνει δραστηριότητες όπως υπολογισμούς φυσικών σταθερών και έλεγχο ισολογισμών.

Ουσιαστικά, εντός των μαθηματικών αυτών καθ' εαυτών, το γεγονός είναι ότι οποιαδήποτε διάκριση μεταξύ «καθαρών» κλάδων και «εφαρμοσμένων» κλάδων είναι τεχνητή. Εάν κάποιος εξετάσει την πρακτική, τα γραπτά και τα εγχειρίδια των καθαρών και των εφαρμοσμένων μαθηματικών, θα βρει περισσότερες ομοιότητες παρά διαφορές όσον αφορά βασικές πλευρές τους όπως είναι οι στόχοι, οι τεχνικές, η λογική, ακόμα και το αντικείμενο τους. Εκτός αυτού, ακόμα και αν η καθημερινή εργασία του καθαρού μαθηματικού δεν στοχεύει απ' ευθείας στην κατανόηση της μη μαθηματικής πραγματικότητας, οι κλάδοι των επονομαζόμενων εφαρμοσμένων μαθηματικών δεν έχουν το μονοπώλιο συνάφειας με τον επιστημονικό κόσμο. Όπως αναφέρει ο Nicolas Goodman:

> … οι περισσότεροι κλάδοι των μαθηματικών ρίχνουν φως ευθέως σε κάποιο τμήμα της φύσης. Η γεωμετρία αφορά το χώρο. Η θεωρία των πιθανοτήτων μας διδάσκει για τις τυχαίες διαδικασίες. Η θεωρία ομάδων φωτίζει τη συμμετρία. Η λογική περιγράφει τον ορθολογικό συλλογισμό. Πολλά μέρη της ανάλυσης δημιουργήθηκαν για να μελετηθούν ειδικές φυσικές διαδικασίες και είναι ακόμα απαραίτητα για τη μελέτη αυτών των διαδικασιών. ... Αποτελεί πρακτική αλήθεια ότι τα καλύτερα θεωρήματά μας δίνουν πληροφορίες για τον συγκεκριμένο κόσμο (1979, σελ. 550).

Θα μπορούσε να προστεθεί ότι πολλοί κλάδοι των εφαρμοσμένων μαθηματικών, όπως η θεωρία των εφαρμοσμένων διαφορικών εξισώσεων, είναι άμεσα παρακλάδια περιοχών των καθαρών μαθηματικών και ότι, περιστασιακά, ανακαλύπτονται εφαρμογές σε περιοχές των καθαρών μαθηματικών, όπως η άλγεβρα ή η μιγαδική ανάλυση. Συμπεραίνω ότι δεν υπάρχει σημαντική ή φιλοσοφικά διαφωτιστική διάκριση που πρέπει να γίνει μεταξύ των κλάδων των καθαρών μαθηματικών και των κλάδων των εφαρμοσμένων μαθηματικών.

Η άτυπη χρήση, βεβαίως, των μαθηματικών εννοιών και μεθόδων, δεν μοιάζει πάντοτε τόσο πολύ με τη μεθοδολογία των καθαρών μαθηματικών. Ο επιστήμονας, για παράδειγμα, συχνά βασίζεται σε προσεγγιστικές διαδικασίες, όπως είναι οι λεγόμενοι «παράγοντες ad hoc προσαρμογής» ("fudge factors"), και οι εμπειρικές καμπύλες. Επιπλέον, μεγάλο μέρος των συλλογισμών που κάνει είναι λίγο-πολύ επαγωγικοί. Ωστόσο, ακόμα κι αυτά τα μαθηματικά, έχουν τις ρίζες τους στα καθαρά μαθηματικά και συνήθως στην αριθμητική ή την πραγματική ανάλυση. Οι εμπλεκόμενες μαθηματικές έννοιες περιλαμβάνουν φυσικούς ή πραγματικούς αριθμούς, αριθμοθεωρητικές συναρτήσεις, και σχετικές αριθμητικές κατασκευές. Οι προσεγγιστικές διαδικασίες αντιμετωπίζονται ως μέθοδοι οι οποίες θα έπρεπε τελικώς να μπορούν να εγκαταλειφθούν (τουλάχιστον κατ' αρχήν). Καταλήγω λοιπόν στο ότι θα ήταν λάθος να υιοθετήσουμε μια φιλοσοφία η οποία θα διαχωρίζει έστω και αυτή τη χρήση των μαθηματικών από τη δουλειά του καθαρού μαθηματικού.

Τέλος, η φιλοσοφία των μαθηματικών δεν θα έπρεπε να παρέχει μόνο μια εσωτερικά συνεκτική περιγραφή των μαθηματικών στόχων και πρακτικής, αλλά και να αξιολογεί τη σπουδαιότητα των μαθηματικών. Με άλλα λόγια, μια φιλοσοφία των μαθηματικών δεν θα έπρεπε να εξηγεί μόνο τι κάνει ο μαθηματικός, αλλά επίσης και γιατί κάνει ό,τι κάνει, και ειδικότερα, πώς η μαθηματική γνώση σχετίζεται με τη γενική γνώση. Κάτι τέτοιο μπορεί να επιτευχθεί μόνο με μια προσέγγιση των μαθηματικών η οποία δεν συσκοτίζει ούτε αρνείται τις σχέσεις μεταξύ των μαθηματικών και της επιστήμης.

II

Στην ενότητα αυτή, η προσοχή στρέφεται σε μερικές από τις σημαντικότερες, παραδοσιακές σχολές της φιλοσοφίας των μαθηματικών: τον φορμαλισμό, τον λογικισμό, τον πλατωνισμό και τον ιντουισιονισμό. Για λόγους συντομίας, εξετάζονται μόνο οι καθιερωμένες διατυπώσεις τους. Θα δειχθεί ότι καμία τους δεν παρέχει ούτε καν την κατεύθυνση για μια αποτίμηση της σχέσης μεταξύ μαθηματικών και επιστημονικής πραγματικότητας, και, επιπλέον, κάποιες φαίνεται να υπαινίσσονται ότι δεν υπάρχει καν τέτοια σχέση. Οι διάφορες αδυναμίες τους καθώς και τα δυνατά σημεία τους που δεν σχετίζονται με ό,τι μας ενδιαφέρει παραβλέπονται. Η εξέταση του *Επιστήμη χωρίς αριθμούς* του Hartry Field αναβάλλεται μέχρι το παράρτημα της τελευταίας ενότητας.

1. Για τις παρούσες προθέσεις μας, είναι πιο εύκολο να ασχοληθούμε με τον *φορμαλισμό*, τουλάχιστον στις ακραίες εκδοχές του. Αυτή η φιλοσοφική σχολή θεωρεί ότι τα μαθηματικά δεν αποτελούνται από τίποτα περισσότερο πέραν του χειρισμού χαρακτήρων σύμφωνα με κανόνες. Δηλαδή, οι τύποι των μαθηματικών θεωρούνται ότι είναι σειρές χαρακτήρων χωρίς νόημα και όχι γνήσια σύμβολα (τα οποία συμβολίζουν κάτι). Ένα θεώρημα της αριθμητικής, για παράδειγμα, δεν αντιπροσωπεύει κάποιο γεγονός για τους φυσικούς αριθμούς (ή οτιδήποτε άλλο για αυτούς). Ένα τέτοιο θεώρημα είναι μάλλον το αποτέλεσμα μιας σειράς χειρισμών σύμφωνα με τους κανόνες της αριθμητικής. Επιπλέον, οι κανόνες των διαφόρων κλάδων των μαθηματικών συχνά θεωρείται ότι επιλέγονται αυθαίρετα. Από αυτή την άποψη, ένας μαθηματικός κλάδος μπορεί να θεωρηθεί ως παιχνίδι που παίζεται με τυπογραφικούς χαρακτήρες, και μια απόδειξη θεωρήματος του κλάδου ως σωστός τρόπος να παίζει κανείς το παιχνίδι.[2]

Εάν η περιγραφή αυτή των μαθηματικών είναι σωστή, τότε πρέπει να είναι τυχαία σύμπτωση οποιαδήποτε συστηματική αντιστοίχηση ή σχέση μεταξύ των θεωρημάτων ενός μαθηματικού κλάδου και γεγονότων του κόσμου. Ένας μαθηματικός (ή επιστήμονας) που μελετά και αποδεικνύει θεωρήματα, για παράδειγμα, στην πραγματική ανάλυση, δεν μπορεί εύλογα να ελπίζει ότι τα θεωρήματα αυτά θα φωτίσουν οποιοδήποτε κομμάτι της πραγματικότητας πέραν των κανόνων της πραγματικής ανάλυσης, ακριβώς όπως ένας σκακιστής, που μελετά και αποδεικνύει θεωρήματα για το πώς μπορεί να τελειώσει μια παρτίδα σκάκι, δεν περιμένει τα αποτελέσματά του να φωτίσουν οτιδήποτε από την πραγματικότητα πέραν των κανόνων του σκακιού. Φαίνεται ότι ένας ακραίος, παραδοσιακός φορμαλιστής πρέπει ουσιαστικά να αρνείται μια συστηματική και τακτική σύνδεση μεταξύ μαθηματικών και μη μαθηματικής (δηλαδή μη τυπικής) πραγματικότητας.[3]

Βεβαίως, είναι δυνατόν κάποιος να απορρίψει απλώς τον ισχυρισμό ότι η επιλογή των κανόνων ενός μαθηματικού κλάδου είναι πάντοτε αυθαίρετη, χωρίς να απορρίψει τις κυριότερες αρχές του φορμαλισμού. Θα μπορούσε κάποιος να υποστηρίξει, για παράδειγμα, ότι, τουλάχιστον σε μερικές περιπτώσεις, οι κανόνες για τον χειρισμό των χαρακτήρων επιλέγονται, είτε ρητά είτε σιωπηρά, σε συμφωνία με μια επιστημονική θεωρία. Αυτός ο φορμαλιστής μπορεί να ισχυριστεί ότι ένας μαθηματικός κλάδος όπως η πραγματική ανάλυση εφαρμόζεται, λόγου χάριν, στη φυσική, μέσω μιας απεικόνισης της γλώσσας της πραγματικής ανάλυσης στη γλώσσα της φυσικής. Η απεικόνιση, ασφαλώς, πρέπει να αποδίδει θεωρήματα και ορθά συμπεράσματα της φυσικής σε αξιώματα και ορθά συμπεράσματα της πραγματικής ανάλυσης.[4]

Το προτέρημα αυτής της διατύπωσης του φορμαλισμού είναι πως δεν ισχυρίζεται ότι είναι αδύνατες οι συστηματικές συνδέσεις μεταξύ μαθηματικών και πραγματικότητας, δεν προχωρεί όμως και στην εξήγησή τους. Εκτός αυτού, προϋποθέτει αυστηρή διάκριση μεταξύ καθαρών μαθηματικών και εφαρμοσμένων μαθηματικών: τα καθαρά μαθηματικά αποτελούνται από εκείνους τους κλάδους των οποίων οι κανόνες είναι πράγματι αυθαίρετοι· τα εφαρμοσμένα μαθηματικά από εκείνους των οποίων οι γλώσσες απεικονίζονται σε μια γλώσσα επιστήμης ή, με άλλα λόγια, από εκείνους των οποίων οι κανόνες αντιστοιχούν σε κάποιους από τους κανόνες μιας επιστημονικής γλώσσας. Ωστόσο, όπως συμπεράναμε στην προηγούμενη ενότητα, μια τέτοια διάκριση είναι τεχνητή. Παραβλέπει τις στενές συνδέσεις και ομοιότητες μεταξύ των μαθηματικών κλάδων. Εάν οι κανόνες των κλάδων των εφαρμοσμένων μαθηματικών είναι στενά συνδεδεμένοι με τις γλώσσες της επιστήμης, τότε το ίδιο

---

[2] Διαφορετικές φορμαλιστικές απόψεις υποστηρίζουν οι Cohen (1971), Curry (1958) και Robinson (1965). Βλ. Resnik (1980, κεφ.2) για μια εξέταση της ιστορικής ανάπτυξης του φορμαλισμού.

[3] Μια παρόμοια αντίρρηση προβάλλει και ο Frege:

> Μια αριθμητική που δεν διαθέτει σκέψη ως περιεχόμενό της, δεν θα διαθέτει επίσης και δυνατότητα εφαρμογής. Γιατί δεν μπορεί να υπάρξει καμία εφαρμογή ενός σχηματισμού από πιόνια σκακιού; Διότι προφανώς δεν εκφράζει καμία σκέψη. ... Γιατί οι αριθμητικές εξισώσεις μπορούν να εφαρμοστούν; Μόνο διότι εκφράζουν σκέψεις. Πώς θα ήταν δυνατό να εφαρμόσουμε μια εξίσωση η οποία δεν θα εξέφραζε τίποτα και δεν θα ήταν τίποτα περισσότερο από μια ομάδα ψηφίων που, σύμφωνα με κάποιους κανόνες, θα μετασχηματιστεί σε μια άλλη ομάδα ψηφίων; (1903, ενότητα 91)

Βλ. Resnik (1980, σελ. 62-63) για σχολιασμό αυτού του αποσπάσματος.

[4] Αυτή η περιγραφή των μαθηματικών και της επιστήμης είναι ίσως συμβατή με κάποιες απόψεις στη φιλοσοφία της γλώσσας οι οποίες αναλύουν το νόημα, τουλάχιστον εν μέρει, με όρους δυνατής συναγωγής. Βλ., για παράδειγμα, Harman (1975) και Dummett (1973).

ισχύει και για τους κανόνες των καθαρών μαθηματικών. Δουλειά της φιλοσοφίας είναι να εξηγήσει αυτές τις συνδέσεις, και όχι απλώς να παρατηρήσει ότι μπορούν ή πρέπει να υπάρχουν. Ο φορμαλισμός *αυτός καθ' εαυτόν* δεν κάνει και ίσως δεν μπορεί να κάνει κάτι τέτοιο.

2. Το σύνθημα του *λογικισμού* είναι «τα μαθηματικά είναι λογική». Ουσιαστικά υπάρχουν δύο απόψεις που φέρουν το όνομα αυτό. Τη μία την ονομάζουμε «μεταφραστικό λογικισμό» (translation logicism) και την άλλη «αιτηματικό λογικισμό» (postulate logicism). Αν και οι δύο απόψεις μάλλον σχετίζονται, η αιτηματική εκδοχή είναι περισσότερο συμβατή όσον αφορά τις συνδέσεις των μαθηματικών με την επιστήμη.

(i) Μεταφραστικός λογικισμός είναι η άποψη ότι αν δοθούν κατάλληλοι ορισμοί στους μαθηματικούς όρους, οι *ίδιες* οι μαθηματικές προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς, αποκλειστικά και μόνο λόγω των μορφών τους. Με άλλα λόγια, οι μαθηματικές αλήθειες, εάν κατανοηθούν σωστά, είναι λογικές αλήθειες.[5]

Ο μεταφραστικός λογικισμός, όπως και ο ακραίος φορμαλισμός, αρνείται ευθέως τη δυνατότητα μιας συστηματικής σχέσης μεταξύ θεωρημάτων ενός μαθηματικού κλάδου και περιοχών της επιστημονικής πραγματικότητας. Υποστηρίζει ότι κάθε μαθηματικό θεώρημα είναι, στην πραγματικότητα, μια λογική αλήθεια. Όμως, οι περιγραφές των άξιων προσοχής φυσικών φαινομένων δεν είναι ποτέ αληθείς χάρη στις μορφές τους, και έτσι δεν μπορούν να εξηγηθούν ουσιαστικά από λογικές αλήθειες. Για παράδειγμα, εάν το μαθηματικό γεγονός ότι μία συγκεκριμένη συνάρτηση μηδενίζεται για μία ορισμένη τιμή αποτελεί πράγματι λογική αλήθεια, τότε δεν μπορεί να αναπαραστήσει, να περιγράψει ή να εξηγήσει επί της ουσίας το φυσικό φαινόμενο που προβλημάτισε τον φίλο μου.[6] Το συμπέρασμά μου είναι ότι ο μεταφραστικός λογικισμός, ως φιλοσοφία των μαθηματικών, πρέπει να απορριφθεί.

(ii) Αιτηματικός λογικισμός είναι η άποψη ότι τα μαθηματικά δεν αποτελούν τίποτα περισσότερο από μια μελέτη των λογικών συνεπειών ανερμήνευτων συνόλων από αξιώματα. Ένας μαθηματικός κλάδος, εάν κατανοηθεί έτσι, δεν έχει προκαθορισμένο περιεχόμενο, όπως οι φυσικοί αριθμοί, ο ευκλείδειος χώρος, ή το συνολοθεωρητικό σύμπαν. Αντιθέτως, όλοι οι πρωταρχικοί (μη λογικοί) όροι των μαθηματικών εκλαμβάνονται χωρίς ερμηνεία και κατά συνέπεια χωρίς σταθερό νόημα.

Σύμφωνα με αυτή την εκδοχή του λογικισμού, ένας μαθηματικός κλάδος μπορεί «να πραγματεύεται» οποιαδήποτε ερμηνεία των πρωταρχικών του όρων η οποία ικανοποιεί όλα τα αξιώματά του. Έπεται ότι μπορεί να επιτευχθεί μια συστηματική αντιστοιχία μεταξύ θεωρημάτων ενός μαθηματικού κλάδου και δεδομένων της πραγματικότητας μέσω μιας ερμηνείας της γλώσσας του στη μη μαθηματική πραγματικότητα. Πράγματι, είναι ξεκάθαρο ότι κάποιοι μαθηματικοί κλάδοι, όπως η ευκλείδεια γεωμετρία, αναπτύχθηκαν έχοντας κατά νου μία ερμηνεία των πρωταρχικών όρων. Τουλάχιστον για αυτούς τους κλάδους, ο αιτηματικός λογικισμός εξηγεί με επιτυχία τις συνδέσεις μεταξύ μαθηματικών και πραγματικότητας. Εάν η ερμηνεία καθιστά τα αξιώματα αληθή, τότε και τα θεωρήματα, κάτω από την ίδια ερμηνεία, θα είναι αληθή. Σύμφωνα με την άποψη αυτή, λοιπόν, ο ρόλος των μαθηματικών στην επιστήμη είναι να αποκαλύπτουν λογικές συνδέσεις μεταξύ κάποιων επιστημονικών προτάσεων.

Η εκδοχή αυτή του λογικισμού, όπως και ο φορμαλισμός, προϋποθέτει αυστηρή διάκριση μεταξύ των εφαρμοσμένων και των καθαρών μαθηματικών, με τα εφαρμοσμένα μαθηματικά να αποτελούνται από εκείνους τους κλάδους των οποίων οι πρωταρχικοί όροι έχουν δεχθεί ερμηνεία, και τα καθαρά μαθηματικά από εκείνους των οποίων οι πρωταρχικοί όροι δεν έχουν ερμηνευθεί. Για μία ακόμη φορά, μια διάκριση τέτοιου είδους παραβλέπει με τεχνητό τρόπο τις σημαντικές συνδέσεις μεταξύ των μαθηματικών κλάδων.

---

[5] Συγγενικές απόψεις υποστηρίζονται από τους Ayer (1946) και Hempel (1945) οι οποίοι πιστεύουν ότι οι μαθηματικές αλήθειες, εάν κατανοηθούν σωστά, είναι αναλυτικές. Τα σχόλια που ακολουθούν με μικρές τροποποιήσεις ισχύουν και για τις δικές τους απόψεις.

[6] Ο Glymour (1980) υποδεικνύει ότι μερικά φυσικά φαινόμενα περιγράφονται ικανοποιητικά από λογικές αλήθειες εάν γίνουν κάποιες θεωρητικές ταυτοποιήσεις (identifications). Το παράδειγμα που δίνει είναι μάλλον απλό: Εξήγηση του ότι η θερμοκρασία ενός αερίου και η μέση κινητική του ενέργεια έχουν ανάλογες τιμές αποτελεί το γεγονός ότι η θερμοκρασία *είναι* μέση κινητική ενέργεια και, ως εκ τούτου, το φαινόμενο είναι ένα παράδειγμα του νόμου της ταυτότητας. Βεβαίως, και αν ακόμα το σχόλιο του Glymour είναι σωστό, η εξήγηση συνίσταται στις θεωρητικές ταυτοποιήσεις, και όχι στο νόμο της ταυτότητας. Μια προσπάθεια στο πνεύμα των παραπάνω να διασωθεί ο μεταφραστικός λογικισμός θα αποτελούσε ο ισχυρισμός ότι κάθε φορά που ένα μαθηματικό γεγονός χρησιμοποιείται για να εξηγήσει ένα φυσικό φαινόμενο, μια σειρά θεωρητικών ταυτοποιήσεων ανάγει πραγματικά το φαινόμενο σε λογική αλήθεια. Δεν θα επιμείνω εδώ περισσότερο σε αυτή την προσπάθεια διάσωσης.

Δεύτερον, η παρούσα άποψη εξηγεί μόνο τις εφαρμογές που περιλαμβάνουν μαθηματικούς κλάδους με άμεσες ερμηνείες των γλωσσών τους. Ωστόσο η εφαρμογή των μαθηματικών εκτείνεται πολύ πιο πέρα από αυτό. Κάποια πεδία, όπως οι μη ευκλείδειες γεωμετρίες και η αφηρημένη άλγεβρα, δεν διαθέτουν ξεκάθαρες, άμεσες ερμηνείες, όπως είναι όμως ευρέως γνωστό ρίχνουν φως σε πολλές όψεις της πραγματικότητας (όσον αφορά τη θεωρία ομάδων, βλ. Budden 1972). Πράγματι, και τα δύο αυτά πεδία αποτελούσαν πολύ καλά ανεπτυγμένους μαθηματικούς κλάδους πριν ανακαλυφθούν οι εφαρμογές τους. Για τον αιτηματικό λογικιστή, οι πρωταρχικοί όροι αυτών των κλάδων μόνο αυθαίρετοι μπορούν να θεωρηθούν, τουλάχιστον αρχικά. Η ποικιλία και το βάθος των εφαρμογών πρέπει να είναι μια μεγάλη σύμπτωση. Συνεπώς, αν η άποψη αυτή για τα μαθηματικά είναι σωστή, τότε οι θεμελιωτές των μαθηματικών κλάδων φαίνεται να διαθέτουν μια μυστηριώδη ικανότητα να επιλέγουν αξιωματικά συστήματα τα οποία ρίχνουν φως με έμμεσο τρόπο σε τμήματα της πραγματικότητας.

Τέλος, η παρούσα άποψη εξηγεί την εφαρμογή ενός μαθηματικού κλάδου μόνο όταν *όλοι* οι πρωταρχικοί όροι του ερμηνευτούν με τρόπο που ικανοποιεί όλα τα αξιώματά του. Υπάρχουν κλάδοι, παρ' όλα αυτά, οι οποίοι διαθέτουν εφαρμογές έστω και αν κάποιοι από τους πρωταρχικούς όρους τους δεν έχουν ερμηνεία στη μη μαθηματική πραγματικότητα. Ένα εξαιρετικό παράδειγμα είναι η μιγαδική ανάλυση. Η χρήση του όρου «φανταστικός αριθμός» από μόνη της υποδηλώνει ότι δεν δίνεται άμεση ερμηνεία σε αυτά τα μαθηματικά αντικείμενα, ωστόσο η θεωρία είναι χρήσιμη στους φυσικούς και στους μηχανικούς. Ένα συναφές φαινόμενο είναι η περιστασιακή χρήση μιας «ανερμήνευτης» θεωρίας, όπως η θεωρία συνόλων, για να λυθούν προβλήματα που εκκρεμούν σε μια ασθενέστερη θεωρία, όπως η αριθμητική. Κάποια από τα αποτελέσματα αυτά έχουν εφαρμογές στη θεωρία αναδρομικών συναρτήσεων και ως εκ τούτου στην υπολογισιμότητα (computability). Θα δυσκολευόταν να βρει κάποιος μια ερμηνεία των πρωταρχικών όρων της θεωρίας συνόλων στη μη μαθηματική πραγματικότητα που να την σχετίζει με την υπολογισιμότητα. Εν πάση περιπτώσει, ο αιτηματικός λογικισμός δεν εξηγεί αυτές τις εφαρμογές.

3. *Πλατωνισμός* είναι η άποψη ότι αντικείμενο μελέτης των μαθηματικών αποτελεί ένα άυλο και μη νοητικό βασίλειο ή σύμπαν το οποίο υπάρχει ανεξάρτητα από τον φυσικό κόσμο. Σύμφωνα με την άποψη αυτή, οι μαθηματικοί ισχυρισμοί εκλαμβάνονται κατά λέξη ως δηλώσεις για αυτό το μαθηματικό σύμπαν. Ο ισχυρισμός ότι, για παράδειγμα, υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί, γίνεται κατανοητός ως έκφραση ενός γεγονότος για την ανεξάρτητη επικράτεια των φυσικών αριθμών, του γεγονότος πως άπειροι από αυτούς τους αριθμούς είναι πρώτοι. Στον Gödel (1964) θα βρούμε μία από τις πιο σαφείς και από τις πιο σημαντικές, όσον αφορά την επιρροή της, παρουσιάσεις του μαθηματικού πλατωνισμού.

Εάν συλλάβουμε με αυτό τον τρόπο τα μαθηματικά, τότε μια σχέση μεταξύ αυτών και της φυσικής πραγματικότητας, ισοδυναμεί με μια σχέση μεταξύ του μαθηματικού σύμπαντος και του φυσικού σύμπαντος. Ωστόσο, ο πλατωνιστής φαίνεται να πιστεύει ότι η ύπαρξη του μαθηματικού κόσμου είναι χωριστή και ανεξάρτητη από τον φυσικό κόσμο. Η ανεξάρτητη ύπαρξη των δύο κόσμων, βεβαίως, δεν συνεπάγεται ότι δεν σχετίζονται. Επομένως, ο πλατωνισμός από μόνος του δεν συνεπάγεται ότι η μαθηματική γνώση είναι άσχετη με τη γνώση για τον φυσικό κόσμο. Εντούτοις, ο πλατωνισμός ως έχει δεν εξηγεί αυτή τη σχέση, αλλά την αφήνει ουσιαστικά μυστηριώδη. Με άλλα λόγια, το να υποστηρίζεις ότι τα μαθηματικά έχουν να κάνουν με ένα μη φυσικό σύμπαν, το να τονίζεις την ανεξαρτησία αυτού του σύμπαντος από τον υλικό κόσμο, και να *μένεις μόνο σε αυτό*, είναι σαν να αγνοείς, ακόμη και να συσκοτίζεις, μία από τις σημαντικότερες πλευρές των μαθηματικών, τη σπουδαιότητά τους για την επιστημονική κατανόηση του μη μαθηματικού κόσμου.

Ο ίδιος ο Gödel φαίνεται να αναγνωρίζει την ύπαρξη και τη σπουδαιότητα των συνδέσεων με τη φυσική πραγματικότητα. Ως πλατωνιστής, υποστηρίζει ότι μια πρόταση ανεξάρτητη από τα αξιώματα ενός μαθηματικού κλάδου, μπορεί παρόλα αυτά να έχει αληθοτιμή που καθορίζεται από την υπό εξέταση μαθηματική πραγματικότητα. Ο Gödel ισχυρίζεται ότι σε μια τέτοια περίπτωση, ένα πιθανοκρατικό «κριτήριο αλήθειας» μιας πρότασης συνίσταται στη «γονιμότητα της για τα μαθηματικά και, θα μπορούσε να προστεθεί, *ενδεχομένως και για τη φυσική επίσης*» (1964, σ. 272, η έμφαση δική μου). Επίσης, επιφανείς συγγραφείς όπως ο Putnam (1971) και ο Quine, φτάνουν στο σημείο να εκλάβουν τη χρησιμότητα ενός μαθηματικού κλάδου στην επιστήμη ως τεκμήριο ότι τα θεωρήματα αυτού του κλάδου είναι αληθή *για* την ανεξάρτητη επικράτεια των μαθηματικών αντικειμένων. Ωστόσο, είναι ξεκάθαρο ότι η γονιμότητα στην επιστήμη δεν θα μπορούσε να είναι ούτε καν πιθανοκρατικό κριτήριο για τη *μαθηματική* αλήθεια εάν το μαθηματικό σύμπαν δεν σχετιζόταν με την πραγματικότητα που μελετάει η φυσική.

Το πρόβλημα αυτό του μαθηματικού πλατωνισμού μπορεί να παρουσιαστεί ως η σύγχρονη εκδοχή του πλατωνικού προβλήματος της μέθεξης. Στο παρόν πλαίσιο, υπάρχουν ουσιαστικά δύο προβλήματα. Το πρώτο είναι το να αρθρωθεί με ευκρίνεια η σχέση μεταξύ του μαθηματικού σύμπαντος και του φυσικού σύμπαντος· το δεύτερο είναι το να δειχθεί πώς η *γνώση* του πρώτου σύμπαντος συμβάλλει στη γνώση του δεύτερου.[7] Το συμπέρασμά μου είναι ότι ο μαθηματικός πλατωνισμός χρειάζεται περισσότερη επεξεργασία και στους δύο τομείς.

4. Ο *ιντουισιονισμός* ως φιλοσοφική σχολή των μαθηματικών αποδέχεται μια ικανότητα μαθηματικής ενόρασης, απορρίπτει όμως τον πλατωνικό ισχυρισμό ότι η ενόραση αυτή αποτελεί «αντίληψη» ενός αντικειμενικού βασιλείου. Ειδικότερα, υποστηρίζει ότι τα μαθηματικά αντικείμενα, όπως οι αριθμοί, κατασκευάζονται από τον μαθηματικό και, στο βαθμό που αφορά τα μαθηματικά, δεν έχουν ύπαρξη ξέχωρη από τη νόησή του. Για έναν ιντουισιονιστή οι μαθηματικοί ισχυρισμοί απηχούν νοητικές κατασκευές που εκτελούνται σε μαθηματικά αντικείμενα, αντικείμενα τα οποία εξετάζονται και τα ίδια ως νοητικά κατασκευάσματα.

Εάν συλλάβουμε με αυτόν τον τρόπο τα μαθηματικά, ένας άμεσος τρόπος για την αποτίμηση των εφαρμογών τους στην επιστήμη θα ήταν να αξιώσουμε μια σχέση μεταξύ της υλικής πραγματικότητας και του τμήματος του ανθρώπινου νου που κάνει μαθηματικά. Ειδικότερα, θα μπορούσε κάποιος να προσπαθήσει να διατυπώσει και να υπερασπιστεί τη δυνατότητα, η δομή του νου που εκτελεί κατασκευές στα δικά του μαθηματικά κατασκευάσματα, να είναι παρόμοια, ανάλογη, ή σχετική με τη δομή των φυσικών διαδικασιών στην υλική πραγματικότητα.

Ωστόσο, οι ίδιοι οι ιντουισιονιστές δεν προτείνουν κάτι τέτοιο. Πράγματι, με τους ισχυρισμούς ότι τα μαθηματικά είναι υποκειμενικά και ότι η φιλοσοφία των μαθηματικών δεν θα έπρεπε να χρειάζεται μεταφυσικές υποθέσεις, δείχνουν να αποστρέφονται τη δυνατότητα μιας σχέσης με την υλική πραγματικότητα. Επομένως, πιθανότατα θα θεωρούν ότι, στην καλύτερη περίπτωση, είναι απίθανο να επιτύχει αυτό το πρόγραμμα. Επιπλέον, εάν το πρόγραμμα εμπλέκει οντολογικούς ισχυρισμούς γύρω από τα μαθηματικά αντικείμενα, θα συγκρούεται ξεκάθαρα με το βασικό κίνητρο του ιντουισιονισμού.

Μια δεύτερη δυνατότητα για τον ιντουισιονιστή, θα ήταν ίσως να συνδυάσει τις απόψεις του για τα μαθηματικά με μια καντιανή φιλοσοφία της επιστήμης. Ας υποθέσουμε ότι κάποιος υποστηρίζει, ακολουθώντας τον Kant, πως η ανθρώπινη νόηση παίζει ενεργό ρόλο στην αντίληψη και την κατανόηση του κόσμου, ή, με άλλα λόγια, πως ό,τι αντιλαμβάνεται και κατανοεί κανείς είναι τόσο συνάρτηση του ίδιου του ανθρώπινου νου όσο είναι και συνάρτηση των «δεδομένων» που εισάγονται από την εξωτερική πραγματικότητα. Το άτομο που υποστηρίζει μια τέτοια άποψη θα δεχόταν και ότι μια επιστημονική θεωρία δεν είναι απλώς μια θεωρία ενός αντικειμενικού κόσμου ως τέτοιου, αλλά μάλλον μια θεωρία για έναν κόσμο όπως γίνεται αντιληπτός και κατανοητός από τον ανθρώπινο νου.

Αυτή η σύλληψη της επιστήμης φαίνεται να είναι τουλάχιστον στο ίδιο πνεύμα με τον ιντουισιονιστικό ισχυρισμό ότι τα μαθηματικά αποτελούν μελέτη ορισμένων χαρακτηριστικών του ανθρώπινου νου (βλ. Heyting 1956, σ.10). Ο ιντουισιονιστής που αποδέχεται αυτή την άποψη για την επιστήμη ίσως να προσπαθήσει να εξηγήσει την εφαρμογή των μαθηματικών ανακαλύπτοντας μια σχέση μεταξύ της νοητικής δραστηριότητας της μαθηματικής κατασκευής και της νοητικής δραστηριότητας της αντίληψης και της υποκειμενικής κατανόησης.[8] Δηλαδή, ένας ιντουισιονιστής θα μπορούσε να ισχυριστεί ότι είτε οι μαθηματικές κατασκευές αυτές καθ' εαυτές, είτε στενά

---

[7] Το γνωσιολογικό πρόβλημα του πλατωνισμού έχει εδώ ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Γενικά μιλώντας, το πρόβλημα είναι να δειχτεί ποια πρόσβαση έχει ο μαθηματικός σε πληροφορίες για το μαθηματικό σύμπαν και, ως εκ τούτου, να δειχτεί πώς είναι δυνατή η μαθηματική γνώση. Μια συνήθης απάντηση, που προτάθηκε από τον Gödel (1964), είναι να αξιώσουμε μια ικανότητα αντίληψης ή «εποπτείας» (“intuition”) του μαθηματικού κόσμου. Υποστηρίζεται ότι η μαθηματική εποπτεία όσον αφορά τον μαθηματικό κόσμο είναι ανάλογη της αισθητηριακής αντίληψης όσον αφορά τον φυσικό κόσμο – καθεμιά οδηγεί στη διατύπωση θεωριών για έναν αντικειμενικό κόσμο. Το κύριο δεδομένο του παρόντος άρθρου είναι ότι οι περισσότερες από τις θεωρίες μας για τον φυσικό κόσμο διατυπώνονται με μαθηματικούς όρους. Συνεπώς, καθήκον ενός πλατωνιστή τύπου Gödel δεν είναι μόνο να εξηγήσει την οντολογική σχέση μεταξύ του μαθηματικού κόσμου και του φυσικού κόσμου, αλλά να εξηγήσει επίσης την επιστημική σχέση μεταξύ της μαθηματικής εποπτείας και της αισθητηριακής αντίληψης και, έτσι, να δείξει πώς οι θεωρίες που χτίζονται πάνω στην πρώτη συμβάλλουν στις θεωρίες που χτίζονται πάνω στην δεύτερη.

Ο Gödel (1964) φαίνεται, τουλάχιστον εν μέρει, να έχει επίγνωση του προβλήματος. Σε ένα πολυαναφερόμενο απόσπασμα, αναφέρει ότι «τα 'δεδομένα' που υπόκεινται των μαθηματικών έχουν στενή σχέση με τα αφηρημένα στοιχεία που περιέχονται στις εμπειρικές μας ιδέες» (σ. 272). Αυτό υποδηλώνει ότι το τωρινό κενό στον πλατωνισμό μπορεί να συμπληρωθεί μέσω μιας φαινομενολογικής μελέτης της μαθηματικής εμπειρίας, της κοινής αντίληψης και της επιστήμης. Μερικές προκαταρκτικές και υποθετικές προτάσεις για αυτό (βασισμένες σε κάποια δεδομένα της φυσιολογίας και στο έργο της σχολής του Piaget) βρίσκονται στο Maddy (1980).

[8] Όπως μας πληροφορεί η προηγούμενη υποσημείωση, ο Gödel κάνει νύξη για μια τέτοια σχέση στο πλαίσιο του πλατωνισμού και της μαθηματικής αντίληψης.

σχετιζόμενες νοητικές κατασκευές, δεν εμπλέκονται απαραίτητα στον αντικειμενικό κόσμο καθ' εαυτό αλλά στην ανθρώπινη δραστηριότητα κατανόησης του κόσμου. Δεν θα προχωρήσω εδώ σε αυτό το θέμα περισσότερο.

I I I

Ήρθε η ώρα να εγκαταλείψουμε την ακολουθία συστηματικής κριτικής και να κάνουμε μερικές θετικές προτάσεις. Προτείνω εδώ μια δομιστική (structuralist) φιλοσοφία των μαθηματικών η οποία, πιστεύω, ότι παρέχει μια πιο πολλά υποσχόμενη περιγραφή της σχέσης μεταξύ μαθηματικών και επιστημονικής πραγματικότητας.

1. Ο μαθηματικός *δομισμός* (mathematical *structuralism*) συμφωνεί με τον πλατωνισμό και τον ιντουισιονισμό ότι τα μαθηματικά διαθέτουν δικό τους αντικείμενο μελέτης, υποστηρίζει όμως ότι το αντικείμενο αυτό αποτελείται από πρότυπα (patterns) ή δομές (structures) και όχι από συλλογές μαθηματικών οντοτήτων. Η αριθμητική, λόγου χάριν, δεν κατανοείται ως η μελέτη ενός ειδικού συνόλου που αποτελείται από *τους* φυσικούς αριθμούς, αλλά ως η μελέτη της δομής-των-φυσικών-αριθμών, της δομής ή του πρότυπου οποιουδήποτε συστήματος που διαθέτει μια άπειρη ακολουθία αντικειμένων με ένα αρχικό αντικείμενο και μία σχέση (ή πράξη) διαδοχής. Η δομή των φυσικών αριθμών πραγματώνεται, για παράδειγμα, στα αραβικά αριθμητικά, στις εκφράσεις του ρωμαϊκού αλφαβήτου σε λεξικογραφική διάταξη, σε μια άπειρη ακολουθία όμοιων γραμμών ||| ..., και σε μια άπειρη ακολουθία διακριτών χρονικών στιγμών. Ακριβέστερα, η δομή των φυσικών αριθμών *είναι* η δομή που έχουν από κοινού αυτά τα συστήματα. Η θεωρία ομάδων, ένα δεύτερο παράδειγμα, είναι η μελέτη των δομών[9] που είναι κοινές σε όλα τα συστήματα αντικειμένων που διαθέτουν μία προσεταιριστική διμελή πράξη, ένα ουδέτερο στοιχείο, και αντίστροφο στοιχείο για κάθε αντικείμενο. Κοινές δομές ομάδων αποτελούν πρότυπο για διάφορα συστήματα συμμετριών και συστήματα μεταθέσεων. Παρομοίως, η ευκλείδεια γεωμετρία είναι η μελέτη της δομής του ευκλείδειου χώρου, η τοπολογία είναι η μελέτη των τοπολογικών δομών, κ.τ.λ.

Ένα δίδαγμα που όλοι πήραμε από τον Πλάτωνα είναι ότι το να δίνεις έναν κατάλογο για το είδος κάποιου πράγματος, δεν είναι ισοδύναμο με το να λες τι είδους πράγμα είναι. Έτσι λοιπόν, δεν προσποιούμαι ότι έχω ορίσει τι είναι η δομή επικαλούμενος τη λέξη «πρότυπο» και δίνοντας μερικά παραδείγματα, αλλά ίσως, μέσω της κατάδειξης, να υπέδειξα μια οικεία κατεύθυνση. Ακολουθούν μερικά σχόλια ευρετικού χαρακτήρα.[10]

Μία μέθοδος για να συλλάβουμε ένα συγκεκριμένο πρότυπο είναι να θεωρήσουμε μία συλλογή (ή συλλογές) αντικειμένων διατεταγμένων με έναν ιδιαίτερο τρόπο και να αγνοήσουμε εκείνα τα χαρακτηριστικά των αντικειμένων που δεν σχετίζονται με τη διάταξη. Δηλαδή, ξεκινάει κάποιος με ένα σύστημα αντικειμένων και επικεντρώνεται στην ίδια τη διάταξη. Μία δεύτερη, πιο αφηρημένη, μέθοδος για να συλλάβουμε ένα πρότυπο έχει να κάνει με την άμεση περιγραφή των σχέσεων μεταξύ των θέσεων του προτύπου (αποφεύγοντας έτσι την αναφορά σε συγκεκριμένα αντικείμενα και συστήματα αντικειμένων). Για να δώσω ένα παράδειγμα, μπορεί κανείς να συλλάβει το πρότυπο μιας άμυνας στο μπέιζμπολ είτε πηγαίνοντας σε ένα παιχνίδι (ή πολλά παιχνίδια) και επικεντρώνοντας την προσοχή του στη διάταξη των παικτών (αγνοώντας χαρακτηριστικά όπως το ύψος, το βάρος και το χρώμα των μαλλιών των διαφόρων παικτών) είτε κατανοώντας μια άμεση περιγραφή του προτύπου («υπάρχουν τέσσερις παίκτες εντός κοντά στις βάσεις διατεταγμένοι με τον τάδε τρόπο, τρεις παίκτες εκτός, κ.τ.λ.»).[11]

Ίσως, μια μαθηματική δομή να μπορεί να αναλυθεί παρομοίως ως η μορφή ενός δυνατού συστήματος από αλληλοσχετιζόμενα αντικείμενα, αγνοώντας τα χαρακτηριστικά των αντικειμένων

[9] Υπάρχει αμφισημία στη λέξη «δομή». Οι διάφορες σημασίες εξαρτώνται από το εάν θεωρείται ή όχι μία (και μόνο μία) δομή μοναδική μέχρις ισομορφισμού. Εδώ, προτιμώ τη σημασία στην οποία «Α και Β έχουν την ίδια δομή» συνεπάγεται ότι «Α και Β είναι ισόμορφα». Αυτή η σημασία του όρου απλοποιεί τη συζήτηση των οντολογικών ζητημάτων και την εφαρμογή των μαθηματικών στην επιστήμη. Υπάρχει, ωστόσο, και η σημασία στην οποία κανείς λέει, για παράδειγμα, ότι υπάρχει μία δομή κοινή σε όλες τις ομάδες (η επονομαζόμενη ίσως «δομή ομάδας») έστω και αν, βεβαίως, δεν είναι όλες οι ομάδες ισόμορφες. Οι φράσεις «μερική δομή» και «ατελής δομή» έχουν χρησιμοποιηθεί για τη δεύτερη σημασία (βλ. Barbut 1970).

[10] Βλ. Resnik (1981) και (1982) για μια πιο πλήρη περιγραφή των δομών και του δομισμού.

[11] Μια τρίτη (ενδιάμεση ίσως) μέθοδος να συλλάβουμε ένα πρότυπο είναι μέσω μιας περιγραφής του ως υπό-πρότυπο ή παραλλαγή κάποιου άλλου προτύπου. Για παράδειγμα, οι αμυντικές θέσεις κοντά στις βάσεις στο μπέιζμπολ είναι ένα υπό-πρότυπο άμυνας και μια «αριστερόστροφη μετατόπιση» είναι μια παραλλαγή της αμυντικής διάταξης στο μπέιζμπολ στην οποία ο αμυντικός παίκτης που η θέση του είναι μεταξύ δεύτερης και τρίτης βάσης (shortstop) παίζει στα δεξιά της δεύτερης βάσης.

που δεν αφορούν τις μεταξύ τους σχέσεις. Με αυτόν τον τρόπο η δομή περιγράφεται πλήρως με όρους αμοιβαίων σχέσεων.

Χαρακτηριστικό πρόλογο ενός μαθηματικού κειμένου αποτελεί η δήλωση ότι πρόκειται να μελετηθούν κάποια μαθηματικά αντικείμενα, όπως οι πραγματικοί αριθμοί. Σε μερικές περιπτώσεις τουλάχιστον, το μόνο πράγμα που μας λένε για αυτά τα αντικείμενα είναι ότι υπάρχουν κάποιες σχέσεις μεταξύ τους ή/και πράξεις πάνω τους. Παραδείγματος χάριν, ίσως να πληροφορηθούμε ότι έχουν πυκνή γραμμική διάταξη, ή ότι υπάρχει μια προσεταιριστική και αντιμεταθετική πράξη πρόσθεσης μεταξύ τους. Εύκολα δημιουργείται η εντύπωση ότι τα αντικείμενα τα ίδια δεν έχουν σημασία· οι σχέσεις και οι πράξεις είναι αυτά που μελετάμε. Η ιδέα ότι αντικείμενο μελέτης ενός δεδομένου μαθηματικού κλάδου είναι κάποια δομή (ή κλάση δομών) αποτελεί άμεση ερμηνεία αυτής της παρατήρησης.[12]

Οι συγγραφείς που διατύπωσαν και υπερασπίστηκαν δομιστικές φιλοσοφικές απόψεις για τα μαθηματικά φαίνεται να έχουν πολύ διαφορετικές φροντίδες και ενδιαφέροντα. Οι Bourbaki (1950) και Barbut (1970) δηλώνουν ότι η μελέτη της δομής είναι αυτό που ενοποιεί τους διάφορους κλάδους των μαθηματικών. Ο Mark Wilson (1981) θεωρεί ότι ο δομισμός μπορεί να βοηθήσει να λυθούν κοινοί γρίφοι που αφορούν τις οντολογικές προϋποθέσεις ισοδύναμων μαθηματικών θεωριών. Οι Dedekind (1888) και Benacerraf (1965) προτείνουν περιγραφές της αριθμητικής παρόμοιες με τις παραπάνω με σκοπό να ορίσουν τους φυσικούς αριθμούς. Τέλος, οι Steiner (1975) και Resnik (1975), (1981) και (1982) επεξεργάζονται δομιστικές φιλοσοφικές απόψεις στα μαθηματικά ενώ προσπαθούν να εξηγήσουν τη μαθηματική γνώση στο πλαίσιο των προβλημάτων με τον πλατωνισμό. Βλέπε Nutter (1980) για μια εμπεριστατωμένη ανάλυση του μαθηματικού δομισμού και των επιχειρημάτων του.

2. Πριν προχωρήσω στις εφαρμογές των μαθηματικών, θα κάνω λίγα σύντομα σχόλια σχετικά με τις οντολογικές προϋποθέσεις του δομισμού. Ο δομισμός υποστηρίζει ότι τα μαθηματικά «αντικείμενα», όπως οι αριθμοί, τα σύνολα και τα σημεία, είναι στην πραγματικότητα θέσεις μέσα σε δομές. Κατά συνέπεια υπάρχουν δύο οντολογικά ζητήματα, το καθεστώς των ίδιων των δομών και το καθεστώς των επονομαζόμενων «μαθηματικών αντικειμένων» ή θέσεων μέσα σε κάθε δομή.

Χωρίς αποσαφήνιση της σημασίας της «ύπαρξης», δεν υπάρχει μεγάλη ανάγκη για μια τολμηρή δήλωση σχετικά με τις δομές που θα έθιγε κάποιες οντολογικές ευαισθησίες.[13] Θα πρέπει να τονιστεί, ωστόσο, ότι μια δεδομένη δομή είναι αφηρημένη με την έννοια ότι μπορεί να έχει

---

[12] Ασφαλώς πολλά μαθηματικά κείμενα, και μάλιστα τα περισσότερα, ξεκινούν λιγότερο αφηρημένα. Ένα βιβλίο μπορεί να αρχίζει, για παράδειγμα, ορίζοντας μια ειδική κατηγορία μαθηματικών αντικειμένων, όπως η κλάση των αναλυτικών μιγαδικών συναρτήσεων ή η κλάση των μερικών αναδρομικών συναρτήσεων. Εναλλακτικά, μπορεί να ανακοινώνεται ότι το βιβλίο αφορά αντικείμενα, όπως ακολουθίες μιγαδικών συναρτησιακών με πραγματικές τιμές, τα οποία «κατασκευάζονται» από (οικεία) μαθηματικά αντικείμενα. Θεωρώ ότι και σε αυτές τις εργασίες μπορεί να δοθούν δομιστικές ερμηνείες. Εάν κάποιος κατανοήσει τη βασική θεωρία (δηλαδή, αριθμητική, πραγματική ανάλυση, κ.τ.λ.) ως θεωρία μιας δομής, τότε το δεδομένο κείμενο μπορεί να ειδωθεί ως η θεωρία είτε μιας υπο-δομής της δομής της βασικής θεωρίας είτε ως μια δεύτερη, ίσως πλουσιότερη, μαθηματική δομή, καθοριζόμενη από τη δομή της βασικής θεωρίας. Για λόγους συντομίας, η άποψη αυτή δεν αναπτύσσεται περισσότερο.

[13] Δεν αρνούμαι το γεγονός (ούτε απολογούμαι για αυτό) ότι ο λόγος μου, η γλώσσα αυτού του άρθρου, εκλαμβάνει τη λέξη «δομή» ως ένα κοινό ουσιαστικό και (άτυπα) επιτρέπει την εφαρμογή ποσοδεικτών σε δομές. Έτσι, παραδείγματος χάριν, μιλώ ελεύθερα για τη «δομή των φυσικών αριθμών», τη «συνολοθεωρητική δομή», κ.τ.λ., και αποδέχομαι δηλώσεις όπως «υπάρχει μία δομή η οποία ικανοποιεί τα αξιώματα της αριθμητικής» και «όλες οι δομές μπορούν να ενταχθούν στη συνολοθεωρητική ιεραρχία». Υπάρχουν, βεβαίως, αυτοί που συμπεραίνουν από αυτό και μόνο ότι δεσμεύομαι οντολογικά για τις δομές. Ίσως να υπάρχει μια έννοια «δέσμευσης» για την οποία αυτό είναι σωστό, αλλά ομοίως, οποιοσδήποτε χρησιμοποιεί έναν καθολικό όρο (universal term) ως ουσιαστικό ή (άτυπα) επιτρέπει την εφαρμογή ποσοδεικτών στον καθολικό όρο, δεσμεύεται με το αντίστοιχο καθόλου (universal). Με τον ίδιο τρόπο, για παράδειγμα, δηλώσεις όπως «υπάρχουν πέντε διαφορετικά χρώματα σε αυτό το βάζο» και «υπάρχει κάποιο χαρακτηριστικό αυτού του καναπέ που τον καθιστά απωθητικό» δεσμεύει τον ομιλητή σε χρώματα και αισθητικές ποιότητες. Παρομοίως, θα μπορούσε να ισχυριστεί κάποιος ότι κάθε μαθηματικός που χρησιμοποιεί καθιερωμένο λόγο (δηλαδή ισχυρισμούς όπως «κάθε πρώτος αριθμός μεγαλύτερος του δύο είναι περιττός») δεσμεύεται στην ύπαρξη των μαθηματικών αντικειμένων. Με άλλα λόγια, υπό την έννοια της δέσμευσης που εξετάζουμε, όλοι οι κλασσικοί μαθηματικοί είναι πλατωνιστές. Ο Resnik (1980, κεφάλαιο 5) χρησιμοποιεί τον όρο «μεθοδολογικός πλατωνιστής» αναφερόμενος σε τέτοιους μαθηματικούς. Επεκτείνοντας την έκφραση, παραδέχομαι ότι είμαι μεθοδολογικός πλατωνιστής όσον αφορά τις δομές.

περισσότερες από μία συγκεκριμενοποιήσεις. Συνεπώς, φαίνεται να έχουμε μια ειδική περίπτωση του προβλήματος που αφορά το καθεστώς των καθόλου (universals): Μια δομή είναι ένα καθόλου και ένα σύστημα αντικειμένων που την συγκεκριμενοποιεί είναι μία επιμέρους περίπτωσή της. Δεύτερον, οι ιδιότητες μιας δεδομένης δομής είναι ανεξάρτητες από τον μαθηματικό. Από την παρούσα άποψη, για παράδειγμα, το θεώρημα μη πληρότητας του Gödel δείχνει ότι η δομή των φυσικών αριθμών έχει ιδιότητες οι οποίες δεν αποτελούν συνέπειες της (πρωτοβάθμιας) περιγραφής της. Τρίτον, σύμφωνα με τον Quine, το κοινό κριτήριο δέσμευσης σε μια οντότητα είναι να βρίσκεται εντός του πεδίου που διατρέχει μια μεταβλητή (σε μια αποδεκτή θεωρία). Η μαθηματική λογική και, ειδικότερα, η θεωρία μοντέλων μπορεί ίσως να ερμηνευθεί ως μια θεωρία που εφαρμόζει ποσοδείκτες σε δομές. Το να πούμε, για παράδειγμα, ότι μια κλάση προτάσεων είναι ικανοποιήσιμη είναι ίσως το ίδιο με το να πούμε ότι *υπάρχει* μία δομή που την ικανοποιεί. Ωστόσο, είναι πιο συνηθισμένο να θεωρούμε ότι οι μεταβλητές της θεωρίας μοντέλων διατρέχουν σύνολα ως πεδία. Τα σύνολα υπό αυτές τις συνθήκες εκλαμβάνονται ως *θέσεις εντός* της συνολοθεωρητικής-ιεραρχίας-δομής. Έτσι, η θεωρία μοντέλων, όπως κάθε άλλος μαθηματικός κλάδος, θεωρείται ως η μελέτη μιας συγκεκριμένης δομής. Για να περιπλέξω λίγο τα πράγματα, πάντως, προτείνω ότι η θέση ότι τα μαθηματικά μπορούν να αναχθούν στη θεωρία συνόλων ισοδυναμεί με τον ισχυρισμό ότι οποιαδήποτε δεδομένη μαθηματική δομή (εκτός από εκείνη της ίδιας της θεωρίας συνόλων) μπορεί να εμφυτευθεί στη συνολοθεωρητική δομή και ότι, επιπλέον, η τελευταία συλλαμβάνει τις συναφείς σχέσεις μεταξύ των δομών.[14]

Όσον αφορά το καθεστώς των μαθηματικών «αντικειμένων» - θέσεων εντός μιας δεδομένης δομής φαίνεται να υπάρχει διαφωνία μεταξύ των δομιστών. Όπως είναι καλά γνωστό, ο Benacerraf υποστηρίζει ότι το «τρία», για παράδειγμα, δεν μπορεί να θεωρηθεί αντικείμενο διότι δεν φαίνεται να υπάρχει τρόπος να καθοριστούν οι αληθοτιμές των προτάσεων μιας ταυτότητας όπως «3={{{∅}}}». Από την άλλη μεριά, ο Steiner παρατηρεί ότι:

> αποδεχόμαστε τα μαθηματικά αντικείμενα, σε αντίθεση με τον Benacerraf, αλλά συμφωνούμε ότι το μόνο αξιόλογο που μπορούμε να γνωρίσουμε για αυτά είναι οι σχέσεις τους με άλλα πράγματα. (Αυτό είναι το διακριτικό γνώρισμα των αφηρημένων αντικειμένων.) (1975, σ. 134)

Σχηματίζει κανείς την εντύπωση ότι η διαφωνία που υπάρχει εδώ είναι πάνω στο νόημα της λέξης «αντικείμενο». Σε πρώιμο άρθρο του, ο Resnik (1975) δηλώνει ότι μαθηματικές οντότητες, όπως οι φυσικοί αριθμοί, δεν μπορούν να «ταυτοποιηθούν απολύτως, αλλά μόνο σε σχέση με άλλα 'αντικείμενα' στη δομή στην οποία βρίσκονται» (σ. 35). Σε μια υποσημείωση σχολιάζει ότι η λέξη «αντικείμενο» τοποθετείται μέσα σε εισαγωγικά διότι

> δεν είναι πλέον σαφές κατά πόσον οι αριθμοί, τα σύνολα κ.τ.λ. θα πρέπει να λογαριάζονται ως αντικείμενα. Νομίζω ότι ίσως χρειαστεί να προχωρήσουμε προς μια έννοια *αντικειμένου μιας θεωρίας* (1975, σ. 35).

Η παρατήρηση αυτή υποδηλώνει ότι η ίδια η έννοια του «αντικειμένου» πρέπει να είναι σχετική ως προς μια θεωρία.[15] Οι αριθμοί είναι αντικείμενα όσον αφορά την αριθμητική, δεν είναι όμως αντικείμενα σε σχέση με τη θεωρία συνόλων. Το συμπέρασμα αυτό αναπτύσσεται αργότερα από τον Resnik (1981):

> Η θεωρία των φυσικών αριθμών ... έχει να κάνει με ένα συγκεκριμένο πρότυπο· διαθέτει τα μέσα να εγείρει και να απαντά σε ερωτήματα που αφορούν την ταυτότητα διαφόρων αριθμών, αλλά *δεν μπορεί ούτε καν να διατυπώσει το ερώτημα* για το κατά πόσον ο αριθμός ένα είναι [{∅}]. Από την άλλη μεριά, εντός της θεωρίας των αριθμών, η ταυτότητα είναι απόλυτη. ... [Μια μαθηματική] θεωρία μιλά μόνο για στοιχεία μιας ορισμένης δομής και δεν έχει τρόπο να τα ταυτοποιήσει ή να τα διακρίνει από τα στοιχεία μιας άλλης δομής (1981, σ. 537).

3. Η ανάλυση της σχέσης μεταξύ μαθηματικών και επιστήμης που προτείνω ξεκινά με την πρόταση ότι τα αλληλοσχετιζόμενα και αλληλεπιδρώντα περιεχόμενα του μη μαθηματικού σύμπαντος αναδεικνύουν υποκείμενες μαθηματικές δομές. Για παράδειγμα, θα μπορούσε να υποστηριχθεί ότι

---

[14] Η οντολογική σημασία της αναγωγής των μαθηματικών δομών σε θέσεις εντός της συνολοθεωρητικής-ιεραρχίας συζητείται λεπτομερώς από τον Resnik (1981).

[15] Μια συγγενική ιδέα βρίσκεται στον Kraut (1980), η οποία αντιμετωπίζει παρόμοια οντολογικά/ γλωσσολογικά ζητήματα σε ευρύτερο πλαίσιο.

στην αμοιβαία έλξη των φυσικών αντικειμένων έχουμε μια περίπτωση μαθηματικής δομής, παρόμοια με τη μεταβολή των πραγματικών αριθμών σύμφωνα με το νόμο του αντίστροφου τετραγώνου. Γενικά, οι φυσικοί νόμοι που εκφράζονται με μαθηματικούς όρους μπορούν να ερμηνευτούν ως προτάσεις που συγκεκριμενοποιούν κάποια μαθηματικώς ορισμένη δομή σε μια ιδιαίτερη περιοχή της φυσικής πραγματικότητας.

Από αυτή τη σκοπιά, το πρόβλημα της σχέσης μεταξύ μαθηματικών και πραγματικότητας αποτελεί ειδική περίπτωση του προβλήματος της εκδήλωσης των περιπτώσεων των καθολικών όρων. Η σχέση των μαθηματικών με την πραγματικότητα είναι σαν την σχέση του καθόλου με το καθέκαστον ως περίπτωσή του. Όπως προηγουμένως, το «καθόλου» εδώ αναφέρεται σε ένα πρότυπο ή δομή· το «καθέκαστον» δεν αναφέρεται σε ένα μεμονωμένο αντικείμενο, αλλά σε ένα σύστημα σχετιζομένων αντικειμένων. Πιο συγκεκριμένα, τα μαθηματικά είναι για την πραγματικότητα ότι είναι η μορφή για το μορφοποιημένο.[16]

Ο Chomsky φαίνεται να υποστηρίζει μια δομιστική άποψη αφού πιστεύει ότι στην ανθρώπινη γλωσσική λειτουργία αναδύονται παραδείγματα μαθηματικών δομών της γραμματικής μετασχηματισμών, δομών έμφυτων στον νου. Ο Piaget (1968) περιγράφει την ιδέα του περί ψυχολογικής ανάπτυξης με όρους συμβατούς με αυτήν την εξήγηση της εφαρμογής των μαθηματικών. Ο Shapiro (1981) προτείνει μια περιγραφή της υπολογισιμότητας (και της θέσης του Church) με δομιστικούς όρους. Για παρόμοιες περιγραφές και αξιολογήσεις άλλων επιστημών, μπορεί να ανατρέξει κανείς στη συλλογή άρθρων που έχει επιμεληθεί ο Michael Lane (1970).

Μια πρώτη προσπάθεια να διευκρινίσω την παρούσα θέση θα ήταν το να ισχυριστώ ότι η επιστήμη προχωρά ανακαλύπτοντας παραδείγματα μαθηματικών δομών μεταξύ παρατηρήσιμων φυσικών αντικειμένων. Αυτή η προσέγγιση εξηγεί πράγματι κάποιες τουλάχιστον εφαρμογές των μαθηματικών. Θα επεξεργαστώ λεπτομερώς ένα παράδειγμα.

Οι Crowell και Fox (1963) έγραψαν ένα βιβλίο μαθηματικών για τους κόμβους (knots). Στην εισαγωγή του, πραγματεύονται το πρόβλημα της χρησιμοποίησης μαθηματικών για τη μελέτη αυτών των φυσικών αντικειμένων:

> Ορισμός ενός Κόμβου: σχεδόν όλοι είναι εξοικειωμένοι με τους απλούστερους από τους πιο συνηθισμένους κόμβους, π.χ., τον κόμβο ανάσταλμα ... και τον κόμβο του αριθμού-οκτώ. Εάν πειραματιστεί λίγο κανείς με ένα κομμάτι σχοινί θα πειστεί ότι αυτοί οι δύο κόμβοι είναι διαφορετικοί: ο ένας δεν μπορεί να μετασχηματιστεί στον άλλο χωρίς ... «δέσιμο» ή «λύσιμο». Παρόλα αυτά, η αδυναμία να μετατρέψουμε τον κόμβο του αριθμού-οκτώ σε κόμβο ανάσταλμα, στριφογυρίζοντάς τον υπομονετικά για ώρες, δεν αποδεικνύει ότι δεν μπορεί να γίνει κάτι τέτοιο. Το πρόβλημα που θα πρέπει να θεωρήσουμε είναι να δείξουμε μαθηματικά ότι αυτοί οι δύο κόμβοι ... είναι διακριτοί ο ένας από τον άλλο.
> Τα μαθηματικά δεν αποδεικνύουν ποτέ τίποτα για οτιδήποτε άλλο εκτός από τα μαθηματικά, και ένα κομμάτι σχοινί είναι ένα φυσικό αντικείμενο και όχι ένα μαθηματικό αντικείμενο. Έτσι πριν νοιαστούμε για αποδείξεις, πρέπει να έχουμε μαθηματικό ορισμό του τι είναι ένας κόμβος. ... Το πρόβλημα αυτό ... προκύπτει κάθε φορά που κάποιος εφαρμόζει τα μαθηματικά σε μια φυσική κατάσταση. Οι ορισμοί θα πρέπει να ορίζουν μαθηματικά αντικείμενα που θα προσεγγίζουν τα υπό εξέταση φυσικά αντικείμενα όσο γίνεται πιο πολύ (1963, σ. 3).

Όταν οι συγγραφείς αυτοί αναφέρουν ότι κάποια μαθηματικά αντικείμενα μπορεί να μοιάζουν ή να «προσεγγίζουν» φυσικά αντικείμενα όπως κομμάτια σχοινιού, δεν εννοούν βεβαίως ότι τα μαθηματικά αντικείμενα μπορούν να έχουν ιδιότητες όπως στερεότητα, ευλυγισία, και έκταση. Εννοούν, βεβαίως, ότι οι δυνατές σχέσεις και αλληλοσυνδέσεις των κομματιών σχοινιού που σχηματίζουν κόμβους μπορούν να περιγραφούν από τις σχέσεις, ή να παρουσιαστούν ως «μοντέλο»

[16] Ο Resnik (1982) θεωρεί ότι μια δομιστική κατανόηση των μαθηματικών προσφέρει την κατεύθυνση για τη λύση του γνωσιολογικού προβλήματος με τον πλατωνισμό (βλ. την υποσημείωση 7 πιο πάνω). Προτείνει ότι, σε μερικές περιπτώσεις τουλάχιστον, η γνώση μιας μαθηματικής δομής ισοδυναμεί με την αναγνώριση ενός προτύπου. Δίνει σε γενικές γραμμές τα διάφορα επίπεδα αφαίρεσης που εμπλέκονται και πραγματεύεται προσεκτικά τα περί οντολογικής δέσμευσης.

Βεβαίως, υπάρχουν πολλά φιλοσοφικά προβλήματα που συνδέονται με τα πρότυπα, τη συγκεκριμενοποίηση προτύπων (pattern exemplification) και την αναγνώριση μορφών (pattern recognition). Ούτε η δουλειά του Resnik ούτε η δική μου φιλοδοξεί να λύσει όλα αυτά τα προβλήματα. Στη χειρότερη περίπτωση, η δουλειά μας μπορεί να θεωρηθεί ότι ανάγει κάποια προβλήματα που αφορούν τα μαθηματικά σε προβλήματα που αφορούν τα πρότυπα.

των σχέσεων, μιας μαθηματικής δομής, ενός τοπολογικού χώρου ειδικότερα. Θεωρώ ότι αποτελεί άμεση έκφραση αυτής της άποψης το ότι ένα σχοινί που σχηματίζει κόμβους αποτελεί παράδειγμα της μαθηματικής δομής που περιγράφεται στο βιβλίο. Το θέμα είναι να αποδείξουμε θεωρήματα για κόμβους. Αν οι υποθέσεις των Crowell και Fox, όπως τους ερμηνεύω εδώ, είναι σωστές, τότε *έπεται* ότι συγκεκριμένα μαθηματικά θεωρήματα εκφράζουν γεγονότα για κόμβους. Ειδικότερα, ένα μαθηματικό *θεώρημα* ότι ένας συγκεκριμένος τοπολογικός σχηματισμός δεν μπορεί να μετασχηματιστεί σε έναν δεύτερο μέσω καθορισμένων μαθηματικών χειρισμών, αντιστοιχεί στο *γεγονός* ότι ένας κόμβος δεν μπορεί να μετασχηματιστεί σε κάποιον άλλο χωρίς «δέσιμο» ή «λύσιμο».

Αυτή η πρώτη αποτίμηση της εφαρμογής των μαθηματικών φαίνεται εύκολα ότι είναι ιδιαίτερα απλή. Ο ισχυρισμός ότι μια δομή διαθέτει παραδειγματικές περιπτώσεις στη φυσική πραγματικότητα ισοδυναμεί με τον ισχυρισμό ότι υπάρχουν οντότητες κάποιου είδους που αντιστοιχούν στις θέσεις εντός της δομής. Πολλές από τις δομές που μελετώνται από τους μαθηματικούς και χρησιμοποιούνται στην επιστήμη διαθέτουν άπειρο αριθμό θέσεων και, ως εκ τούτου, δεν υπάρχουν αρκετά παρατηρήσιμα φυσικά αντικείμενα για να αποτελέσουν παραδείγματά τους. Η εφαρμογή μιας άπειρης δομής ισοδυναμεί με την αποδοχή μιας απειρίας θεωρητικών οντοτήτων. Λόγου χάριν, ο ισχυρισμός ότι ο πραγματικός χώρος αποτελεί παράδειγμα της δομής της ευκλείδειας γεωμετρίας υποδηλώνει τον ισχυρισμό ότι υπάρχει ένα συνεχές χωρικών σημείων. Το καθεστώς τέτοιων οντοτήτων δεν χρειάζεται να μας απασχολήσει εδώ.[17] Το μόνο που υποστηρίζω είναι ότι τα σημεία του χώρου είναι θεωρητικές οντότητες που απαιτούνται από τη χρήση της ευκλείδειας γεωμετρίας στη φυσική θεωρία.

Σύμφωνα, τότε, με την άποψη αυτή, η επιστήμη όντως προχωρά ανακαλύπτοντας μαθηματικές δομές που έχουν παραδείγματα στην υλική πραγματικότητα, η ανακάλυψη όμως συχνά είναι έμμεση και απαιτεί την αποδοχή θεωρητικών οντοτήτων. Η κατάσταση μπορεί ίσως να περιγραφεί καλύτερα ως εξής: οι επιστημονικές θεωρίες *ενσωματώνουν* μαθηματικές δομές.[18] Ακολουθεί ένα άλλο παράδειγμα.

Το επιχείρημα του Turing (1936) για μια εκδοχή της θέσης του Church φαίνεται να προϋποθέτει μια τέτοιου είδους άποψη, στο βαθμό που θεωρεί ότι η ίδια η υπολογιστική διαδικασία υπόκειται σε μαθηματική μελέτη. Στο επιχείρημα ισχυρίζεται σχεδόν ευθέως ότι τα υλικά και οι οδηγίες που δύναται να έχει ένας άνθρωπος όταν ακολουθεί έναν αλγόριθμο, διαθέτουν ιδιότητες οι οποίες αποτελούν παραδείγματα κάποιων μαθηματικών δομών. Ας δούμε λεπτομερώς ένα μικρό μέρος του επιχειρήματος του, την «απόδειξή» του ότι μια γλώσσα που χρησιμοποιείται σε υπολογισμούς πρέπει να έχει πεπερασμένο αλφάβητο.[19] Από την αρχή υποτίθεται ότι κάθε σύμβολο μπορεί να κατανοηθεί (ή να «ορισθεί») ως ένα σύνολο σημείων σε ένα μοναδιαίο τετράγωνο πρότυπου μετρικού χώρου (προϋποθέτοντας έτσι ότι υπάρχει άνω φράγμα στο μέγεθος κάθε συμβόλου). Υποτίθεται επιπλέον ότι το σύνολο των σημείων που αντιστοιχούν σε κάθε σύμβολο είναι μετρήσιμο. Στη συνέχεια, ο Turing ορίζει μια μάλλον φυσική μετρική μέσα στο σύνολο των «συμβόλων» που κατανοούνται με αυτόν τον τρόπο. Επισημαίνει ότι με την επαγόμενη τοπολογία, τα ίδια τα «σύμβολα» σχηματίζουν έναν υπό συνθήκες συμπαγή χώρο. Από τα μαθηματικά προκύπτει τότε ότι «αν επιτρέπουμε μια απειρία συμβόλων, τότε θα υπάρξουν σύμβολα που θα διαφέρουν κατά έναν αυθαίρετα μικρό βαθμό». Λόγω αυτού και της πρόσθετης υπόθεσης ότι υπάρχει κάποιο όριο στην ανθρώπινη ικανότητα να διακρίνει ανάμεσα σε δείγματα, συνάγεται ότι ένα αλφάβητο για υπολογισμό πρέπει να είναι πεπερασμένο.

Μια δομιστική ερμηνεία του επιχειρήματος αυτού είναι ότι ο Turing αρχικά ισχυρίστηκε, επεσήμανε ή έθεσε ως αξίωμα, ότι το σύστημα των συναφών σχέσεων μεταξύ δυνατών δειγμάτων συμβόλων αποτελεί παράδειγμα της δομής των μετρήσιμων συνόλων στον πρότυπο μετρικό χώρο. Στη συνέχεια όρισε μια νέα μετρική σε αυτά τα σύνολα σημείων και απέδειξε μαθηματικά ότι με τη

[17] Ο Hartry Field (1980,σσ. 31-33) υποστηρίζει ότι οντότητες όπως τα χωροχρονικά σημεία θα πρέπει να ερμηνεύονται ως φυσικές και όχι ως αφηρημένες οντότητες, κι ο λόγος είναι, μεταξύ άλλων, ότι ενδεχομενικές ιδιότητες των μεμονωμένων σημείων είναι ουσιώδη τμήματα των αιτιακών εξηγήσεων των φυσικών φαινομένων. Από την άλλη μεριά, κάποιοι, κριτικάροντας τη δουλειά του Field, διαφωνούν στο θέμα αυτό υποστηρίζοντας ότι τα χωροχρονικά σημεία είναι αφηρημένα. Δες, για παράδειγμα, τις κριτικές από τους M. Resnik στο *Nous* και D. Malament στο *Journal of Philosophy*.

[18] Ο Igal Kvart (ιδιωτική επικοινωνία) πρότεινε ότι αυτή η αξιολόγηση της εφαρμογής των μαθηματικών μπορεί να συμφιλιωθεί με την παραδοσιακή πλατωνική άποψη για ένα σύμπαν μαθηματικών αντικειμένων. Αντί να μιλάμε για μαθηματικές δομές οι οποίες υπόκεινται της φυσικής πραγματικότητας, ένας πλατωνιστής μπορεί να μιλήσει για *ισομορφισμούς μεταξύ* συστημάτων από μαθηματικά αντικείμενα και συστημάτων από φυσικά αντικείμενα.

[19] Μολονότι τα μαθηματικά που υπεισέρχονται σε αυτό το παράδειγμα είναι ιδιαίτερα ξεκάθαρα και απλά, είναι περίεργο ότι ο Turing ένιωσε ότι αυτό χρειαζόταν να αποδειχθεί.

μετρική αυτή, τα δυνατά «σύμβολα» αποτελούν παράδειγμα μιας από τις δομές του υπό συνθήκες συμπαγούς χώρου. Το τελικό συμπέρασμα προκύπτει από ένα πολύ γνωστό θεώρημα για τέτοιες δομές, μαζί με την υπόθεση για τις ανθρώπινες αντιληπτικές ικανότητες. Θεωρώ ότι αυτή είναι μια σαφής ερμηνεία.

Ας εξετάσουμε την ακόλουθη αντίρρηση για την παρούσα άποψη: Σύμφωνα με τον δομισμό, οι φυσικοί αριθμοί είναι θέσεις εντός της δομής των φυσικών αριθμών. Η δομή αυτή είναι άπειρη. Αυτό φαίνεται να συνεπάγεται ότι κάθε φορά που χρησιμοποιεί κάποιος αριθμούς ή την αριθμητική στην καθημερινή ζωή, όπως μετρώντας τομάτες ή κάνοντας ισολογισμούς, προϋποθέτει μια άπειρη δομή. Φαίνεται παράλογο να ισχυριζόμαστε ότι όταν ένα παιδί μαθαίνει να μετράει τα δάχτυλα των ποδιών του, αυτό που κάνει ουσιαστικά είναι να εφαρμόζει μια άπειρη δομή στην πραγματικότητα.

Η απάντηση σε αυτό θα ήταν να παρατηρήσουμε ότι στην ουσία όλες οι εφαρμογές της αριθμητικής δεν απαιτούν ολόκληρη τη δομή των φυσικών αριθμών, αλλά μόνο ποικίλες πεπερασμένες δομές οι οποίες μπορεί να θεωρηθούν ως «τμήμα της» δομής των φυσικών αριθμών. Για παράδειγμα, όταν ένα παιδί μαθαίνει να μετράει μέχρι το είκοσι και, με αυτόν τον τρόπο, γνωρίζει πώς να μετράει μικρές συλλογές, μαθαίνει ένα συγκεκριμένο πεπερασμένο πρότυπο, τη δομή της ακολουθίας-των-είκοσι-στοιχείων. Αυτό είναι αρκετό για πολλές από τις επιδιώξεις του. Μπορεί ακόμα να μάθει να εμπλουτίζει τη δομή αυτή με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό (ως μερικές συναρτήσεις). Αργότερα, θα μάθει ότι η δομή αυτή είναι (ή μπορεί να ιδωθεί ως) τμήμα μιας μεγαλύτερης δομής με, ας πούμε, ενενήντα-εννέα θέσεις. Τελικά, μαθαίνει ότι η αυτή η τελευταία δομή είναι τμήμα μιας ακόμα μεγαλύτερης, μιας δομής με άπειρες θέσεις. Στο σημείο αυτό, αρχίζει να συλλαμβάνει τη δομή των φυσικών αριθμών. Με λίγα λόγια, μια *πλήρης* θεωρία αρίθμησης ενέχει πράγματι μια άπειρη δομή, αλλά οποιαδήποτε δεδομένη περίπτωση αρίθμησης, ή οποιαδήποτε δεδομένη χρήση της αριθμητικής, μπορεί να εξηγηθεί χωρίς την πλήρη θεωρία.[20] Μια πεπερασμένη δομή «αρίθμησης» αρκεί.[21]

4. Από την παρούσα προοπτική, το κύριο πλεονέκτημα του δομισμού είναι ότι παρέχει μια πιο ολιστική άποψη των μαθηματικών και της επιστήμης, και με αυτόν τον τρόπο εξηγεί την πλούσια αλληλεπίδραση μεταξύ των πεδίων. Θεωρείται ότι μεγάλο μέρος του θεωρητικού έργου στην επιστήμη συνίσταται στην «ενσωμάτωση» καλώς ανεπτυγμένων μαθηματικών δομών και, ταυτόχρονα, την παραδοχή θεωρητικών οντοτήτων. Ισχύει και το αντίστροφο. Όπως επισημάνθηκε παραπάνω, πολλοί κλάδοι της ανάλυσης αναπτύχθηκαν για να μελετηθούν φυσικές διαδικασίες. Η τωρινή ερμηνεία αυτού του φαινομένου είναι ότι οι ενδεδειγμένες δομές ανακαλύφθηκαν μέσω του πειραματικού και θεωρητικού έργου στη φυσική: Οι επιστήμονες παρείχαν μαθηματικές περιγραφές των (θεωρούμενων ως) δομών που βρίσκονταν στο υπόβαθρο μιας περιοχής της φυσικής πραγματικότητας. Εφόσον οριστούν, οι δομές μπορούν να μελετηθούν από φυσικούς και μαθηματικούς ακριβώς όπως μελετώνται οποιεσδήποτε μαθηματικές δομές.[22]

Σε αυτό το σημείο μπορεί να προκύψει ένα ερώτημα όσον αφορά το καθεστώς του επιθέτου «μαθηματική» στη φράση «μαθηματική δομή». Θα μπορούσε κάποιος να αναρωτηθεί τι διακρίνει τις μαθηματικές δομές (εάν τις διακρίνει κάτι) από άλλα είδη δομών. Η άποψή μου είναι ότι, εκτασιακά μιλώντας, δεν υπάρχει καμία διαφορά, ή, εν πάση περιπτώσει, δεν υπάρχει φιλοσοφικώς διαφωτιστική διαφορά. Ουσιαστικά οποιαδήποτε δομή μπορεί να είναι μαθηματική δομή εάν μαθηματικοί (*ως* μαθηματικοί) τη μελετούν (*ως* δομή).

Η διαφορά βρίσκεται περισσότερο στον τρόπο με τον οποίο οι δομές παρουσιάζονται και μελετώνται. Οι μαθηματικές δομές περιγράφονται αφηρημένα -ανεξάρτητα τίνος πράγματος δομές μπορεί να είναι αυτές οι δομές- και μελετώνται παραγωγικά. Για παράδειγμα, ένας τρόπος να παρουσιαστεί μια δομή μαθηματικά είναι μέσω *αξιωμάτων*: περιγράφει κανείς άμεσα τις σχέσεις εντός της δομής εφαρμόζοντας ποσοδείκτες στις θέσεις της. Ένας δεύτερος τρόπος είναι να την περιγράψει ως μια καλώς ορισμένη επέκταση ή υπο-δομή μιας άλλης (καθαρά περιγραφόμενης) δομής. Και στη μία και στην άλλη περίπτωση, η μαθηματική περιγραφή δεν περιλαμβάνει τίποτα πέραν των ίδιων των δομών.

---

[20] Ας σημειωθεί ότι (ολόκληρη) η δομή των φυσικών αριθμών έχει σαν παράδειγμα τις αλληλοσυσχετίσεις μεταξύ των πεπερασμένων δομών αρίθμησης. Δηλαδή, η δομή των φυσικών αριθμών μπορεί να παρουσιαστεί ως η δομή άλλων δομών.

[21] Θα μπορούσε να διαπιστωθεί, σύμφωνα με τον Turnbull (1978), ότι ο ίδιος ο Πλάτωνας ίσως να υπερασπιζόταν μια θέση μάλλον ακραίου δομισμού. Ο Turnbull προτείνει ότι οι Πλατωνικές Ιδέες ερμηνεύονται σωστά ως «αρχές δομής», με την Ιδέα του Χ να είναι η μαθηματική δομή του Χ. Η εργασία αυτή βασίζεται σε μια ερμηνεία των ύστερων διαλόγων, συμπεριλαμβανομένης της γεωμετρικής περιγραφής της φυσικής πραγματικότητας στον *Τίμαιο.*

[22] Βλ. Polya (1954) και (1977) για έναν μεγάλο αριθμό παραδειγμάτων της πλούσιας αλληλεπίδρασης μεταξύ μαθηματικών και φυσικής.

Στο ίδιο πνεύμα, ο Resnik (1982) κάνει διάκριση μεταξύ της «καθαρής θεωρίας» μιας δομής και μιας «εφαρμοσμένης εκδοχής» της:

> Πάρτε την περίπτωση της γλωσσολογίας. Ας φανταστούμε ότι χρησιμοποιώντας τη διαδικασία της αφαίρεσης ... ένας ειδικός της γραμματικής φτάνει σε μια σύνθετη δομή την οποία ονομάζει *Αγγλικά.* Τώρα ας υποθέσουμε ότι αργότερα αποδεικνύεται ότι το σώμα των Αγγλικών αποτυγχάνει σε σημαντικές περιπτώσεις να εκδηλώσει αυτό το πρότυπο και ότι πολλοί από τους ισχυρισμούς τους οποίους έκανε ο γλωσσολόγος μας για τη δομή του διαψεύδονται. Οι γλωσσολόγοι ονομάζουν ειρωνικά τη δομή *Ταγγλικά.* Παρόλα αυτά, μεγάλο μέρος της γνώσης του γλωσσολόγου μας για τα *Ταγγλικά ως* πρότυπο ισχύει· διότι κατάφερε να περιγράψει *κάποιο* πρότυπο και να ανακαλύψει κάποιες από τις ιδιότητές του. Παρομοίως, ... γνωρίζουμε πολλά για τον ευκλείδειο χώρο, παρά το γεγονός ότι δεν εκδηλώνεται φυσικά. Μια καθαρή θεωρία προτύπου είναι μια θεωρία η οποία έχει αναπτυχθεί ή μπορεί να αναπτυχθεί παραγωγικά και η οποία βασίζεται σε αξιώματα που στοχεύουν στο να χαρακτηρίσουν το εν λόγω πρότυπο. Οι υποθέσεις του δεν επεκτείνονται σε ισχυρισμούς για το εάν, πού ή πώς το πρότυπο εκδηλώνεται, και είναι αληθείς για το πρότυπο αυτό αδιαφορώντας για την εφαρμοσιμότητα του. ... Μια εφαρμοσμένη θεωρία προτύπου [εμπλέκει] ισχυρισμούς εκθέτοντας πώς το πρότυπο εκδηλώνεται ... (1982, σ. 101).

Με αυτή την ορολογία, *μαθηματικές* δομές είναι εκείνες που παρουσιάζονται και μελετώνται μέσω καθαρών θεωριών. Τα μαθηματικά *καθ' εαυτά* είναι η «καθαρή» μελέτη των προτύπων.

Η εργασία των Crowell και Fox, για να επιστρέψουμε στα προηγούμενα παραδείγματα, αποσκοπούσε στην κατανόηση των κόμβων, η δουλειά του Turing στην κατανόηση της ανθρώπινης υπολογιστικής ικανότητας. Και τα δύο αυτά αντικείμενα μελέτης είναι εκ πρώτης όψεως μη μαθηματικά. Συνεπώς θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι οι δύο εργασίες ανήκουν στην επιστήμη και όχι στα μαθηματικά. Ωστόσο οι εργασίες τους κατατάσσονται στα μαθηματικά, διδάσκονται σε τμήματα μαθηματικών κ.τ.λ. Ένας άμεσος λόγος για αυτή την κατάταξη είναι ότι όλες εκτός από μερικές σελίδες της κάθε εργασίας είναι αφιερωμένες στη μελέτη και την ανάπτυξη των αντίστοιχων δομών *ως τέτοιων*. Οι συνδέσεις με την πραγματικότητα, όπως ο ισχυρισμός ότι τα δείγματα είναι παραδείγματα της δομής μετρήσιμων σημειοσυνόλων, θεωρούνται προφανείς -υπάρχει ελάχιστη ή καθόλου εμπειρική επιβεβαίωση. Με λίγα λόγια, στο μεγαλύτερο μέρος τους, η θεωρία των κόμβων και η υπολογισιμότητα είναι καθαρές θεωρίες συγκεκριμένων δομών. Η σχέση με την πραγματικότητα μπορεί να είναι αυτό που προκάλεσε την διερεύνηση αυτών των δομών, αυτή όμως η σχέση δεν ενδιαφέρει την ίδια τη μελέτη.

Κατά την άποψή μου, ο καθορισμός αυτού που λογίζεται ως μαθηματικά και αυτού που λογίζεται ως επιστήμη είναι, τουλάχιστον εν μέρει, ψευδο-πρόβλημα. Εκείνο που πρέπει να περιμένει κανείς είναι συνοριακές περιπτώσεις.

5. Ένα δεύτερο, συναφές πλεονέκτημα του δομισμού είναι ότι εξηγεί τις αλληλοσυνδέσεις μεταξύ των διαφόρων μαθηματικών κλάδων. Θεωρείστε, για παράδειγμα, την περιστασιακή χρήση της πραγματικής ανάλυσης για την απόδειξη θεωρημάτων για τους φυσικούς αριθμούς. Αυτό είναι δυνατό διότι η δομή των φυσικών αριθμών «εμπεριέχεται» ως τμήμα στη δομή των πραγματικών αριθμών. Συνεπώς δεν είναι τυχαίο που η μελέτη της δομής των πραγματικών αριθμών μπορεί να ρίξει φως στη δομή των φυσικών αριθμών. Τα αριθμοθεωρητικά θεωρήματα που προκύπτουν συχνά δεν αποτελούν συνέπειες της συνήθους (πρωτοβάθμιας) αριθμητικής. Παρομοίως, το γεγονός ότι η δομή των φυσικών αριθμών και η δομή των πραγματικών αριθμών (και μάλιστα οποιαδήποτε ουσιαστικά δομή μελετάται στα μαθηματικά) μπορεί να «έχει μοντέλο» στη συνολοθεωρητική ιεραρχία, εξηγεί την περιστασιακή χρήση της θεωρίας συνόλων για την απόδειξη θεωρημάτων στην αριθμητική και την ανάλυση.

Επομένως, υποστηρίζω ότι οι κλάδοι των καθαρών μαθηματικών και οι κλάδοι των εφαρμοσμένων μαθηματικών έχουν κοινό αντικείμενο μελέτης, τις δομές. Η αλληλεπίδραση μεταξύ τους είναι αποτέλεσμα της ύπαρξης ενός μοντέλου της μιας δομής εντός μιας άλλης ή, με άλλα λόγια, της χρήσης της μιας δομής για να μελετηθεί μια άλλη δομή. Η διαφορά μεταξύ καθαρών μαθηματικών και εφαρμοσμένων μαθηματικών είναι, τουλάχιστον εν μέρει, ένα ατύχημα της ιστορίας. Τα εφαρμοσμένα μαθηματικά μελετούν δομές οι οποίες έχουν παραδοσιακά αποτελέσει μέρος ιδιαίτερων επιστημονικών θεωριών. Ως εκ τούτου, αντίθετα με κάποιες από τις προηγούμενες φιλοσοφικές σχολές των μαθηματικών, ο δομισμός δεν προϋποθέτει μια αυστηρή διάκριση μεταξύ των κλάδων των καθαρών μαθηματικών και των κλάδων των εφαρμοσμένων μαθηματικών.

Θα πρότεινα, κλείνοντας, ότι υπάρχει κάτι σαν συνεχές με, ας πούμε, τη θεωρία συνόλων στο ένα άκρο, τα εφαρμοσμένα μαθηματικά και τη θεωρητική επιστήμη προς το μέσο, και την πειραματική επιστήμη στο άλλο άκρο.[23]

6. *Παράρτημα.* Σε ένα πρόσφατο, προκλητικό έργο (1980), ο Hartry Field παρουσιάζει μια περιγραφή της εφαρμογής των μαθηματικών σε συμφωνία με το σύνολο των αντιπλατωνικών του απόψεων.[24] Πιστεύω, αν και πιθανότατα ο ίδιος δεν θα συμφωνεί, ότι η βασική του ιδέα εναρμονίζεται με τον δομισμό.

Υπάρχουν δύο προβλήματα που ο Field προσπαθεί να λύσει. Το πρώτο είναι η υπόδειξη μιας μεθόδου που θα προσφέρει μια «νομιναλιστική» διατύπωση για κάθε αποδεκτή επιστημονική θεωρία, μια διατύπωση που δεν θα αναφέρεται σε, ή δεν θα έχει μεταβλητές με πεδίο αποτελούμενο από, αφηρημένες οντότητες. Το δεύτερο είναι να περιγράψει πώς η προσθήκη μιας μαθηματικής θεωρίας σε μια νομιναλιστική θεωρία μπορεί να είναι χρήσιμη χωρίς να προϋποτίθεται ότι οι μαθηματικές προτάσεις είναι αληθείς ή, μάλιστα, ότι υπάρχει αντικείμενο μελέτης των μαθηματικών. Θα εξετάσω σύντομα κάθε πλευρά.

Για το σκοπό της διατύπωσης αποδεκτών θεωριών, ο Field αναπτύσσει λεπτομερώς μια νομιναλιστική εκδοχή της νευτώνειας θεωρίας της βαρύτητας, μιας θεωρίας η οποία χρησιμεύει ως υπόδειγμα για άλλες θεωρίες και κλάδους της επιστήμης. Η θεωρία του Field θέτει, και έχει μεταβλητές με πεδίο ορισμού, τόσο χωροχρονικά σημεία όσο και περιοχές, όπου οι δεύτερες θεωρούνται ως κλάσεις (ή «αθροίσματα Goodman») χωροχρονικών σημείων. Τα αξιώματα διατυπώνονται με όρους ορισμένων πρωταρχικών ιδιοτήτων και σχέσεων μεταξύ χωροχρονικών σημείων.[25] Παραδείγματα αυτών περιλαμβάνει το *'y Μετ xz'* το οποίο ερμηνεύεται ως «τα x, y, και z είναι συγγραμμικά και το y βρίσκεται Μεταξύ του x και του z» και το '*xy Τ-Ισο zw*' το οποίο ερμηνεύεται ως «τα x και y είναι Ταυτόχρονα όπως είναι και τα z και w, και η απόσταση ανάμεσα στα x και y είναι ίση με την απόσταση ανάμεσα στα z και w».

Τα αξιώματα αυτής της θεωρίας συνεπάγονται ότι υπάρχει μια μη αριθμήσιμη απειρία χωροχρονικών σημείων και, ειδικότερα, ότι τα χωροχρονικά σημεία συγκροτούν ένα τετραδιάστατο συνεχές. Ο Field τα ονομάζει «δομικές ιδιότητες» των χωροχρονικών σημείων. Παραδέχεται ότι η άποψή του «χτίζει (εγγράφει) στον φυσικό χώρο όλη την πολυπλοκότητα και τη δομή που ο πλατωνιστής χτίζει (εγγράφει) στο σύστημα των πραγματικών αριθμών», προσθέτει όμως:

> ... η νομιναλιστική ένσταση όσον αφορά τη χρήση των πραγματικών αριθμών δεν βασιζόταν στο μη αριθμήσιμο του συνόλου τους ή στις δομικές υποθέσεις ... που κατά κανόνα γίνονται για αυτούς. Η ένσταση, έχει μάλλον να κάνει με τον αφηρημένο χαρακτήρα τους: όπως το αντιλαμβάνομαι, ακόμα και το να τεθεί *ένας* πραγματικός αριθμός θα αποτελούσε παραβίαση του νομιναλισμού. Αντιστρόφως, το να θέσουμε μια μη αριθμήσιμη απειρία *φυσικών* οντοτήτων ... δεν αποτελεί ένσταση για την αναίρεση του νομιναλισμού· ούτε αυτός καθίσταται περισσότερο αμφισβητήσιμος όταν κανείς θέτει ότι αυτές οι φυσικές οντότητες υπακούουν δομικές υποθέσεις ανάλογες με εκείνες που οι πλατωνιστές θέτουν για τους πραγματικούς αριθμούς (1980, σ.31).

Η άποψη αυτή έχει τουλάχιστον κάτι κοινό με την παραπάνω δομιστική περιγραφή της εφαρμογής των μαθηματικών. Το να «χτίζω δομή σε» φαίνεται να είναι ό,τι αποκαλώ «αποτελώ παράδειγμα» ή «ενσωματώνω» *μια δομή.* Στην περίπτωση της νευτώνειας θεωρίας της βαρύτητας, οι «δομικές υποθέσεις» του Field ισοδυναμούν με τον *ισχυρισμό* ότι η κλάση των χωροχρονικών σημείων αποτελεί παράδειγμα της δομής του R^4 με τη σχέση που θα μπορούσε να ονομασθεί σχέση της

---

[23] Ένας συγκεκριμένος τομέας του Εβραϊκού Πανεπιστημίου στην Ιερουσαλήμ αποτελείται από τρία κτίρια στη σειρά. Αυτό που βρίσκεται δεξιά έχει επιγραφή «Μαθηματικά», το μεσαίο «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά και Θεωρητική Φυσική», και το αριστερό «Φυσική». Αυτό αποτελεί σαφή βελτίωση της συνήθους κατάστασης πραγμάτων, αλλά θα προτιμούσα ένα μοναδικό μακρύ κτίριο.

[24] Ο Field υποστηρίζει μια «νομιναλιστική» φιλοσοφία η οποία αρνείται την ύπαρξη όλων των «αφηρημένων οντοτήτων», όπως οι αριθμοί και τα μέλη της συνολοθεωρητικής ιεραρχίας. Κατά συνέπεια, οι μαθηματικές προτάσεις λαμβάνονται υπ' όψιν ως κατασκευάσματα της φαντασίας. Όσον αφορά τις αποδεκτές θεωρίες, ο Field ακολουθεί τον Nelson Goodman (1972) επιτρέποντας να έχουν οι μεταβλητές ως πεδίο ορισμού τους «νομιναλιστικώς υπαρκτά» αντικείμενα και μη κενές κλάσεις ή «αθροίσματα» επ' αυτών, αλλά όχι στοιχεία όπως κλάσεις κλάσεων.

[25] Σύμφωνα με τον Field, η δέσμευση αυτή απέναντι στα χωροχρονικά σημεία δεν παραβιάζει τον νομιναλισμό. Όπως επισημάνθηκε προηγουμένως στην υποσημείωση 17, θεωρεί ότι τέτοια σημεία είναι θεωρητικές *φυσικές* οντότητες ισότιμες με, ας πούμε, τα ηλεκτρόνια.

«γραμμικής ενδιαμεσότητας» (linear betweeness) . (Αυτή η σημαντική υπο-δομή του R^4 είναι παρόμοια με τη δομή που μελετάται στην ευκλείδεια γεωμετρία.) Υπό αυτούς τους όρους, ο νομιναλισμός του Field φαίνεται να εμπεριέχει την υπόθεση ότι ουσιαστικά κάθε δομή η οποία διαθέτει παραδειγματικές περιπτώσεις στη φυσική πραγματικότητα μπορεί να περιγραφεί πλήρως (με όρους πρωταρχικών σχέσεων) σε μια γλώσσα που έχει μόνο μεταβλητές με πεδίο θέσεις εντός της δομής και μη κενές κλάσεις τέτοιων θέσεων. Αυτό εγγυάται ότι όλες οι θεωρητικές οντότητες που θέτονται από ένα δεδομένο κλάδο της επιστήμης -οι οντότητες που απαντώνται στις θέσεις εντός της δομής- ικανοποιούν τις νομιναλιστικές αναστολές του Field.

Ο Field, βεβαίως, δεν θα δεχόταν αυτή την περιγραφή του προγράμματός του. Σίγουρα θα δείλιαζε μπροστά στον ειλικρινή λόγο μου για δομές (αντί για «δομικές υποθέσεις» ή τις «δομικές ιδιότητες»). Ωστόσο, όπως επισημάνθηκε παραπάνω, δεν επιθυμώ να κάνω οποιεσδήποτε τολμηρές οντολογικές υποθέσεις (με τον ένα ή με τον άλλο τρόπο) όσον αφορά τις δομές αυτές καθ' εαυτές. Η κύρια διαφωνία μου με τον Field φαίνεται να βρίσκεται στη φιλοσοφία των μαθηματικών. Αντιλαμβάνεται τις προτάσεις, λόγου χάριν, της πραγματικής ανάλυσης ως προτάσεις για οντότητες, που ονομάζονται «πραγματικοί αριθμοί», και των οποίων η ύπαρξη είναι αμφίβολη. Εγώ, από την άλλη μεριά, αντιλαμβάνομαι τις προτάσεις της πραγματικής ανάλυσης ως προτάσεις που αφορούν μια δομή. Τα «αντικείμενα» της θεωρίας, οι πραγματικοί αριθμοί, δεν είναι τίποτα παραπάνω από θέσεις μέσα στη δομή. Για να το θέσω αλλιώς, κατά την άποψή μου, οι επονομαζόμενες «δομικές» ιδιότητες των πραγματικών αριθμών είναι ό,τι μπορεί να ειπωθεί για αυτούς.[26]

Επιστρέφω στις απόψεις του Field για τη χρήση των μαθηματικών εντός της επιστήμης. Ο σημαντικότερος ισχυρισμός είναι ότι οι μαθηματικές θεωρίες είναι *συντηρητικές* έναντι των νομιναλιστικών θεωριών εντός της επιστήμης, με την έννοια ότι δεν υπάρχει νομιναλιστική υπόθεση της επιστήμης η οποία μπορεί να συναχθεί από μια συνδυασμένη θεωρία και δεν μπορεί να συναχθεί μόνο από τη νομιναλιστική θεωρία. Συνεπώς, σύμφωνα με τον Field, τα μαθηματικά μπορούν να συντομεύσουν τη διαδικασία συναγωγής, αλλά κατ' αρχήν μπορούμε να κάνουμε και χωρίς αυτά.

Αποφεύγοντας έναν τεχνικό ελιγμό που χρησιμοποιεί ο Field (ο σκοπός του δεν μας ενδιαφέρει εδώ), έστω N μια νομιναλιστική θεωρία εντός της επιστήμης και S μια μαθηματική θεωρία όπως η θεωρία συνόλων. Σύμφωνα με τον Field, τα μαθηματικά συνήθως εφαρμόζονται με τρόπο ώστε, στη συνδυασμένη θεωρία $N+S$, κάθε νομιναλιστική πρόταση Α αποδεικνύεται ότι είναι ισοδύναμη με μια πρόταση Α΄ η οποία είναι διατυπωμένη στη γλώσσα της μαθηματικής θεωρίας S. Η πρόταση Α΄ ονομάζεται *αφηρημένο σύστοιχο* της Α. Εάν η μαθηματική θεωρία S είναι συντηρητική έναντι της νομιναλιστικής θεωρίας N, τότε η διαδικασία αυτή είναι αποδεκτή για έναν νομιναλιστικά σκεπτόμενο επιστήμονα. Σε αυτή την περίπτωση, η χρήση των μαθηματικών (στη $N+S$) είναι θεωρητικώς πλεονάζουσα· για αυτό το λόγο είναι οντολογικώς αβλαβής.[27]

Στην εκδοχή του Field για τη νευτώνεια βαρυτική θεωρία, οι ισοδυναμίες αναπτύσσονται ως εξής: Πρώτα, αποδεικνύεται στη συνδυασμένη θεωρία ότι υπάρχει μια συνάρτηση-που-διατηρεί-τη-δομή, ένας ομομορφισμός, από τα σημεία του χωροχρόνου στο R^4. Δηλαδή, αποδεικνύεται ότι υπάρχει μια συνάρτηση f από την κλάση των χωροχρονικών σημείων στο σύνολο των τετράδων των πραγματικών αριθμών έτσι ώστε, για παράδειγμα, αν το $\langle a,b\rangle$ μπορεί να συμπίπτει με το $\langle c,d\rangle$ τότε η απόσταση στο R^4 μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$ είναι ίση με την απόσταση στο R^4 μεταξύ των $f(c)$ και $f(d)$. Στη βάση αυτού του ομομορφισμού, μπορεί κανείς να «μεταφράσει» οποιαδήποτε πρόταση για χωροχρονικά σημεία σε μια ισοδύναμη πρόταση για πραγματικούς αριθμούς. Ο επιστήμονας είναι ελεύθερος τότε να χρησιμοποιήσει χαρακτηριστικά της πραγματικής ανάλυσης τα οποία δεν είναι διαθέσιμα στη νομιναλιστική θεωρία του χωροχρόνου. Τέλος, κάποια από τα συμπεράσματα στη συνδυασμένη θεωρία μπορούν να ξαναμεταφραστούν σε νομιναλιστικά συμπεράσματα στη γλώσσα του χωροχρόνου.

Ένας δομιστής έχει μια μάλλον άμεση ερμηνεία αυτής της εργασίας. Ας θυμηθούμε ότι τα χωροχρονικά σημεία του Field αποτελούν παράδειγμα μιας ορισμένης μαθηματικής δομής, μιας υπο-

[26] Σύμφωνα με την άποψη μου, δεν μπορεί κανείς να βγάλει νόημα από τη φράση, «ακόμα και το να τεθεί ένας πραγματικός αριθμός» στο απόσπασμα που αναφέρεται παραπάνω. Δεν γίνεται να «θέσει» κάποιος μια θέση εντός μιας δομής χωρίς να επικαλεστεί τη δομή ως σύνολο. Παρομοίως, δεν μπορεί να μιλήσει κάποιος για ένα «παιδί» χωρίς να προϋποθέτει έναν «γονέα», ή για έναν «αμυντικό παίκτη μεταξύ της δεύτερης και της τρίτης βάσης» χωρίς να προϋποθέτει μια «αμυντική διάταξη του μπέιζμπολ».

[27] Άρθρο του Shapiro (1983) περιέχει ένα θεώρημα προς το συμπέρασμα ότι οι σχετικές μαθηματικές θεωρίες *δεν* είναι συντηρητικές έναντι της νομιναλιστικής φυσικής που αναπτύσσει ο Field. Ειδικότερα, δείχνεται ότι υπάρχει μια νομιναλιστική υπόθεση (στη γλώσσα της N) η οποία είναι θεώρημα της συνδυασμένης θεωρίας ($N+S$), αλλά δεν είναι θεώρημα της νομιναλιστικής φυσικής από μόνη της.

δομής του R^4. Η εργασία όσον αφορά τη «συνδυασμένη θεωρία» αντιστοιχεί σε μια σειρά *μαθηματικών* θεωρημάτων που συσχετίζουν αυτή τη δομή με τη συνολική δομή του R^4. Το κύριο αποτέλεσμα (όσον αφορά την ύπαρξη του ομομορφισμού f) είναι ένα πολύ γνωστό μαθηματικό θεώρημα, ότι η δομή του R^4 με τη σχέση της γραμμικής ενδιαμεσότητας μπορεί να επεκταθεί σε ολόκληρο το R^4 μέσω της εισαγωγής ενός συστήματος αναφοράς και μιας μετρικής. Έτσι ερμηνευμένη, η χρήση των μαθηματικών στη νομιναλιστική φυσική δεν είναι παρά ένα παράδειγμα του φαινομένου, που συζητείται παραπάνω, της ενσωμάτωσης ή της μοντελοποίησης μιας απλής μαθηματικής δομής σε μια πλουσιότερη δομή και της χρήσης της δεύτερης με σκοπό να φωτίσουμε την πρώτη.

Ολοκληρώνοντας, θα μπορούσε να σημειωθεί ότι το πρόγραμμα του Field και οι ισχυρισμοί του όσον αφορά την εφαρμογή των μαθηματικών, έχουν σημαντικό ενδιαφέρον για ένα δομιστή, ακόμα και για κάποιον με πλατωνικές τάσεις. Εάν οι πεποιθήσεις του Field που αφορούν την επιστήμη είναι σωστές, τότε καθορίζουν τα *είδη* των μαθηματικών δομών που πράγματι διαθέτουν παραδειγματικές περιπτώσεις στη φυσική πραγματικότητα και, επιπλέον, τις διακρίνουν από τις δομές που χρησιμοποιούνται από τους μαθηματικούς και τους επιστήμονες ως εννοιολογικά βοηθήματα. Ακόμα κι αν οι βασικές υποθέσεις του Field είναι λανθασμένες, το πρόγραμμά του θα ρίξει φως σε αυτά τα ζητήματα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ayer, A. (1946). *Language, Truth, and Logic*. New York: Dover publications.

Barbut, M. (1970). "On the meaning of the word 'structure' in mathematics" in Lane, pp. 367-388.

Benacerraf, P. (1965). "What numbers could not be", *Philosophical Review* **74**: 47-73.

Bourbaki, N. (1950). "The architecture of mathematics", *American Mathematical Monthly* **57**: 221-232.

Budden, F. J. (1972). *The Fascination of Groups*. Cambridge, England: Cambridge University Press.

Cohen, P. (1971). "Comments on the foundation of set theory" in D. Scott (ed.), *Axiomatic Set Theory*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, pp. 9-15.

Crowell, R. and Fox, R. (1963). *Introduction to Knot Theory*. Boston: Ginn and Company

Curry, H. (1958). *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics*. Amsterdam: North Holland Publishing Company.

Dedekind, R. (1888). "The nature and meaning of numbers" in R. Dedekind, *Essays on the Theory of Numbers*, W. W. Beman (ed.) (1963). New York: Dover Press, pp. 31-115.

Dummett, M. (1973). "The philosophical basis of intuitionistic logic", reprinted in M. Dummett, *Truth and Other Enigmas* (1978). Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, pp. 215-247.

Field, H. (1980). *Science Without Numbers*. Princeton: Princeton University Press.

Frege, G. (1903). *Grundgesetze der Arithmetik*, *Volume 2*.

Glymour, C. (1980).*Theory and Evidence*. Princeton: Princeton University Press.

Gödel, K. (1964). "What is Cantor's continuum problem", in P. Benacerraf and H. Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, pp. 258-273.

Goodman, Nelson (1972). *Problems and Projects*. Indianapolis: Bobbs-Merill.

Goodman, Nicolas D. (1979). "Mathematics as an objective science", *American Mathematical Monthly* **88**: 540-551.

Harman, G. (1975). "Meaning and semantics", in *Semantics and Philosophy*. New York: NYU Press, pp. 1-16.

Hempel, C. (1945). "On the nature of mathematical truth", *American Mathematical Monthly* **52**: 543-556.

Heyting, A. (1956). *Intuitionism, An Introduction*. Amsterdam: North Holland Publishing Company.

Kraut, R. (1980). "Indiscernibility and ontology", *Synthese* **44**: 113-135.

Lane, M. (ed.) (1970). *Introduction to Structuralism*. New York: Basic Books.

Maddy, P. (1980). "Perception and mathematical intuition", *The Philosophical Review* **89**: 163-196.

Nutter, J. T. (1980). *Structuralism in the philosophy of mathematics*, Ph.D. Dissertation, SUNY/Buffalo.

Piaget, J. (1968). *Le Structuralisme*. Paris: Presses Universitaires de France.

Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning*. Princeton: Princeton University Press.

Polya, G. (1977). *Mathematical Methods in Science*. Washington, D. C.: Mathematical Association of America.

Putnam, H. (1971). *Philosophy of Logic*. New York: Harper Torchbooks.

Resnik, M. (1975). "Mathematical knowledge and pattern cognition", *Canadian Journal of Philosophy* *5*: 25-39.

Resnik, M. (1980). *Frege and the Philosophy of Mathematics*. Ithaca, New York: Cornell University Press.

Resnik, M. (1981). "Mathematics as a science of patterns: Ontology and reference", *Nous* **15**: 529-550.

Resnik, M. (1982). "Mathematics as a science of patterns: Epistemology", *Nous* **16**: 95-105.

Robinson, A. (1965). "Formalism" in Y. Bar-Hillel (ed.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science*. Amsterdam: North Holland Publishing Company, pp. 228-246.

Shapiro, S. (1981). "Understanding Church's thesis", *Journal of Philosophical Logic* **10**: 353-365.

Shapiro, S. (1983). "Conservativeness and incompleteness", *Journal of Philosophy* **80**: 521-531.

Steiner, M. (1975). *Mathematical Knowledge*. Ithaca, New York: Cornell University Press.

Turing, A. (1936). "On computable numbers, with an application to the Entscheidungs-problem", reprinted in M. Davis (ed.), *The Undecidable* (1965). Hewlett, New York: The Raven Press, pp. 116-153.

Turnbull, R. (1978). "Knowledge of the forms in the later platonic dialogues", *Proceedings and Addresses of the American Philosophical Association* **51**: 735-758.

Wilson, M. (1981). "The double standard in ontology", *Philosophical Studies* **39**: 409-427.