

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΛΗΘΕΙΑ

PAUL BENACERRAF

Μολονότι αυτό το συμπόσιο έχει τον τίτλο «Η μαθηματική αλήθεια», θα εξετάσω και ζητήματα που είναι κάπως ευρύτερα αλλά τα ίδια εξαρτώνται από τον τρόπο με τον οποίο εξηγείται η μαθηματική αλήθεια. Ανάμεσά τους το ζήτημα της μαθηματικής γνώσης είναι το σπουδαιότερο. Υποστηρίζω ότι δύο εντελώς διακριτά είδη ενδιαφέροντος μας παρακινούν, το καθένα χωριστά, να εξηγήσουμε τη φύση της μαθηματικής αλήθειας: (1) το ενδιαφέρον μας να έχουμε μία ομοιογενή σημασιολογική θεωρία στην οποία η σημασιολογία των μαθηματικών προτάσεων να είναι παράλληλη με τη σημασιολογία της υπόλοιπης γλώσσας¹, και (2) το ενδιαφέρον μας να εναρμονίσουμε την εξήγηση της μαθηματικής αλήθειας με μία αποδεκτή επιστημολογία. Η γενική θέση που θα υποστηρίξω είναι ότι για όλες σχεδόν τις εξηγήσεις της έννοιας της μαθηματικής αλήθειας μπορούμε να πούμε ότι υπηρετούν έναν από τους κυρίους εις βάρος του άλλου. Και επειδή πιστεύω ότι μια επαρκής εξήγηση πρέπει να ικανοποιεί και τα δύο ενδιαφέροντα, νιώθω βαθιά δυσσέσκεια μπροστά σε όλα τα «πακέτα» σημασιολογίας και επιστημολογίας που προτάθηκαν για να εξηγηθεί η αλήθεια και η γνώση μέσα και έξω από τα μαθηματικά. Γιατί, όπως θα υποστηρίξω, οι εξηγήσεις που βλέπουν τον μαθηματικό και τον μη μαθηματικό λόγο με ουσιαστικά όμοιο τρόπο πληρώνουν το τίμημα του να αφήνουν ακατανόητο το πώς είναι δυνατόν να έχουμε την παραμικρή μαθηματική γνώση· ενώ όσες αποδίδουν στις μαθηματικές προτάσεις τα είδη των συνθηκών αληθείας που σαφώς γνωρίζουμε ότι ισχύουν, τις αποδίδουν πληρώνοντας το τίμημα του να μη συνδέουν αυτές τις συνθήκες με καμιά ανάλυση των αποφάσεων, η οποία να δείχνει πώς οι συνθήκες που αποδόθηκαν αποτελούν συνθήκες της αληθείας τους. Το τι σημαίνει αυτό πρέπει, σε τελευταία ανάλυση, να εκτεθεί αρκετά λεπτομερώς για να θεμελιώσει τον ισχυρισμό μου, και δεν μπορώ να ελπίζω ότι θα γίνει μέσα στο παρόν περιορισμένο πλαίσιο. Ωστόσο, θα προσπαθήσω να το διευκρινίσω αρκετά, ώστε να σας επιτρέψω να κρίνετε αν ο ισχυρισμός μου είναι βάσιμος ή όχι.

Θεωρώ προφανές ότι μία φιλοσοφικά ικανοποιητική εξήγηση της αλήθειας, της αναφοράς, του νοήματος, και της γνώσης πρέπει να τις καλύπτει όλες και πρέπει να επαρκεί για όλες τις προτάσεις στις οποίες εφαρμόζονται αυτές οι έννοιες². Μία εξήγηση της γνώσης, που φαίνεται να λειτουργεί για ορισμένες εμπειρικές προτάσεις σχετικές με υλικά αντικείμενα μέσου μεγέθους, αλλά δεν εξηγεί τη θεωρητικότερη γνώση, δεν είναι ικανοποιητική – όχι μόνο γιατί δεν είναι πλήρης, αλλά και γιατί μπορεί να είναι λαθεμένη ακόμη και ως εξήγηση των πραγμάτων που φαίνεται να καλύπτει με επάρκεια. Μια διαφορετική τοποθέτηση θα σήμαινε, μεταξύ άλλων, ότι αγνοούμε την αλληλεξάρτηση της γνώσης μας σε διαφορετικές περιοχές. Το ίδιο ισχύει για εξηγήσεις της αλήθειας και της αναφοράς. Μια θεωρία της αλήθειας για τη γλώσσα που μιλάμε, στην οποία επιχειρηματολογούμε, διατυπώνουμε θεωρίες, μαθηματικοποιούμε κτλ., πρέπει και να προβλέπει τις ίδες συνθήκες αλήθειας για τις ίδιες αποφάνσεις. Οι συνθήκες αλήθειας που αποδίδονται σε δύο αποφάνσεις οι οποίες περιέχουν ποσοδεικτές πρέπει να αντανακλούν με ουσιαστικά όμοιους τρόπους τη συμβολή των ποσοδεικτών. Για να αξίζει να εξετάσουμε μία θεωρία που θα αποκλίνει από αυτό το είδος της ομοιογένειας θα πρέπει αυτή να έχει ισχυρότατη αιτιολόγηση. Μία τέτοια απόκλιση, λ.χ., μπορεί να εμφανισθεί σε μία θεωρία που θα εξηγούσε τη συμβολή των ποσοδεικτών στον μαθηματικό διαλογισμό διαφορετικά από ό,τι στον κανονικό καθημερινό διαλογισμό γύρω από μολύβια, ελέφαντες και αντιπροέδρους. Ο David Hilbert πρότεινε μία τέτοια εξήγηση στο άρθρο του «Για το άπειρο», την οποία σχολιάζω συνοπτικά παρακάτω. Αργότερα θα επιχειρήσω να πω περισσότερα για τους όρους που προσδοκώ να πληροί μία ικανοποιητική γενική θεωρία της αλήθειας για τη γλώσσα μας, καθώς και για τον τρόπο με τον οποίο μία τέτοια εξήγηση πρέπει να εναρμονίζεται με αυτό που θεωρώ ότι είναι μία αποδεκτή εξήγηση της γνώσης. Εδώ αρκεί να πω ότι, αν και συχνά είναι βολικό να παρουσιάζω τη συζήτησή μου με τη βοήθεια θεωριών για τη μαθηματική αλήθεια, θα πρέπει πάντοτε να έχουμε υπόψη μας ότι το πραγματικό θέμα μας είναι μία συνολική φιλοσοφική άποψη. Υποστηρίζω ότι, ως συνολική άποψη είναι ανεπαρκής –όχι τόσο επειδή δεν διαθέτουμε μία φαινομενικά ικανοποιητική εξήγηση της μαθηματικής αλήθειας ή επειδή δεν διαθέτουμε μία φαινομενικά ικανοποιητική εξήγηση της μαθηματικής γνώσης– όσο επειδή δεν διαθέτουμε καμία εξήγηση που να τις συνδέει ικανοποιητικά. Ελπίζω ότι θα είναι τελικά δυνατόν να βρούμε μία τέτοια εξήγηση και ελπίζω ότι αυτό τα άρθρα θα βοηθήσει σ' αυτή την κατεύθυνση με το να εντοπίσει καλύτερα μερικά από τα εμπόδια που συναντά η έρευνα.

1. Δύο είδη εξήγησης

Ας εξετάσουμε τις ακόλουθες δύο αποφάνσεις:

- (1) Υπάρχουν τουλάχιστον τρεις μεγάλες πόλεις που είναι αρχαιότερες από τη Νέα Υόρκη.
- (2) Υπάρχουν τουλάχιστον τρεις τέλει αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι από τον 17.

Έχουν την ίδια λογικο-γραμματική μορφή; Πιο συγκεκριμένα, είναι και οι δύο της μορφής

- (3) Υπάρχουν τουλάχιστον τρία FG που έχουν την R με το a ,

όπου το «Υπάρχουν τουλάχιστον τρία» είναι ένας αριθμητικός ποσοδεικτής που μπορεί να απαλειφθεί με τον συνηθισμένο τρόπο και να αντικατασταθεί με υπαρκτικούς ποσοδεικτές, μεταβλητές και την ταυτότητα: τα ' F ' και ' G ' πρέπει να αντικατασταθούν με κατηγορήματα μιας θέσης, το ' R ' με ένα κατηγορήμα δύο θέσεων και το ' a ' με ένα στοιχείο από το πεδίο του λόγου των ποσοδεικτών; Ποιες είναι οι συνθήκες αλήθειας των (1) και (2); Είναι ουσιαστικά ανάλογες; Ας αγνοήσουμε την αοριστία των 'μεγάλος' και 'αρχαιότερος από' καθώς και τις ιδιομορφίες των κατασκευών με ιδιότητες-επίθετα οι οποίες στα αγγλικά κάνουν μια μεγάλη πόλη να είναι όχι κάτι μεγάλο και πόλη αλλά περισσότερο (αλλά όχι ακριβώς) σαν κάτι το μεγάλο για πόλη. Έχοντας περιορίσει αυτές τις δυσκολίες, φαίνεται σαφές ότι η (3) καθρεφτίζει με ακρίβεια τη δομή της (1), και επομένως ότι η (1) θα αληθεύει μόνο αν το πράγμα που ονομάζει η έκφραση που αντικαθιστά το ' a ' ('Νέα Υόρκη') έχει τη σχέση που σημαίνει η έκφραση που αντικαθιστά το ' R ' (' \supset είναι αρχαιότερη από \supset ') με τρία τουλάχιστον στοιχεία (του πεδίου του λόγου των ποσοδεικτών) τα οποία ικανοποιούν τα κατηγορήματα που αντικαθιστούν τα ' F ' και ' G ' ('μεγάλη' και 'πόλη' αντίστοιχα). Αυτό, νομίζω, θα μας έλεγε ένας κατάλληλος ορισμός της αλήθειας. Και πιστεύω πως είναι σωστό. Επομένως, αν η (1) αληθεύει, αυτό οφείλεται στο ότι ορισμένες πόλεις έχουν μεταξύ τους ορισμένες σχέσεις κτλ.

Αλλά τι γίνεται με την (2); Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (3) με τον ίδιο τρόπο σαν μήτρα για να διατυπώσουμε τις συνθήκες της αλήθείας της; Αυτό ακούγεται σαν ανόητη ερώτηση στην οποία η προφανής απάντηση είναι «Ασφαλώς». Ωστόσο η ιστορία του ζητήματος (η φιλοσοφία των μαθηματικών) καταγράφει πολλές άλλες απαντήσεις. Μερικοί (στους οποίους περιλαμβάνεται ένας από τους παρελθόντες και παρόντες εαυτούς μου³), διστάζοντας να αντιμετωπίσουν τις συνέπειες του συνδυασμού αυ-

τής που θα βαφτίσω «σταθεροτυπική» (standard) σημασιολογική εξήγηση με μία πλατωνιστική άποψη για τη φύση των αριθμών, απομακρύνθηκαν από την υπόθεση ότι τα αριθμητικά είναι ονόματα και, ως εκ τούτου, από την παραδοχή ότι η (2) έχει τη μορφή της (3). Ο David Hilbert (1926) διάλεξε μία διαφορετική αλλά εξίσου αποκλίνουσα προσέγγιση, όταν προσπάθησε να εξηγήσει ικανοποιητικά τη μαθηματική χρήση της έννοιας του απείρου. Κατά μία εκδοχή, ο Hilbert ξεχώρισε μια τάξη δηλώσεων και μεθόδων, που ανήκουν στα «εποπτικά» μαθηματικά, ως τάξη που δεν χρειάζεται να αιτιολογηθεί περισσότερο. Ας υποθέσουμε ότι όλες αυτές είναι «περατοκρατικά επαληθεύσιμες» με μία σημασία που δεν έχει προσδιοριστεί ακριβώς. Οι αριθμητικές δηλώσεις που δεν έχουν αυτή την ιδιότητα – χαρακτηριστική περίπτωση: ορισμένες δηλώσεις που περιέχουν ποσοδείκτες, θεωρούνται από τον Hilbert ότι είναι διεργασιακοί μηχανισμοί για τη μετάδοση από «πραγματικές» ή «περατοκρατικά επαληθεύσιμες» δηλώσεις σε «πραγματικές» δηλώσεις, ακριβώς όπως ο οπαδός της διεργασιακής άποψης (instrumentalism) θεωρεί τις φυσικές θεωρίες σαν τρόπο μετάβασης από παρατηρησιακές αποφάνσεις σε παρατηρησιακές αποφάνσεις. Ο Hilbert ονόμασε αυτές τις μαθηματικά «θεωρητικές» δηλώσεις «ιδεατά στοιχεία» και εξομοίωσε την εισαγωγή τους προς την εισαγωγή στην προβολική γεωμετρία σημείων «στο άπειρο»: αυτά εισάγονται ως βοηθήματα που κάνουν απλούστερη και κομψότερη τη θεωρία των πραγμάτων που μας ενδιαφέρουν πραγματικά. Αν η εισαγωγή τους δεν οδηγεί σε αντίφαση και αν έχουν αυτές τις άλλες λειτουργίες, τότε είναι δικαιολογημένη: σ' αυτό οφείλεται η αναζήτηση μιας απόδειξης εσωτερικής συνέπειας για ολόκληρη την πρωτοβάθμια αριθμητική.

Αν αυτή η περιγραφή της άποψης του Hilbert είναι αποδεκτή, παρ' ότι είναι σχηματική, τότε δείχνει πως ο Hilbert δεν θεωρούσε σημασιολογικά ισότιμες όλες τις ποσοποιημένες δηλώσεις. Είναι πολύ δύσκολο να βρεθεί μία σημασιολογία για την αριθμητική, όπως την αντιλαμβάνονταν εκείνος. Αλλά δύσκολο ή όχι, ασφαλώς δεν θα ανέλυε με τον ίδιο τρόπο τον ποσοδείκτη της (2) και τον ποσοδείκτη της (1). Η άποψη του Hilbert, όπως τη σκιαγράφησα, αποτελεί κατηγορηματική άρνηση του ότι η (3) είναι το μοντέλο σύμφωνα με το οποίο είναι κατασκευασμένη η (2).

Σε άλλες παρόμοιες εξηγήσεις οι συνθήκες αλήθειας για τις αριθμητικές αποφάνσεις δίδονται ως τυπική παραγωγικότητά τους από ορισμένα σύνολα αξιωμάτων. Όταν συνδεθούν με την επιθυμία να αποδίδεται αληθιμική σε κάθε κλειστή απόφαση της αριθμητικής, αυτές οι απόψεις υπονομεύονται από τα θεωρήματα μη πληρότητας. Θα μπορούσαν να αποκατασταθούν τουλάχιστον στην εσωτερική τους συνέπεια είτε με μια φιλελευθεροποίηση του τι λογαριάζεται ως παραγωγή (λ.χ. αν στις επιτρεπτές παραγωγές συμπεριλάβουμε την εφαρμογή ενός ω -κανόνα), είτε αν εγκαταλεί-

φθει η επιθυμία για πληρότητα. Επειδή δεν διαθέτουμε καλύτερο όρο και επειδή σχεδόν ανεξαιρέτα αφορούν κυρίως συντακτικά (συνδυαστικά) γνωρίσματα των αποφάνσεων, θα ονομάσω αυτές τις απόψεις «συνδυαστικές» απόψεις των καθοριστικών παραγόντων της μαθηματικής αλήθειας. Καθοδηγητική για τις συνδυαστικές απόψεις είναι η ιδέα του να αποδίδονται αληθοτιμές στις αριθμητικές αποφάνσεις βάσει ορισμένων συντακτικών γεγονότων που τις αφορούν (συνήθως σχετικών με τη θεωρία της απόδειξης). Συχνά, η αλήθεια ορίζεται ως (τυπική) παραγωγικότητα από ορισμένα αξιώματα. (Συχνά ο ισχυρισμός είναι λιγότερο φιλόδοξος – πρόκειται για τον ισχυρισμό της αλήθειας-στο- Σ , όπου Σ είναι το ειδικό σύστημα που μελετάμε.) Όπως κι αν έχουν τα πράγματα, σε τέτοιες περιπτώσεις είναι καταφανές ότι η αλήθεια δεν εξηγείται μέσω της αναφοράς (reference), της υποδήλωσης (denotation) ή της ικανοποίησης. Το κατηγορημα «αλήθεια» ορίζεται με συντακτικό τρόπο.

Ομοίως, «συνδυαστικές», με την παραπάνω σημασία, είναι και ορισμένες απόψεις για την αλήθεια στην αριθμητική, σύμφωνα με τις οποίες τα αξιώματα του Peano χαρακτηρίζονται «αναλυτικά» για την έννοια του αριθμού. Το ίδιο ισχύει και για τις εξηγήσεις των συμβατιστών, γιατί αυτό που τις χαρακτηρίζει ως συμβατιστικές είναι η αντίθεσή τους στη «ρεαλιστική» εξήγηση που αναλύει την (2) εξομοιώνοντάς την με την (1) μέσω της (3).

Τέλος, πρέπει να κάνουμε ακόμη μία διάκριση. Μία άποψη δεν είναι αυτόματα «συνδυαστική», αν ερμηνεύει τις μαθηματικές προτάσεις ως κάτι το σχετικό με συνδυαστικά ζητήματα, αυτοαναφορικά ή αλλιώς. Γιατί μια τέτοια άποψη θα μπορούσε να αναλύει τις μαθηματικές προτάσεις με «σταθεροτυπικό» τρόπο μέσω των όρων και των ποσοδεικτών που ενδεχομένως περιέχουν και μέσω των ιδιοτήτων που αποδίδουν στα αντικείμενα του πεδίου του λόγου τους – που σημαίνει ότι ουσιαστικά πρόκειται για την έννοια της αλήθειας όπως την ορίζει ο Tarski. Η διαφορά έγκειται στο ότι οι οπαδοί της, μολονότι είναι ρεαλιστές, όταν αναλύουν τη μαθηματική γλώσσα, απομακρύνονται από τους πλατωνιστές με το να θεωρούν ότι το μαθηματικό πεδίο αποτελείται αποκλειστικά από μαθηματικά ανορθόδοξα αντικείμενα: Γι' αυτούς, τα μαθηματικά περιορίζονται στα μεταμαθηματικά και αυτά, με τη σειρά τους, στο συντακτικό.

Θα αναβάλω για τα επόμενα κεφάλαια την αποτίμηση των σχετικών πλεονεκτημάτων αυτών των προσεγγίσεων στην αλήθεια αποφάνσεων όπως η (2). Σ' αυτό το σημείο θα ήθελα μόνο να εισαγάγω τη διάκριση ανάμεσα, αφ' ενός, στις απόψεις εκείνες που αποδίδουν την προφανή σύνταξη (και την αυτονόητη σημασιολογία) στις μαθηματικές δηλώσεις και, αφ' ετέρου, στις άλλες απόψεις οι οποίες, αγνοώντας τη φαινομενική σύνταξη και σημασιολογία, επιχειρούν να διατυπώσουν συνθήκες αλήθειας (ή να

προσδιορίσουν και να εξηγήσουν την υπάρχουσα κατανομή αληθοτιμών) βάσει προφανώς μη σημασιολογικών συντακτικών παραγόντων. Τελικά, θα υποστηρίξω ότι κάθε είδος εξήγησης έχει τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά του: το καθένα τους εστιάζεται σε ένα σημαντικό παράγοντα μιας συνολικής φιλοσοφικής εξήγησης της αλήθειας και της γνώσης.

Αλλά ποιοι είναι αυτοί οι παράγοντες και πώς σχετίζονται μεταξύ τους;

II. Δύο συνθήκες

A. Ο πρώτος παράγοντας μιας τέτοιας συνολικής άποψης αφορά αμεσότερα την έννοια της αλήθειας. Για τους παρόντες σκοπούς μας μπορούμε να τον διατυπώσουμε ως αίτημα: να υπάρχει μια συνολική θεωρία της αλήθειας μέσω της οποίας να πιστοποιείται ότι η εξήγηση της μαθηματικής αλήθειας είναι πραγματικά μία εξήγηση της μαθηματικής αλήθειας. Η εξήγηση πρέπει να περιέχει συνθήκες αλήθειας των μαθηματικών προτάσεων, οι οποίες είναι προφανώς συνθήκες για την αλήθειά τους (και όχι μόνο, ας πούμε για το ότι είναι θεωρήματα κάποιου τυπικού συστήματος). Με αυτό δεν λέμε ότι αν κάτι είναι θεώρημα κάποιου συστήματος, τότε δεν μπορεί να είναι συνθήκη αλήθειας για μία δεδομένη πρόταση ή τάξη προτάσεων. Απαιτούμε, όμως, από κάθε θεωρία που προτείνει ως συνθήκη της αλήθειας ενός πράγματος το να είναι αυτό το πράγμα θεώρημα, να εξηγεί και τη σχέση ανάμεσα στην αλήθεια και το να είναι θεώρημα.

Μια άλλη διατύπωση αυτής της πρώτης απαίτησης είναι να ζητάμε από κάθε θεωρία της μαθηματικής αλήθειας να συμμορφώνεται με μια γενική θεωρία της αλήθειας – αν προτιμάτε, μία θεωρία για τις θεωρίες της αλήθειας – η οποία πιστοποιεί ότι η ιδιότητα των αποφάνσεων τις οποίες η εξήγηση χαρακτηρίζει «αληθείς» όντως είναι η αλήθεια. Κατά τη γνώμη μου αυτό μπορεί να γίνει μόνο βάσει μιας γενικής θεωρίας για τη γλώσσα ως ολότητα (κάνω την παραδοχή ότι αντιπαρερχόμαστε τα παράδοξα με κάποιο κατάλληλο τρόπο). Ίσως η εφαρμογή αυτής της απαίτησης στην παρούσα περίπτωση να ισοδυναμεί μονάχα προς την έκκληση να βλέπουμε τον σημασιολογικό εξοπλισμό των μαθηματικών ως αναπόσπαστο τμήμα του σημασιολογικού εξοπλισμού της φυσικής γλώσσας με την οποία οικοδομούνται και, επομένως, όποια σημασιολογική εξήγηση κι αν τείνουμε να δώσουμε για τα ονόματα ή, γενικότερα, τους ενικούς όρους, τα κατηγορήματα και τους ποσοδείκτες της μητρικής γλώσσας, αυτή η εξήγηση πρέπει να περιλαμβάνει εκείνα τα τμήματα της μητρικής γλώσσας που ταξινομούμε ως μαθηματικό ιδίωμα (mathematése).

Υποστηρίζω ότι αν θέλουμε να συμμορφωθούμε με αυτή την απαίτηση, δεν πρέπει να ικανοποιούμαστε με μία εξήγηση που δεν πραγματεύεται τις

(1) και (2) με παράλληλο τρόπο, βάσει του μοντέλου της (3). Ασφαλώς μπορεί να υπάρχουν διαφορές, αλλά περιμένω ότι αυτές θα παρουσιασθούν στο επίπεδο στο οποίο αναλύεται η αναφορά των ενικών όρων των κατηγορημάτων. Θεωρώ ότι διαθέτουμε μόνο μία τέτοια εξήγηση: την εξήγηση του Tarski, και ότι το ουσιαστικό γνώρισμά της είναι ότι ορίζει την αλήθεια με τη βοήθεια της αναφοράς (ή της ικανοποίησης) βάσει ενός ιδιαίτερου είδους συντακτικο-σημασιολογικής ανάλυσης της γλώσσας: επομένως, ότι κάθε υποτιθέμενη ανάλυση της μαθηματικής αλήθειας πρέπει να αναλύει μια έννοια η οποία θα είναι έννοια της αλήθειας τουλάχιστον με τη σημασία του Tarski. Αν υποβληθεί στην κατάλληλη επεξεργασία, πιστεύω ότι αυτή η απαίτηση δεν συμβιδιάζεται με καμία από τις εξηγήσεις που ονόμασα «συνδυαστικές». Από την άλλη μεριά, προφανώς η εξήγηση που εξομοιώνει την (2) με την (1) και την (3) ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη, και το ίδιο κάνουν πολλές παραλλαγές της.

B. Η δεύτερη συνθήκη, που απαιτώ να ικανοποιεί μία συνολική άποψη, προϋποθέτει ότι έχουμε μαθηματική γνώση και ότι αυτή η γνώση δεν παύει να είναι γνώση επειδή είναι μαθηματική. Δεδομένου ότι η γνώση μας είναι (ή μπορεί να ερμηνευθεί ως) γνώση αληθειών, για να είναι αποδεκτή μία εξήγηση της μαθηματικής αλήθειας θα πρέπει να συμβιδιάζεται με τη δυνατότητα να έχουμε μαθηματική γνώση: οι συνθήκες αλήθειας των μαθηματικών προτάσεων δεν μπορούν να κάνουν αδύνατη τη γνώση ότι ικανοποιούνται. Με αυτό δεν υποστηρίζω ότι δεν μπορεί να μην υπάρχουν αλήθειες που είναι αδύνατον να γίνουν γνωστές – αλλά μόνο ότι δεν είναι όλες οι αλήθειες αδύνατον να γνωσθούν, γιατί γνωρίζουμε μερικές. Λοιπόν, η ελάχιστη απαίτηση είναι: μία ικανοποιητική εξήγηση της μαθηματικής αλήθειας, όπως εξηγήθηκε, πρέπει να συμμορφώνεται με μία συνολική εξήγηση της γνώσης με τρόπο που να καθιστά κατανοητό το πώς έχουμε τη μαθηματική γνώση που διαθέτουμε. Μία αποδεκτή σημασιολογία για τα μαθηματικά πρέπει να ταιριάζει σε μία αποδεκτή επιστημολογία. Λόγου χάρι, αν γνωρίζω ότι το Κλήβελαντ βρίσκεται ανάμεσα στη Νέα Υόρκη και το Σικάγο, αυτό οφείλεται στο ότι υπάρχει μία ορισμένη σχέση ανάμεσα στις συνθήκες αλήθειας αυτής της δήλωσης και στην παρούσα «υποκειμενική» κατάσταση πίστης στην οποία βρίσκομαι (όποιες και αν είναι οι εξηγήσεις μας για την αλήθεια και τη γνώση, αυτές πρέπει να συνδέονται μεταξύ τους μ' αυτόν τον τρόπο). Ομοίως, στα μαθηματικά, πρέπει να είναι δυνατόν να διασυνδέουμε το τι σημαίνει η *p* είναι αληθές με την πίστη μου ότι *p*. Μολονότι αυτό είναι εξαιρετικά αόριστο, νομίζω ότι μπορούμε να δούμε πώς η δεύτερη συνθήκη τείνει να αποκλείει εξηγήσεις που ικανοποιούν την πρώτη και να επιτρέπει πολλές από όσες δεν την ικανοποιούν. Γιατί μια χαρακτηριστική «σταθεροτυπική» εξήγηση (τουλάχιστον στην περίπτωση

της αριθμοθεωρίας ή της θεωρίας των συνόλων) θα παραστήσει τις συνθήκες αλήθειας με τη βοήθεια συνθηκών για αντικείμενα των οποίων η φύση, όπως την αντιλαμβανόμαστε κανονικά, τα τοποθετεί πέρα από εκείνο το χώρο των μέσων της ανθρώπινης γνωστικής λειτουργίας που κατανοούμε καλύτερα (λ.χ. την αισθητηριακή αντίληψη και τα παρόμοια). Από την άλλη μεριά, οι «συνδυαστικές» εξηγήσεις πηγάζουν συνήθως από μία ευαισθησία σ' αυτό ακριβώς το γεγονός και, επομένως, έχουν σχεδόν πάντοτε επιστημολογικά κίνητρα. Η αρετή τους έγκειται στο ότι προσφέρουν μία εξήγηση των μαθηματικών προτάσεων, η οποία βασίζεται στις μεθόδους που ακολουθούμε για να αιτιολογήσουμε την αλήθεια των ισχυρισμών στα μαθηματικά: δηλαδή στην απόδειξη. Δεν εκπλήσσει το ότι με μέτρο τέτοιες εξηγήσεις της μαθηματικής αλήθειας, δεν υπάρχει πολύ μυστήριο γύρω από το πώς μπορούμε να αποκτήσουμε μαθηματική γνώση. Φτάνει να εξηγήσουμε την ικανότητά μας να παράγουμε και να ελέγχουμε τυπικές αποδείξεις⁴. Ωστόσο, με το να πιέζουμε το μπαλόνι σ' αυτό το σημείο φαίνεται πως το κάνουμε να διογκώνεται από τη μεριά της αλήθειας: όσο πιο όμορφα δέσουμε την έννοια της απόδειξης, όσο πιο στενά συνδέσουμε τον ορισμό της απόδειξης με συνδυαστικά (και όχι με σημασιολογικά) γνωρίσματα, τόσο πιο δύσκολο είναι να τη συνδέσουμε με την αλήθεια αυτού που έτσι «αποδείχθηκε» – κάπως έτσι φαίνεται να συμβαίνει.

Αυτές είναι οι δύο απαιτήσεις. Χωριστές, φαίνονται αρκετά αβλαβείς. Στο υπόλοιπο τμήμα αυτού του άρθρου θα τις υπερασπισθώ περισσότερο και θα προσθέσω σάρκα στο επιχείρημα ότι συναρμολογημένες φαίνεται πως αποκλείουν σχεδόν όλες τις εξηγήσεις της μαθηματικής αλήθειας που έχουν προταθεί. Θα εξετάσω με τη σειρά τις δύο βασικές προσεγγίσεις στη μαθηματική αλήθεια που μνημόνευσα πιο πάνω, και θα σταθμίσω τα σχετικά πλεονεκτήματά τους στο φως των δύο θεμελιωδών αρχών που προτείνω. Ελπίζω ότι μ' αυτό θα φωτισθούν κάπως οι ίδιες οι αρχές.

III. Η σταθεροτυπική άποψη

Ονομάζω «σταθεροτυπική άποψη» την «πλατωνιστική» εξήγηση, σύμφωνα με την οποία, όταν η (2) αναλυθεί, έχει τη μορφή της (3). Οι αρετές της είναι πολλές, και αξίζει να τις απαριθμήσουμε κάπως λεπτομερώς προτού εξετάσουμε τις αδυναμίες της.

Όπως έχω ήδη επισημάνει, αυτή η εξήγηση εξομοιώνει τη λογική μορφή των μαθηματικών προτάσεων με τη μορφή των φαινομενικά όμοιων εμπειρικών προτάσεων: οι εμπειρικές, όπως οι μαθηματικές προτάσεις, περιέχουν κατηγορήματα, ενικούς όρους, ποσοδείκτες κτλ.

Τι συμβαίνει όμως με τις αποφάνσεις που δεν απαρτίζονται (ή η ορθή

ανάλυσή τους δεν απαρτίζεται) από ονόματα, κατηγορήματα και ποσοδείκτες; Ακόμη πιο άμεσα, τι θα πούμε για τις αποφάνσεις που δεν ανήκουν στο είδος της γλώσσας για το οποίο ο Tarski μας έδειξε πώς να ορίζουμε την αλήθεια; Θα έλεγα πως για τέτοιες γλώσσες (αν υπάρχουν) χρειαζόμαστε μια εξήγηση της αλήθειας του είδους που ο Tarski έδωσε για «αναφορικές» γλώσσες. Κάνω την παραδοχή ότι για τη γλώσσα (λ.χ., τα ελληνικά) στην οποία φαίνεται να ανήκει το μαθηματικό ιδίωμα πρέπει τις περισσότερες φορές να επεξεργαζόμαστε τις συνθήκες αλήθειας ακολουθώντας το σχήμα που άρθρωσε ο Tarski. Έτσι, ως ένα βαθμό, το ερώτημα που τέθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο – δηλ. Πώς πρέπει να εξηγήσουμε τις συνθήκες αλήθειας της (2); – μπορεί να ερμηνευθεί ως ερώτημα σχετικό με το αν η υπο-γλώσσα των ελληνικών, στην οποία γίνονται τα μαθηματικά, πρέπει να αναλυθεί με τον ίδιο τρόπο που δέχθηκα ότι ταιριάζει στα υπόλοιπα ελληνικά. Αν ναι, τότε ισχύουν σαφώς οι ενδοιασμοί που θα σκιαγραφήσω στο επόμενο κεφάλαιο σχετικά με το πώς μπορεί η μαθηματική γνώση να εναρμονιστεί με μια συνολική επιστημολογία – μολονότι ίσως να μπορούν να αρθούν με τη βοήθεια μιας κατάλληλης τροποποίησης της θεωρίας. Αν, από την άλλη μεριά, το μαθηματικό ιδίωμα δεν αναλυθεί σύμφωνα με ένα αναφορικό σχήμα, τότε αναμφίβολα χρειαζόμαστε όχι μόνο μία εξήγηση της αλήθειας (δηλ. μία σημασιολογία) γι' αυτό το νέο είδος γλώσσας, αλλά και μία νέα θεωρία για τις θεωρίες της αλήθειας, που να συσχετίζει την αλήθεια για τις αναφορικές (ποσοποιητικές) γλώσσες με την αλήθεια γι' αυτές τις νέες (ή νεοαναλυμένες) γλώσσες. Και όταν δοθεί μία τέτοια εξήγηση, δεν παύει να υπάρχει η υποχρέωση να εξηγήσουμε τη μαθηματική γνώση – αλλά υποθέτω ότι αυτό το έργο θα είναι ευκολότερο, γιατί η νέα σημασιολογική εικόνα του μαθηματικού ιδιώματος θα έχει, στις περισσότερες περιπτώσεις, υπαγορευθεί από επιστημολογικούς παράγοντες. Ωστόσο, στο παρόν άρθρο δεν εξετάζω αυτή την εναλλακτική λύση, επειδή δεν νομίζω πως τη διάλεξε ποτέ κανείς πραγματικά. Γιατί το να τη διαλέξει κανείς σημαίνει ότι ρητά εξετάζει και απορρίπτει στη «σταθεροτυπική» ερμηνεία της μαθηματικής γλώσσας, παρ' όλη την επιφανειακή και αρχική ευλογοφάνειά της και ότι, κατόπιν, προσφέρει ως υποκατάστατό της μια εναλλακτική σημασιολογία⁵. Συνήθως οι «συνδυαστικοί» θεωρητικοί που εξετάζω ή μνημονεύω ήθελαν και την πίτα ολόκληρη και το σκύλο χορτάτο: δεν αντιλήφθηκαν ότι οι συνθήκες αλήθειας που προσφέρουν, όταν εξηγούν τη μαθηματική γλώσσα, δεν έχουν συνδεθεί με την αναφορική σημασιολογία που δέχονται ότι είναι επίσης κατάλληλη γι' αυτή τη γλώσσα. Εξαίρεση ίσως να αποτελεί η άποψη του Hilbert που σκιαγράφησα συνοπτικά στις πρώτες σελίδες του άρθρου μου. Αλλά το να επεκταθώ σ' αυτό το ζήτημα θα μας απομάκρυνε πολύ από το σκοπό μας. Ας επιστρέψουμε, λοιπόν, στην εξύμνηση της «σταθεροτυπικής άποψης».

P. BENACERRAF

Ένα από τα πρωταρχικά πλεονεκτήματά της είναι ότι οι ορισμοί της αλήθειας για τις ατομικές μαθηματικές θεωρίες που ερμηνεύονται μ' αυτόν τον τρόπο διέπονται από τις ίδιες αναδρομικές ρήτρες που ρυθμίζουν την αλήθεια των λιγότερο υπεροπτικών εμπειρικών εξαδέλφων τους. Με άλλη διατύπωση, μπορούν όλες τους να θεωρηθούν μέρη της ίδιας γλώσσας, τους ποσοδείκτες της οποίας εξηγούμε με ενιαίο τρόπο ανεξάρτητο από τον κλάδο που εξετάζουμε. Οι μαθηματικοί και οι εμπειρικοί κλάδοι δεν θα διαφέρουν ως προς τη λογική γραμματική. Έχω ήδη τονίσει τη σημασία αυτού του πλεονεκτήματος: σημαίνει ότι η λογικο-γραμματική θεωρία που χρησιμοποιούμε είναι λιγότερο μυστηριώδης και ότι, σ' αυτή την περίπτωση, θα μας εξυπηρετήσουν καλά οι περισσότεροι ευάγωγοι τομείς. Μπορούμε να εξυπηρετηθούμε με μια ομοιόμορφη εξήγηση και δεν χρειάζεται να εφεύρουμε άλλη για τα μαθηματικά. Αυτό θα πρέπει να ισχύει για όλες σχεδόν τις γραμματικές θεωρίες τις συνδυασμένες με σημασιολογίες που είναι κατάλληλες ως εξηγήσεις της αλήθειας. Η προκατάληψή μου υπέρ αυτού που ονομάζω ταρσκιανή θεωρία πηγάζει απλώς από το γεγονός ότι η εξήγηση του Tarski είναι η μόνη διώσιμη συστηματική γενική εξήγηση της αλήθειας που διαθέτουμε. Έτσι, μια συνέπεια της οικονομίας που συνοδεύει τη σταθεροτυπική άποψη είναι ότι οι λογικές σχέσεις υπόκεινται σε ομοιόμορφη μεταχείριση: δεν μεταβάλλονται με το θεματικό περιεχόμενο. Μάλιστα δοθούν στον ορισμό της έννοιας του «θεματικού περιεχομένου». Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους ίδιους κανόνες συμπερασμού και να αιτιολογήσουμε τη χρήση τους με την ίδια θεωρία που μας προσφέρει την τρέχουσα εξήγηση του συμπερασμού και έτσι να αποφύγουμε το διπλό μέτρο. Αν απορρίψουμε τη σταθεροτυπική άποψη, ο μαθηματικός συμπερασμός θα χρειάζεται μια νέα και ειδική εξήγηση. Όπως έχουν τα πράγματα, οι σταθεροτυπικές χρήσεις των συμπερασμών που περιέχουν ποσοδείκτες αιτιολογούνται με κάποιας λογής απόδειξη ορθότητας. Η τυποποίηση των θεωριών στην πρωτοβάθμια λογική απαιτεί για την αιτιολόγησή της τη διαβεβαίωση (που παρέχει το θώρημα της πληρότητας) ότι όλες οι λογικές συνέπειες των αξιωμάτων θα προκύψουν ως θεωρήματα. Η σταθεροτυπική εξήγηση προσφέρει όλες αυτές τις εγγυήσεις. Οι προφανείς απαντήσεις φαίνονται να λειτουργούν. Απορρίπτοντας τη σταθεροτυπική άποψη απορρίπτουμε αυτές τις απαντήσεις. Και πρέπει να βρούμε νέες απαντήσεις.

Αυτά για τις φανερές αρετές της σταθεροτυπικής εξήγησης. Ποιες είναι οι κακίες της;

Όπως βλέπει πιο πάνω, η κυριότερη αδυναμία της σταθεροτυπικής εξήγησης είναι ότι φαίνεται πως πταριδιάζει τη συνθήκη, σύμφωνα με την οποία η εξήγηση της μαθηματικής αλήθειας πρέπει να μπορεί να ενσωματωθεί στη συνολική εξήγησή μας για τη γνώση. Είναι αρκετά προφανές ότι,

για να είναι πειστικό το επιχείρημά μου, χρειάζεται να σκιαγραφήσω την επιστημολογία που θεωρώ ότι είναι τουλάχιστον χονδρικά ορθή και δάσει της οποίας οι μαθηματικές αλήθειες, ερμηνευμένες με τον σταθεροτυπικό τρόπο, δεν φαίνονται να αποτελούν γνώση. Αυτό θα απαιτούσε μία μεγάλη λοξοδρομηση μέσα από τα γενικά προβλήματα της επιστημολογίας. Θα το αναβάλω για άλλη φορά και θα αρκεσθώ εδώ στο να παρουσιάσω μία σύντομη σύνοψη των εμφανών γνωρισμάτων της άποψης εκείνης που έχει αμεσότερη σχέση με το πρόβλημά μας.

IV. Η γνώση

Υποστηρίζω μία αιτιακή εξήγηση της γνώσης. Σύμφωνα μ' αυτήν, για να αληθεύει ότι ο X γνωρίζει την A απαιτείται να υπάρχει κάποια αιτιακή σχέση ανάμεσα στον X και στα αντικείμενα αναφοράς των ονομάτων, στα κατηγορήματα και στους ποσοδείκτες της A . Επιπρόσθετα υποστηρίζω μία αιτιακή θεωρία της αναφοράς: επομένως, ο δεσμός ανάμεσα στο να λέμε, έχοντας γνώση, ότι A [και την πραγματικότητα] είναι διπλά αιτιατός. Στα επόμενα ελπίζω να διαλύσω την ομίχλη που περιβάλλει αυτή τη διατύπωση.

Για να γνωρίζει η Ερμιόνη ότι το μαύρο αντικείμενο που κρατάει στο χέρι της είναι μία τρούφα [το είδος μανιταριού που λέγεται ύδνον, κοινώς χοιρόχορτο] απαιτείται (ή τουλάχιστον απαιτείται) αυτή να είναι σε μια ορισμένη (ίσως ψυχολογική) κατάσταση⁶. Επίσης, απαιτείται η συνεργασία του υπόλοιπου κόσμου, τουλάχιστον στο βαθμό που αυτός θα επιτρέψει στο αντικείμενο που κρατάει η Ερμιόνη να είναι μια τρούφα. Επιπλέον –και αυτό είναι το τμήμα που θα υπογράμμιζα– στην κανονική περίπτωση, το [γεγονός] ότι το αντικείμενο που κρατάει είναι μία τρούφα πρέπει να εμφανίζεται με κατάλληλο τρόπο σε μία αιτιακή εξήγηση της πεποίθησής της ότι το μαύρο αντικείμενο που κρατάει είναι μια τρούφα. Αλλά δεν θα επιχειρήσω να πω τι είναι ένας «κατάλληλος τρόπος». Πολλοί συγγραφείς δημοσίευσαν απόψεις που φαίνονται να δείχνουν την κατεύθυνση⁷ και, παρά τις μεταξύ τους διαφορές, φαίνεται να υπάρχει ένας κοινός ελοπτικός πυρήνας που θεωρώ ότι είναι σωστός, μολονότι είναι πολύ δύσκολο να τον περιγράψουμε ακριβώς.

Το ότι μια τέτοια άποψη πρέπει να είναι σωστή και αποτελεί το υπόβαθρο του τρόπου με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε τη γνώση φαίνεται από ό,τι θα λέγαμε στις ακόλουθες περιστάσεις. Υποστηρίζεται ότι ο X γνωρίζει ότι p . Πιστεύουμε ότι ο X δεν μπορεί να γνωρίζει ότι p . Ποιους λόγους μπορούμε να παρουσιάσουμε για να στηρίξουμε την άποψή μας; Αν έχουμε πεισθεί ότι ο X έχει κανονικές συλλογιστικές ικανότητες, ότι η p είναι

πραγματι αληθής κτλ., συχνά αναγκαζόμαστε να οπισθοχωρήσουμε και να χρησιμοποιήσουμε το επιχείρημα ότι ο X δεν μπορεί να έγινε κάτοχος της συναφούς μαρτυρίας ή των λόγων: ότι το τετραδιάστατο χωροχρονικό σκουλήκι του X δεν κάνει αναγκαία (αιτιακή) επαφή με τα θεμέλια της αλήθειας της πρότασης, ώστε ο X να κατέχει επαρκή μαρτυρία για να στηρίξει το συμπερασμό (αν ήταν συναφής ο συμπερασμός). Η πρόταση p βάζει περιορισμούς στο πώς μπορεί να είναι ο κόσμος. Συχνά, η γνώση μας του κόσμου, συνδυασμένη με το ότι κατανοούμε τους περιορισμούς που επιβάλλει η p , δεδομένων των συνθηκών αλήθειας της p , μας λέει ότι ένα δεδομένο άτομο δεν θα μπορούσε να έχει αποκτήσει αρκετή [αποδεικτική] μαρτυρία, ώστε να μπορούσε να γνωρίσει την p και επομένως θα απορρίψουμε τον ισχυρισμό του ότι γνωρίζει.

Προς το παρόν, ως εξήγηση της γνώσης μας γύρω από αντικείμενα μέσου μεγέθους, αυτό βρίσκεται στον καλό δρόμο. Εμπειρέχει, με αιτιακό τρόπο, μια άμεση αναφορά στα γνωστά γεγονότα και, μέσ' από αυτήν, την αναφορά στα ίδια τα αντικείμενα. Επιπλέον, μία τέτοια γνώση (για σπίτια, δέντρα, τρούφες, σκύλους και ψωμιές) παρουσιάζει την περίπτωση που είναι η πιο σαφής και ευάγωγη.

Μπορούμε να εξηγήσουμε τις άλλες περιπτώσεις γνώσης ως περιπτώσεις που βασίζονται σε συμπερασμούς βασισμένους σε περιπτώσεις όπως οι προηγούμενες, αν και είναι προφανές ότι πρέπει να υπάρχουν αλληλεξαρτήσεις. Έτσι δεν αποκλείουμε τη γνώση των γενικών νόμων και θεωριών και, μέσω αυτών, τη γνώση του μέλλοντος και αρκετών τμημάτων του παρελθόντος. Αυτή η περιγραφική εξήγηση ακολουθεί πιστά τη γραμμή που πρότειναν οι εμπειριοκράτες, αλλά με την αποφασιστική τροποποίηση που εισάγει η ρητή αιτιακή συνθήκη που μνημονεύσαμε πιο πάνω – η οποία συχνά παραλείπεται στις μοντέρνες εξηγήσεις, κυρίως επειδή προσπαθούν να διακρίνουν προσεκτικά την «ανακάλυψη» από την «αιτιολόγηση».

Με δυο λόγια, εν συνδυασμό με την υπόλοιπη γνώση μας, χρησιμοποιούμε την p για να καθορίσουμε το πεδίο της δυνατής συναφούς μαρτυρίας. Χρησιμοποιούμε ό, τι γνωρίζουμε για τον X (τον υποθετικό γνώστη) για να προσδιορίσουμε αν θα μπορούσε να υπάρξει το είδος της αλληλεπίδρασης που ταιριάζει, αν η τωρινή πίστη του X ότι p συνδέεται αιτιακά, με κατάλληλο τρόπο, με ό, τι συμβαίνει σ' αυτή την περίπτωση επειδή η p αληθεύει – αν αντλεί τη μαρτυρία του από το πεδίο που καθορίζει η p . Στην αντίθετη περίπτωση, ο X δεν θα μπορούσε να γνωρίζει ότι p . Ο δεσμός ανάμεσα σ' ό, τι πρέπει να συμβαίνει αν αληθεύει η p και στις αιτίες της πεποίθησης του X μπορεί να διαφέρει πολύ [από τη μία περίπτωση στην άλλη]. Ωστόσο, υπάρχει πάντα κάποιος δεσμός και ο δεσμός συνδέει τους λόγους της πεποίθησης του X με το θεματικό περιεχόμενο της p .

Πρέπει να είναι δυνατόν να βρισκόμαστε ένα κατάλληλο είδος δεσμού ανά-

μεσα στις συνθήκες αλήθειας της p (που δίνει ένας επαρκής ορισμός της αλήθειας για τη γλώσσα στην οποία διατυπώνεται η p) και τους λόγους που στηρίζουν το να λέμε πως κάποιος γνωρίζει την p , τουλάχιστον για προτάσεις για τις οποίες αποκτάμε γνώση – δηλ. που δεν είναι έμφυτες. Αν αυτό απουσιάζει, δεν έχει βρεθεί κανένας δεσμός ανάμεσα στο να έχουμε αυτούς τους λόγους και το να πιστεύουμε πως μια πρόταση είναι αληθής. Το να έχουμε αυτούς τους λόγους δεν μπορεί να ενταχθεί σε μία εξήγηση του ότι γνωρίζουμε την p . Δεν μπορεί να γίνει η σύνδεση ανάμεσα στην p και στην αιτιολόγηση της πίστης ότι p βάσει αυτών των λόγων. Αλλά αυτή η σύνδεση πρέπει να γίνει για εκείνη τη γνώση που πρέπει να θεωρείται ως κάποιο είδος αιτιολογημένης αληθούς πεποίθησης. (Φυσικά, για να είναι δάσιμο το επιχείρημά μας, δεν είναι ανάγκη όλη η γνώση να είναι αιτιολογημένη αληθούς πεποίθησης.)

Δεν θα προκαλέσει έκπληξη το ότι αυτό ήταν ένα προοίμιο για να επισημάνουμε ότι ο συνδυασμός αυτής της άποψης για τη γνώση με τη «σταθεροτυπική» άποψη της μαθηματικής αλήθειας δεν επιτρέπει να δούμε εύκολα τον τρόπο με τον οποίο είναι δυνατή η μαθηματική γνώση. Αν, λ.χ., οι αριθμοί έχουν το είδος της οντότητας που τους αποδίδεται συνήθως, τότε δεν είναι δυνατόν να εξηγήσουμε το δεσμό [που υπάρχει] ανάμεσα στις συνθήκες αλήθειας των δηλώσεων της αριθμοθεωρίας και των συμβάντων που είναι συναφή με τους ανθρώπους οι οποίοι υποτίθεται ότι έχουν μαθηματική γνώση⁸. Είναι αδύνατον να εξηγήσουμε πώς κάποιος γνωρίζει γνήσιες αριθμοθεωρητικές προτάσεις. Εδώ δεν ωφελεί μία από τις προφανείς απαντήσεις, ότι δηλ. μερικές από αυτές τις προτάσεις αληθεύουν, αν και μόνο αν μπορούν να παραχθούν από ορισμένα αξιώματα μέσω ορισμένων κανόνων. Γιατί ασφαλώς μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ικανοποιούνται αυτές οι συνθήκες. Αλλά εκείνο που απουσιάζει σε μια τέτοια περίπτωση είναι ο δεσμός ανάμεσα στην αλήθεια και στην απόδειξη, όταν ορίσουμε την αλήθεια με τον σταθεροτυπικό τρόπο. Με δυο λόγια, μολονότι το παραγωγίμο από ορισμένα αξιώματα, σύμφωνα με ορισμένους κανόνες, μπορεί να είναι συνθήκη αλήθειας ορισμένων αριθμοθεωρητικών προτάσεων, το ότι αυτή είναι συνθήκη αλήθειας πρέπει να απορρέει και από την εξήγηση της αλήθειας, για να μπορεί η συνθήκη αυτή να δοθηθεί ώστε να συνδέσουμε την αλήθεια και τη γνώση, εφόσον γνωρίζουμε τις μαθηματικές αλήθειες από τις αποδείξεις τους.

Φυσικά, αν δοθεί μία συνολοθεωρητική εξήγηση της αριθμητικής, μπορούμε να παρουσιάσουμε το συντακτικό και τη σημασιολογία της αριθμητικής με τέτοιο τρόπο, ώστε να ικανοποιούνται επιφανειακά οι συνθήκες που θέσαμε. Αλλά η αναδρομή που προκαλεί είναι διαφανής, γιατί πρέπει να τεθούν τα ίδια ερωτήματα για τη θεωρία των συνόλων μέσω της οποίας διατυπώθηκαν οι απαντήσεις.

V. Δύο παραδείγματα

Υπάρχουν πολλές εξηγήσεις της μαθηματικής αλήθειας και της μαθηματικής γνώσης. Υποστήριξα θέσεις που πρέπει να ισχύουν για όλες τους. Ωστόσο, αντί να είμαι διεξοδικός, θα αφιερώσω τις τελευταίες σελίδες στην εξέταση δύο αντιπροσωπευτικών περιπτώσεων: μιας «σταθεροτυπικής» άποψης και μιας «συνδυαστικής» άποψης. Πρώτα η σταθεροτυπική εξήγηση, όπως την εκφράζει ένας από τους πιο απροκάλυπτους και διαυγείς υποστηρικτές της, ο Kurt Gödel.

Ο Gödel έχει απόλυτη συνείδηση του ότι όταν δίνουμε μια ρεαλιστική (δηλ. σταθεροτυπική) εξήγηση της μαθηματικής αλήθειας, η εξήγηση του πώς γνωρίζουμε τα βασικά αξιώματα πρέπει να έχει κατάλληλη σύνδεση με το πώς ερμηνεύουμε τον αναφορικό εξοπλισμό της θεωρίας μας. Γι' αυτό, όταν συζητά το πώς μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα του συνεχούς, εφόσον αποδειχθεί μη αποκρίσιμο βάσει των αξιωμάτων που δεχθήκαμε, συνθέτει την ακόλουθη εικόνα:

... τα αντικείμενα της υπερπεπερασμένης θεωρίας των συνόλων... ασφαλώς δεν ανήκουν στον φυσικό κόσμο, και ακόμη και ο έμμεσος δεσμός τους με τη φυσική εμπειρία είναι πολύ χαλαρός.

Αλλά παρ' όλη την απόστασή τους από την αισθητηριακή εμπειρία, υπάρχει κάτι που μοιάζει με αντίληψη των αντικειμένων της θεωρίας των συνόλων, όπως δείχνει το γεγονός ότι τα αξιώματά μας επιβάλλονται ως αληθή. Δεν βλέπω το λόγο για τον οποίο θα έπρεπε να έχουμε λιγότερη εμπιστοσύνη σε τούτο το είδος της αντίληψης, δηλ. στη μαθηματική εποπτεία, απ' ό,τι στην αισθητηριακή αντίληψη, η οποία μας ωθεί να κατασκευάζουμε φυσικές θεωρίες και να περιμένουμε ότι οι μελλοντικές αισθητηριακές αντιλήψεις μας θα συμφωνούν μ' αυτές και, επιπλέον, να πιστεύουμε ότι ένα ερώτημα που τώρα δεν μπορεί να απαντηθεί έχει νόημα και ότι μπορεί να απαντηθεί στο μέλλον [Gödel, 1964· σ. 194 στον παρόντα τόμο].

Βρίσκω αυτή την εικόνα ενθαρρυντική και ανησυχητική. Με ανησυχεί το ότι, χωρίς μία εξήγηση του πώς τα αξιώματα «μας επιβάλλονται ως αληθή», η αναλογία με την αισθητηριακή αντίληψη και τη φυσική επιστήμη είναι σχεδόν χωρίς περιεχόμενο. Γιατί απουσιάζει ακριβώς αυτό που απαιτεί η δεύτερη αρχή μου: μια εξήγηση του δεσμού ανάμεσα στις γνωστικές λειτουργίες μας και στα αντικείμενα της γνώσης. Στις φυσικές επιστήμες έχουμε τουλάχιστον την αρχή μιας τέτοιας εξήγησης και μάλιστα αιτιακής. Δεχόμαστε ως γνώση μόνο εκείνες τις πεποιθήσεις που μπορούμε να συνδέσουμε κατάλληλα με τις γνωστικές ικανότητές μας. Εντελώς ορθά η αντίληψή μας για τη γνώση προχωρεί παράλληλα με την αντίληψη του εαυ-

τού μας ως γνώση. Ασφαλώς υπάρχει μία επιφανειακή αναλογία. Γιατί, όπως επισημαίνει ο Gödel, «επαληθεύουμε» τα αξιώματα αντλώντας από αυτά με παραγωγική μέθοδο συνέπειες που αφορούν περιοχές στις οποίες φαίνεται να έχουμε μία αμεσότερη «αισθητηριακή αντίληψη» (σαφέστερες εποπτείες). Αλλά ποτέ δεν μας λέει πώς γνωρίζουμε κι αυτές ακόμη τις σαφέστερες προτάσεις. Λόγου χάρη, οι «επαληθεύσιμες» συνέπειες των αξιωμάτων του ανώτερου απείρου είναι (κατά τα άλλα, μη αποκρίσιμες) αριθμοθεωρητικές προτάσεις, «επαληθεύσιμες» υπολογιστικά ως ένα δοσμένο αέρας. Αλλά για να είναι κάπου χρήσιμη η ιστορία αυτή, πρέπει να μας λέει πώς γνωρίζουμε τις δηλώσεις της υπολογιστικής αριθμητικής – *σημαίνουν ό,τι λέει πως σημαίνουν η σταθεροτυπική εξήγηση*. Αλλά αυτό δεν μας το λέει. Έτσι, στην καλύτερη των περιπτώσεων, η αναλογία είναι επιφανειακή.

Αυτά όσον αφορά τις ανησυχητικές πλευρές. Ίσως σπουδαιότερη, και κατά τη γνώμη μου ενθαρρυντική, να είναι η πρόδηλη βασική συμφωνία που παρακινεί τον Gödel να παραλληλίσει τα μαθηματικά με την εμπειρική επιστήμη. Βλέπει, νομίζω, ότι κάτι πρέπει να ειπωθεί, ώστε να γεφυρωθεί το χάσμα που δημιουργήθηκε από τη ρεαλιστική και πλατωνιστική ερμηνεία του των μαθηματικών προτάσεων, ανάμεσα στις οντότητες που αποτελούν το θεματικό περιεχόμενο των μαθηματικών και στον ανθρώπινο γνώστη. Αντί να ματαιοπονεί για να βελτιώσει τη λογική μορφή των μαθηματικών προτάσεων ή τη φύση των αντικειμένων που γνωρίσαμε, δέχεται μία ειδική λειτουργία μέσω της οποίας «αλληλεπιδρούμε» με αυτά τα αντικείμενα. Νομίζω πως συμφωνούμε πάνω στο επιστημολογικό ζήτημα, δηλ. σχετικά με το ποιοι είναι οι δρόμοι μέσα από τους οποίους μπορούμε να γνωρίσουμε τα πράγματα.

Αν η εξήγησή μας για την εμπειρική γνώση είναι αποδεκτή, αυτό πρέπει εν μέρει να οφείλεται στο ότι προσπαθεί να φανερώσει το δεσμό στην περίπτωση της θεωρητικής γνώσης μας, στην οποία δεν είναι σαφές εκ πρώτης όψεως πώς θα συμπληρωθεί η αιτιακή εξήγησή μας. Έτσι, στην περίπτωση των μαθηματικών, η απουσία μιας συνεπούς εξήγησης του πώς συνδέεται η μαθηματική εποπτεία μας με την αλήθεια των μαθηματικών προτάσεων καθιστά αλυσιτελή τη συνολική εξήγηση.

Αν θέλουμε να εισαγάγουμε μία υποθετική ιστορική σημείωση η οποία να έχει κάποια θεμελίωση στα κείμενα, δεν θα ήταν παράλογο να υποθέσουμε ότι ο Πλάτων επικαλέσθηκε την έννοια της *ανάμνησης* εν μέρει τουλάχιστον για να εξηγήσει πώς, δεδομένης της φύσης των ιδεών, όπως τις περιέγραψε, θα μπορούσε κανείς να τις γνωρίσει⁹.

Η «συνδυαστική» άποψη της μαθηματικής αλήθειας έχει επιστημολογικές ρίζες. Ξεκινά από την πρόταση ότι, όποια κι αν είναι τα «αντικείμενα» των μαθηματικών, η γνώση μας προέρχεται από τις αποδείξεις. Οι αποδεί-

ξεις είναι ή μπορεί να είναι (για μερικούς, πρέπει να είναι) γραμμένες ή διατυπωμένες προφορικά: οι μαθηματικοί μπορούν να τις επιθεωρήσουν και να συμφωνήσουν ότι είναι αποδείξεις. Η μαθηματική γνώση αποκτάται και μεταδίδεται κυρίως χάρη σ' αυτές τις αποδείξεις. Με δυο λόγια, αυτή η όψη της μαθηματικής γνώσης – το (ουσιαστικά γλωσσικό) μέσο παραγωγής και μετάδοσής της δίνει την κινητήρια ώθηση στην τάξη των απόψεων που ονομάζω «συνδυαστικές».

Παρατηρώντας το ρόλο των αποδείξεων στην παραγωγή γνώσης αναζητά τα αληθινά θεμέλια στις ίδιες τις αποδείξεις. Η κινητήρια ώθηση προς συνδυαστικές απόψεις ενισχύεται από την παρατήρηση ότι ο πλατωνιστής καλύπτει με πέπλο μυστηρίου το ζήτημα του πώς είναι δυνατή οποιαδήποτε απόκτηση γνώσης. Ας προσθέσουμε αυτή την παρατήρηση στην πίστη ότι τα μαθηματικά είναι δημιουργήματά μας (η μαθηματική ανακάλυψη, σύμφωνα με αυτές τις απόψεις, σπανίως αποτελεί ανακάλυψη γύρω από μια ανεξάρτητη πραγματικότητα), και δεν θα εκπλαγούμε αν κάποιος αρχίσει να αναζητά πράξεις σύλληψης για να εξηγήσει τη γέννηση. Πολλές εξηγήσεις της μαθηματικής αλήθειας ανήκουν σ' αυτή την ομάδα. Ίσως σχεδόν όλες. Μνημόνευσα μερικές καθ' οδόν, και εξέτασα πολύ συνοπτικά την άποψη του Hilbert, που διατυπώνεται στο άρθρο του «Για το άπειρο». Ως τελικό παράδειγμα επιθυμώ να εξετάσω τις συμβατιστικές εξηγήσεις – το πλέγμα των απόψεων, σύμφωνα με τις οποίες οι λογικές και μαθηματικές αλήθειες αληθεύουν (ή μπορούν να γίνουν αληθείς) χάρη σε ρητές συμβάσεις: συνήθως οι συμβάσεις αυτές είναι τα αξιώματα της θεωρίας. Για άλλη μια φορά, με το να συγκεντρώσω έναν αριθμό απόψεων, που οι αποδοί τους ασφαλώς θα ήθελαν να κρατήσουν χωριστές, πιθανόν να τις αδικώ όλες.

Στο κλασικό άρθρο του πάνω στο θέμα¹⁰ – ο Quine διαπραγματεύτηκε καθαρά, πειστικά και οριστικά την άποψη ότι οι αλήθειες της λογικής πρέπει να εξηγηθούν ως προϊόντα συμβάσεων – πολύ καλύτερα απ' ό,τι θα μπορούσα να ελπίζω ότι θα το αντιμετώπιζα εδώ. Επισήμανε ότι, αφού πρέπει να εξηγήσουμε έναν άπειρο αριθμό αληθειών, ο χαρακτηρισμός ως αληθειών των αποφάνσεων που διαθέτουν τα προσόντα πρέπει να είναι χονδρικός και όχι λιανικός. Αλλά ο χονδρικός χαρακτηρισμός μπορεί να γίνει μόνο μέσω γενικών αρχών – και, αν υποθεθεί ότι δεν καταλαβαίνουμε καθόλου λογική, δεν μπορούμε να εξαγάγουμε τις ατομικές περιπτώσεις από τις γενικές αρχές: για ένα τέτοιο έργο χρειαζόμαστε τη λογική.

Μολονότι αυτό είναι εντελώς πειστικό, θα ήθελα να προσθέσω ένα άλλο επιχείρημα – όχι επειδή πιστεύω πως αυτό το κλειστό ζήτημα πρέπει να ανοίξει ξανά, αλλά επειδή το επιχείρημα του Quine περιορίζεται στην περίπτωση της Λογικής και επειδή δεν αναδεικνύει αρκετά έντονα τα κύρια σημεία που επιθυμώ να τονίσω. Πράγματι, ο Quine παραχωρεί στο συμβα-

τιστή ορισμένες αρχές που θα ήθελα να του τις αρνηθώ. Με το να στηρίξει τη θέση του εναντίον του συμβατισμού πάνω στην ανάγκη για χονδρικό χαρακτηρισμό άπειρου αριθμού αληθειών, ο Quine κάνει την ακόλουθη παραχώρηση: αν υπήρχε μόνο πεπερασμένος αριθμός αληθειών που πρέπει να εξηγηθούν, πιθανόν ο συμβατιστής να μπορούσε να πετύχει στο εγχείρημά του. Λέει:

Αν οι αληθοτιμές μπορούσαν να αποδοθούν μία προς μία, κι όχι σε άπειρο αριθμό μεμιάς, η παραπάνω δυσκολία θα εξαφανιζόταν: οι αλήθειες της Λογικής... θα βεβαιώνονταν ξεχωριστά με διάταγμα και το πρόβλημα της συναγωγής τους από γενικότερες συμβάσεις δεν θα παρουσιαζόταν [σ. 353].

Έτσι, αν μπορούσε να βρεθεί ένας τρόπος ώστε οι αποφάνσεις της Λογικής να επιδεικνύουν μόνες τους τις τιμές αλήθειάς τους, θα εξαφανίζονταν οι αντιρροήσεις στη συμβατιστική εξήγηση της αλήθειας – γιατί θα είχαμε καθορισμένες τιμές αλήθειας για όλες τις αποφάνσεις, και περισσότερο δεν μπορεί κανείς να απαιτήσει.

Ωστόσο, αναρωτιέμαι τι θα πετύχαινε ένα τέτοιο ράντισμα με τη λέξη 'αληθής'. Για να προσδιορίσουμε την έννοια της αλήθειας δεν αρκεί να αποδώσουμε τιμές σε καθεμιά από τις αποφάνσεις της γλώσσας (ας υποθέσουμε, σ' αυτό το σημείο, ότι η γλώσσα είναι η θεωρία των συνόλων, σε κάποια πρωτοβάθμια τυποποίηση και ας χαρακτηρίσουμε «αληθείς» εκείνες που περιέχουν ένα ζυγό αριθμό πετάλων¹¹).

Τι θα μετέβαλε μια τέτοια απόδοση του κατηγορήματος «αληθής» σε προσδιορισμό της έννοιας της αλήθειας; Μήπως η χρήση της τρισύλλαβης λέξης; Ο Tarski υποστήριξε ότι η ικανοποίηση της Σύμβασης T είναι αναγκαία και επαρκής συνθήκη για τον ορισμό της αλήθειας σε μία επιμέρους γλώσσα¹². Μία απλή (αναδρομική) κατανομή αληθοτιμών μπορεί να συνταχιστεί με μία θεωρία της αλήθειας που ικανοποιεί τη σύμβαση T. Μπορούμε να επαναπαυθούμε σ' αυτήν με τον όρο ότι είμαστε διατεθειμένοι να κάνουμε λήψη αυτού που νομίζω πως είναι το κύριο ζητούμενο και να αγνοήσουμε την έννοια της μετάφρασης που εμφανίζεται στη διατύπωση (της Σύμβασης) της (T). Αυτό που λείπει, όσο δύσκολο κι αν είναι να δηλωθεί, είναι ο θεωρητικός οπλισμός που χρησιμοποιεί ο Tarski για να δώσει ορισμούς της αλήθειας, δηλαδή η ανάλυση της θεωρίας βάσει των «αναφορικών» εννοιών της ονομασίας, της κατηγορήσεως, της ικανοποίησης και της ποσοποίησης. Ένας ορισμός που δεν ακολουθεί τις συνηθισμένες αναδρομικές ρήτρες για τις συνηθισμένες γραμματικές μορφές μπορεί να μην είναι επαρκής, ακόμη κι αν ικανοποιεί τη Συνθήκη T. Η εξήγηση πρέπει να περνάει από την αναφορά και την ικανοποίηση και, επιπρόσθετα, πρέπει να συμπληρώνεται με μία εξήγηση της ίδιας της αναφοράς. Αλλά η υπο-

στήριξη του τελευταίου είναι εξαιρετικά πολύπλοκο ζήτημα και δεν μπορεί να γίνει εδώ¹³.

Ο Quine του άρθρου «Truth by Convention» [Συμβατική αλήθεια] πίστευε ότι ο καθορισμός των αληθοτιμών όλων των συμφράσεων που περιέχουν τη λέξη αρκεί για να καθορίσει την αναφορά της. Αυτό θα μπορούσε να ισχύει, αν διαθέταμε ήδη την έννοια της αλήθειας και αναζητούσαμε την αναφορά του όρου για τον οποίο ενδιαφερόμαστε, ακολουθώντας τον ορισμό της αλήθειας. Αλλά φαίνεται να υπάρχει κάτι το ολοφάνερα λαθεμένο στην προσπάθεια να προσδιορίσουμε την ίδια την έννοια της αλήθειας με αυτόν τον τρόπο. Κάνοντάς το, πετάμε το ίδιο το δεκανίκι που επιτρέπει στη μέθοδο να λειτουργεί στην περίπτωση άλλων εννοιών. Η αλήθεια και η αναφορά πάνε χέρι χέρι. Η έννοιά μας της αλήθειας, στο μέτρο που έχουμε μία έννοια της αλήθειας, χρειάζεται τη διαμεσολάβηση των εννοιών που ο Tarski χρησιμοποίησε για να την ορίσει για την τάξη των γλωσσών που εξέτασε – η ουσία της συμβολής του Tarski υπερβαίνει κατά πολύ τη Σύμβαση T, αλλά περιλαμβάνει τα σχήματα και για τον πραγματικό ορισμό: δεν θα έπρεπε να μας ικανοποιεί μία ανάλυση της αλήθειας για μια γλώσσα, αν αυτή δεν κινούνταν σύμφωνα με τις συνηθισμένες μεθόδους της κατηγορησις, της ποσοποίησης κτλ.

Αν όλα αυτά ευσταθούν, τότε πρέπει να είναι σαφής ο λόγος για τον οποίο θάσει της εξήγησής μου αστοχούν οι «συνδυαστικές» απόψεις για τη φύση των μαθηματικών. Αποφεύγουν αυτό που κατά τη γνώμη μου αποτελεί αναγκαία πορεία για μία εξήγηση της αλήθειας: μέσω του θεματικού περιεχομένου των προτάσεων, την αλήθεια των οποίων ορίζουμε. Παρακινημένοι από επιστημολογικές σκέψεις, προτείνουν συνθήκες αλήθειας τέτοιες που οι κοινοί θνητοί μπορούν να εξακριβώσουν, αν αυτές ικανοποιούνται ή όχι· αλλά το τίμημα που πληρώνουν συνίσταται στην αδυναμία τους να συνδέσουν αυτές τις λεγόμενες «συνθήκες αλήθειας» με την αλήθεια των προτάσεων των οποίων αποτελούν τις συνθήκες.

Ακόμη κι αν γίνει δεκτό ότι οι αλήθειες της πρωτοβάθμιας λογικής δεν πηγάζουν από συνθήκες, μπορεί να προβληθεί ο ισχυρισμός ότι τα υπόλοιπα μαθηματικά (η συνολοθεωρία για τους λογικιστές· η συνολοθεωρία, η αριθμοθεωρία και άλλα πράγματα για τους μη λογικιστές) αποτελούνται από συμβάσεις διατυπωμένες στην πρωτοβάθμια λογική. Αλλά και αυτή η άποψη υπόκειται στην αντίρρηση ότι δεν είναι ανάγκη μια τέτοια έννοια της σύμβασης να συνεπιφέρει την αλήθεια¹⁴. Πράγματι, είναι σαφές ότι δεν τη συνεπιφέρει. Γιατί, κι αν ακόμη αγνοήσουμε γενικότερες αντιρρήσεις, αφού προσδιοριστεί η λογική, γίνεται δυνατό τούτο: οι συμβάσεις που συνομολογήθηκαν μ' αυτόν τον τρόπο αποδεικνύονται μεταξύ τους αντιφατικές. Επομένως, δεν μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι η καταγραφή των συμβάσεων εξασφαλίζει την αλήθεια. Αλλά, αν δεν εξασφάλιζε την

αλήθεια, τι διακρίνει τις περιπτώσεις στις οποίες προνοεί γι' αυτήν από τις περιπτώσεις στις οποίες δεν προνοεί γι' αυτήν; Η απάντηση δεν μπορεί να είναι: η συνέπεια. Το να την προβάλλουμε ως απάντηση ισοδυναμεί με το να παρερμηνεύουμε τη σημασία του γεγονότος ότι η ασυνέπεια είναι απόδειξη του ότι δεν φτάσαμε στην αλήθεια. Ο βαθύτερος λόγος είναι, άλλη μια φορά, ότι η αξιωματική συνομολόγηση δεν συνδέει τις προτάσεις και το θεματικό περιεχόμενό τους – η συνομολόγηση δεν προνοεί για την αλήθεια. Στην καλύτερη των περιπτώσεων, περιορίζει την τάξη των ορισμών της αλήθειας (ερμηνειών) που συμβιβάζονται με τις διατάξεις που θεσπίζει. Αλλά αυτό δεν αρκεί.

Για να διασαφηνισθεί αυτό το σημείο, ας θεωρήσουμε το απόφθεγμα του Russell, που μνημονεύεται συχνά: «Η μέθοδος που συνίσταται στο να 'συνομολογούμε' αυτό που θέλουμε έχει πολλά πλεονεκτήματα· αυτά είναι τα πλεονεκτήματα της κλοπής απέναντι στην τίμια εργασία» (Russell, 1919, σ. 71)¹⁵. Σύμφωνα με την άποψη που υποστήριξα, αυτό είναι ψευδές. Γιατί με την κλοπή, τουλάχιστον φεύγει κανείς με το κλοπιμαίο, ενώ ο συγκαλυμμένος ορισμός, η συμβατική συνομολόγηση και τα ξαδέλφια τους είναι ανίκανοι να φέρουν την αλήθεια. Η ατέλειά τους είναι όχι μόνο ηθική αλλά και πρακτική.*

* Στη μετάφρασή μου αποδίδω τον όρο *account* με τον όρο *εξήγηση*.

Σημειώσεις

1. Εδώ παραδίδομαι στην πλάσματική παραδοχή ότι διαθέτουμε μια σημασιολογία για «την υπόλοιπη γλώσσα» ή, ακριβέστερα, ότι οι οπαδοί των απόψεων, οι οποίοι παρακινούνται από αυτό το ενδιαφέρον, συχνά νομίζουν πως διαθέτουν μια τέτοια σημασιολογία, τουλάχιστον για σημαντικά από φιλοσοφική άποψη τμήματα της γλώσσας.

2. Στην πραγματικότητα, σε τούτο το άρθρο, δεν λέω τίποτε για το νόημα. Πιστεύω πως η έννοια δίκαια έχει κακή φήμη, χωρίς ωστόσο να την αποπέμω. Οι πρόσφατες εργασίες, κυρίως του Κίρκε, υποστηρίζουν ότι αυτό που θεωρήθηκε για πολύ καιρό ως νόημα [meaning]—δηλαδή το Sense [Sinn] του Frege—έχει λιγότερη σχέση με την αλήθεια απ' ό,τι νόμιζε ο Frege ή οι αμέσως κατοπινοί οπαδοί του. Κατά τεκμήριο φαίνεται πως με την αλήθεια στενότερο δεσμό έχει η αναφορά: γι' αυτόν το λόγο συγκεντρώνω την προσοχή μου στην αναφορά. Αν δεχθούμε ότι η αλλαγή της αναφοράς μπορεί να συμβεί χωρίς να υπάρξει αντίστοιχη αλλαγή στο νόημα, και ότι η αλήθεια είναι ζήτημα αναφοράς, τότε το να μιλάμε για νόημα είναι σε μεγάλο βαθμό άσχετο με το πλέγμα των προβλημάτων που μας απασχολούν σε τούτο το άρθρο. Αυτά τα σχόλια δεν προσφέρονται ως επιχειρήματα, αλλά μόνο ως εξήγηση.

3. Βλ. το άρθρο μου «What Numbers Could Not Be», *Philosophical Review* 74 (1965) 47-73. [Ξανατυπωμένο στον *Philosophy of Mathematics* (ed. P. Benacerraf and H. Putman, 1983, σσ. 272-94).]

4. Φυσικά, αυτό το έργο είναι τεράστιο, αν πρέπει να γίνει σωστά. Ωστόσο, παραμερίζει την εξήγηση του βάρους που επιβάλλεται η σημασιολογία του συστήματος και η κατανόησή της από μας, και συγκεντρώνεται στην ικανότητά μας να προσδιορίζουμε πότε ορισμένα τυπικά αντικείμενα έχουν ορισμένες συντακτικά καθορισμένες ιδιότητες.

5. Καμιά φορά νομίζω πως αυτό είναι ένα από τα πράγματα που επιδιώκει να κάνει ο Hilary Putman στο υποβλητικό άρθρο του «Mathematics without Foundations», *Journal of Philosophy* 64 (1967) 5-22. [Τώρα στη συλλογή *Philosophy of Mathematics* που αναφέραμε στη σημείωση 3, σσ. 295-311.]

6. Αν είναι δυνατόν, θα ήθελα να μην πάρω θέση απέναντι στο πλέγμα των ζητημάτων της φιλοσοφίας του νου [= φιλοσοφικής ψυχολογίας, ΣτΕ.] ή της ψυχολογίας που αφορούν τη φύση των ψυχολογικών καταστάσεων. Για τους σκοπούς μου αρκεί κάθε άποψη σύμφωνα με την οποία η Ερμύνη μπορεί να μάθει ότι η γάτα είναι πάνω στην ψάθα, κοιτάζοντας μία πραγματική γάτα πάνω σε μία πραγματική ψάθα. Αν το να κοιτάζει μια γάτα πάνω σε μια ψάθα κάνει την Ερμύνη να βρίσκει σε μια κατάσταση και αν θέλετε να ονομάσετε αυτή την κατάσταση φυσική ή ψυχολογική ή ακόμη φυσιολογική κατάσταση, δεν θα φέρω αντίρρηση υπό τον όρο αυτή η κατάσταση, αν είναι η γνωστική κατάσταση της, να συνδέεται αιτιακά με κατάλληλο τρόπο προς το ότι η γάτα ήταν πάνω στην ψάθα όταν η Ερμύνη κοίταζε. Αν δεν υπάρχει τέτοια κατάσταση, τόσο το χειρότερο για την άποψή μου.

7. Αναφέρω ελάχιστους: G. H. Harman, *Thought* (Princeton: University Press, 1973). A. I. Goldman, «A Causal Theory of Knowing», *Journal of Philosophy* 64 (1967) 357-72. B. Skyrms, «The Explication of 'X Knows that p'», *Journal of Philosophy* 64 (1967) 373-89.

8. Για έκφραση υγιούς σκεπτικισμού πάνω σ' αυτό και συσχετισμένα σημεία βλ. M. Steiner «Platonism and the Causal Theory of Knowledge», *Journal of Philosophy* 70 (1973), 57-66.

9. «Η ψυχή, λοιπόν, όντας αθάνατη, και έχοντας γεννηθεί ξανά πολλές φορές και έχοντας δει όλα όσα υπάρχουν, σ' αυτόν τον κόσμο ή στον κάτω κόσμο, τα γνωρίζει όλα» (Πλάτωνος *Μένων*, 81).

10. «Truth by Convention», *Philosophical Essays for Alfred Whitehead* (ed. O. H. Lee) 1936. Το άρθρο του Quine αναδημοσιεύτηκε πολλές φορές: η επόμενη παράθεση είναι από τη δημοσίευσή του στη συλλογή των Benacerraf και Putman, 1983: 329-354 [ΣτΜ].

11. Ο συγγραφέας προφανώς εννοεί το σύμβολο \supset της συνεπαγωγής (αρχικά ανεστραμμένο C, από το λατινικό Consequentia), που τώρα τείνει να αντικατασταθεί με το \rightarrow [ΣτΜ].

12. «The Concept of Truth in Formalized Languages» που δημοσιεύτηκε ξανά στο διβλίο *Logic, Semantics, Metamathematics* του Tarski (1956). Η Σύμβαση T διατυπώνεται στις σελίδες 187-88 ως εξής:

ΣΥΜΒΑΣΗ T: Ένας τυπικά ορθός ορισμός του συμβόλου «Tr», διατυπωμένος στη μεταγλώσσα, θα ονομάζεται *επαρκής ορισμός της αλήθειας*, αν έχει τις ακόλουθες συνέπειες:

- (α) όλες οι αποφάνσεις που προκύπτουν από την έκφραση « $x \in Tr$ αν και μόνο αν p », όταν αντικαταστήσουμε το σύμβολο 'x' με ένα δομικό-περιγραφικό όνομα οποιασδήποτε απόφανσης της γλώσσας για την οποία μιλάμε και το σύμβολο 'p' με την έκφραση που αποτελεί τη μετάφραση αυτής της απόφανσης στη μεταγλώσσα·
(β) την απόφαση 'για κάθε x, αν $x \in Tr$, τότε $x \in S'$ (με άλλα λόγια 'Tr \subseteq S').

13. Για μια εξαιρετική παρουσίαση μιας παρόμοιας άποψης, βλ. H. H. Field «Tarski's Theory of Truth», *Journal of Philosophy* 69 (1972) σ. 347 κ.ε.

14. Τα ίδια επιχειρήματα ισχύουν και για την άποψη (που ίσως συμπίπτει με την παραπάνω), σύμφωνα με την οποία τα αξιώματα αποτελούν *συγκαλυμμένους ορισμούς* (implicit definitions) υπαρχουσών εννοιών (εν αντιθέσει με ορισμούς που διατάσσουν το πώς πρέπει να εννοηθούν νέες έννοιες), αν αυτή προταθεί ως εξήγηση του πώς γνωρίζουμε ότι τα αξιώματα αληθεύουν (μάθαμε τη γλώσσα μαθαίνοντας αυτά τα αξιώματα).

15. B. Russell, *Introduction to Mathematical Philosophy* (London: Allen and Unwin, 1919) σ. 71.

