# 5

# ΓΙΑ ΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

## DAVID HILBERT

Ο David Hilbert (1862-943) είναι σημαντική και πολυεδρική φυσιογνωμία των μαθηματικών. Του χρωστάμε τα *Grundlagen der Geometrie* (1899), το δίτομο *Grundlagen der Mathematik* (1934-39) που έγραψε μαζί με τον Paul Bernays, το *Grundzüge der theoretischen Logik* (1928) που έγραψε μαζί με τον Wilhelm Ackermann, άρθρα για τη θεμελίωση της φυσικής, καθώς και άρθρα πάνω σε άλλα θέματα μαθηματικών και λογικής. Στα *Θεμέλια της γεωμετρίας* ο Hilbert εφαρμόζει την *αφηρημένη αξιωματική* μέθοδο: η γεωμετρία παρουσιάζεται ως παραγωγικό σύστημα θεμελιωμένο σε μερικούς αρχικούς όρους και σε μερικές αρχικές προτάσεις (αξιώματα)· όλες οι προτάσεις παράγονται από τα αξιώματα με τη βοήθεια σαφώς καθορισμένων αποδεικτικών μεθόδων. Το σύστημα αληθεύει για κάθε ερμηνεία των αρχικών όρων και σχέσεων που το ικανοποιούν· με άλλα λόγια, το παραγωγικό σύστημα αναπτύσσεται ανεξάρτητα από τις δυνατές ερμηνείες· επομένως, αποκλείεται να παρεισφρήσουν αναπόδεικτες παραδοχές, όπως συμβαίνει στη γεωμετρία του Ευκλείδη (λ.χ. στην πρώτη πρόταση του πρώτου βιβλίου χρησιμοποιείται μια παραδοχή που εισάγεται λαθραία, μέσω του βοηθητικού σχήματος). Το αφηρημένο αξιωματικό σύστημα είναι υποθετικό-παραγωγικό και δεν έχει άμεση εφαρμογή προτού ερμηνευθεί· επομένως, η καθαρή γεωμετρία δεν αφορά τον φυσικό κόσμο και η επιλογή του κατάλληλου γεωμετρικού συστήματος (ευκλείδειου, υπερβολικού ή άλλου) είναι ζήτημα εφαρμογής: εξαρτάται από το αν οι προτάσεις του ερμηνευμένου συστήματος συμβιβάζονται με τις υπόλοιπες αρχές της εμπειρικής Φυσικής. Στη δεύτερη έκδοση των *Θεμελίων της Γεωμετρίας* ο Hilbert αντιμετωπίζει το πρόβλημα της πληρότητας και της συνέπειας του γεωμετρικού συστήματος και το ανάγει στην ύπαρξη μοντέλων από την περιοχή των πραγματικών αριθμών. Είναι όμως το σύστημα των πραγματικών αριθμών πλήρες και μη αντιφατικό; Για να δοθεί απάντηση και, μάλιστα, αποδεκτή και από τους ιντουισιονιστές αλλά χωρίς να θυσιαστούν τα κλασικά μαθηματικά, ο Hilbert πρότεινε τη «θεωρία της απόδειξης» (Beweisstheorie) ή μεταμαθηματικά: οι μαθηματικές αποδείξεις πρέπει να τυποποιηθούν πλήρως και να μελετηθούν με τη βοήθεια της αφηρημένης αξιωματικής μεθόδου – αντικείμενα είναι οι αποδείξεις, δηλ. ορισμένες συγκεκριμένες πράξεις πάνω στους τύπους ενός λογισμού ο οποίος εκφράζει τη μαθηματική θεωρία που μας απασχολεί. Ο Hilbert πίστευε ότι έτσι θα μπορέσουμε να αποδείξουμε τη λογική *συνέπεια* του λογισμού (δηλ. ότι δεν είναι θεώρημά τους η πρόταση $0 = 1$) και να εξετάσουμε την *πληρότητα* και την *αποκρισιμότητά* του. (Πλήρες λέγεται ένα σύστημα αν η προσθήκη στα θεωρήματά του μιας πρότασης *A*, που δεν είναι θεώρημα του συστήματος, το κάνει αντιφατικό· αν έχει οριστεί η έννοια της αλήθειας, πλήρες είναι ένα σύστημα όταν όλες οι αληθείς προτάσεις του είναι θεωρήματά του. Αποκρίσιμο είναι ένα σύστημα όταν υπάρχει μηχανική -λέμε «αποτελεσματική»- μέθοδος που επιτρέπει να αποφασίσουμε αν ένας τύπος είναι θεώρημα ή όχι.) Η απόδειξη της συνέπειας ενός συστήματος έχει ιδιαίτερη αξία, όταν η μέθοδος που χρησιμοποιείται είναι λιγότερο αμφισβητήσιμη απ' ό,τι το ίδιο το σύστημα. Γι' αυτό ο Hilbert πρότεινε την αποκλειστική χρήση *περατοκρατικών μεθόδων* στα μεταμαθηματικά, δηλ. μεθόδων οι οποίες δεν προϋποθέτουν τίποτε περισσότερο από «τις αισθητηριακά αντιληπτές ιδιότητες των συγκεκριμένων συνδυασμών από σημεία»· η έννοια του περατοκρατικού διασαφηνίστηκε από τον Jacques Herbrand βάσει των συνθηκών: πρέπει να ασχολούμαστε με πεπερασμένο αριθμό αντικειμένων και μονοσήμαντα ορισμένων συναρτήσεων· δεν πρέπει να ασχολούμαστε με το σύνολο όλων των αντικειμένων μιας άπειρης ολότητας· δεν πρέπει να βεβαιώνουμε την ύπαρξη ενός αντικειμένου, αν δεν υποδείξουμε τον τρόπο της κατασκευής του· τα γενικά θεωρήματα θεωρούνται σχήματα που προσφέρουν επιμέρους επιχειρήματα, βλ. Brody, 1967: 65, Αναπολιτάνου, 1985: 248 κ.ε., καθώς και Kreisel, 1983: 224 κ.ε.)

Η απόδειξη των θεωρημάτων μη πληρότητας, που ο Gödel δημοσίευσε το 1931, ματαιώνει το φορμαλιστικό πρόγραμμα του Hilbert, με την έννοια ότι η απόδειξη της συνέπειας ενός συστήματος απαιτεί συνήθως τη χρήση μεθόδων που είναι ισχυρότερες από εκείνες του ίδιου του συστήματος. Τροποποιημένο, ώστε να επιτρέπει μη περατοκρατικές μεθόδους, το φορμαλιστικό πρόγραμμα του Hilbert αποδείχθηκε γόνιμο σε αποτελέσματα. (Βλ. το άρθρο του Georg Kreisel που περιλαμβάνει στην παρούσα συλλογή και το άρθρο του 1983 που πρωτοδημοσιεύθηκε το 1958.)

Το άρθρο που δημοσιεύθηκε είναι μία από τις πληρέστερες διατυπώσεις του χιλμπερτιανού προγράμματος.

## *Βιβλιογραφικές αναφορές*


Αναπολιτάνος Δ., *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών*. Αθήνα: Νεφέλη, 1985.

Brody, B., 'Logical Terms, Glossary of' *The Encyclopedia of Philosophy* (ed. P. Edwards). London and New York: Macmillan and The Free Press (1967) vol V, pp. 57-77.

Goedel, K., Ueber formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme I, *Monatshefte für Mathematik und Physik 38* (1931) 173-198. Πολλές μεταφράσεις.

Herbrand Jacques, *Ecrits logiques* (επιμέλεια J. van Heijenoort). Paris: Presses Universitaires de France, 1968.

Kreisel, Georg, 'Hilbert's Programme' *Philosophy of Mathematics-Selected Readings* (ed. P. Benacerraf and H. Putman, London: Cambridge University Press) 1983, pp. 207-238.


Π.Χ.



Με τις οξυδερκείς κριτικές του ο Weierstrass[1] πρόσφερε στην κλασική ανάλυση ένα στερεό θεμέλιο. Με το να διασαφηνίσει πολλές έννοιες, ιδιαίτερα τις έννοιες του ελάχιστου, της συνάρτησης και της παραγώγου, αφαίρεσε τις ατέλειες που ακόμα υπήρχαν στον απειροστικό λογισμό, τον καθάρισε από όλες τις ασαφείς ιδέες σχετικά με το απειροστό και αναμφισβήτητα ξεπέρασε τις δυσκολίες που πήγαζαν από την έννοια του απειροστού. Αν σήμερα στη μαθηματική ανάλυση υπάρχει πλήρης συμφωνία και βεβαιότητα, όταν χρησιμοποιούνται μέθοδοι συμπερασμού που βασίζονται στις έννοιες του μη ρητού αριθμού και της έννοιας του ορίου γενικά, και αν υπάρχει ομοφωνία πάνω σε όλα τα αποτελέσματα που αφορούν τα πιο πολύπλοκα ζητήματα της θεωρίας των διαφορικών και ολοκληρωματικών εξισώσεων, μολονότι χρησιμοποιούνται οι πιο τολμηροί και ποικίλοι συνδυασμοί σύνθεσης, παράθεσης και εγκιβωτισμού ορίων, όλα αυτά ουσιαστικά οφείλονται στην επιστημονική δραστηριότητα του Weierstrass.

Και όμως, μολονότι ο Weierstrass θεμελίωσε τον απειροστικό λογισμό, δεν σταμάτησαν οι συζητήσεις για τη θεμελίωση της ανάλυσης.

Αυτό συμβαίνει επειδή ποτέ δεν αποσαφηνίστηκε εντελώς το νόημα του *απείρου* στα μαθηματικά. Ασφαλώς η ανάλυση του Weierstrass απέβαλε το άπειρα μικρό και το άπειρα μεγάλο, με το να αναγάγει τις προτάσεις που αναφέρονται σ' αυτά σε προτάσεις που μιλούν για σχέσεις πεπερασμένων μεγεθών. Ωστόσο το άπειρο δεν παύει να παρουσιάζεται στην άπειρη αριθμητική ακολουθία που ορίζει τους πραγματικούς αριθμούς και στην έννοια του συστήματος των πραγματικών αριθμών, το οποίο θεωρείται ότι αποτελεί ολότητα πλήρη και κλειστή που δίνεται μεμιάς.

Στη θεμελίωση της ανάλυσης ο Weierstrass όχι μόνο δέχεται ανεπιφύλακτα, αλλά και χρησιμοποιεί επανειλημμένα τις μορφές του λογικού συμπερασμού στις οποίες παρεμβαίνει αυτή η αντίληψη του απείρου, όπως εκείνες που χρησιμοποιούμε όταν, λ.χ., θεωρούμε *όλους* τους πραγματικούς αριμούς που έχουν μία ορισμένη ιδιότητα ή υποστηρίζουμε ότι *υπάρχουν* πραγματικοί αριθμοί που έχουν μία ιδιότητα.

Ώστε το άπειρο κατάφερε, μεταμφιεσμένο, να τρυπώσει ξανά στη θεωρία του Weierstrass και να ξεφύγει τον αυστηρό έλεγχο της κριτικής του.

Χρειάζεται λοιπόν να λυθεί μια για πάντα *το πρόβλημα του απείρου* όπως διατυπώθηκε πιο πάνω [στην προηγούμενη παράγραφο]. Και όπως στις διαδικασίες περάσματος στο όριο, που χαρακτηρίζουν τον απειροστικό λογισμό, το άπειρο, με τη σημασία του άπειρα μικρού και του άπειρα μεγάλου, αποκαλύφθηκε ότι είναι μόνο τρόπος του λέγειν, έτσι ακριβώς πρέπει να αναγνωρίσουμε ότι, όταν στις μεθόδους συμπερασμού συναντάμε το άπειρο με τη σημασία της άπειρης ολότητας, αυτό είναι μονάχα φαινομενικό. Και ακριβώς όπως οι πράξεις με το άπειρα μικρό αντικαταστάθηκαν με πεπερασμένες διαδικασίες που οδηγούν στα ίδια ακριβώς αποτελέσματα και τις ίδιες κομψές τυπικές σχέσεις, έτσι πρέπει γενικά οι μέθοδοι λογικής παραγωγής που βασίζονται στο άπειρο να αντικατασταθούν από πεπερασμένες διαδικασίες που να οδηγούν στα ίδια αποτελέσματα, οι οποίες δηλ. να καθιστούν δυνατές τις ίδιες αλυσίδες αποδείξεων και τη χρήση των ίδιων μεθόδων για την ανεύρεση τύπων και θεωρημάτων.

Σ' αυτό αποβλέπει η θεωρία μου. Σκοπός της είναι να εξασφαλίσει στη μαθηματική μέθοδο την οριστική βεβαιότητα η οποία δεν επετεύχθη ούτε κατά την κριτική περίοδο του απειροστικού λογισμού. Έτσι θα ολοκληρώσει αυτό που ο Weierstrass ήλπιζε να πετύχει με τη θεμελίωση της ανάλυσης και προς το οποίο έκανε ένα αναγκαίο και ουσιαστικό βήμα.

Για να διασαφηνίσουμε όμως την έννοια του απείρου, πρέπει να υιοθετήσουμε μια γενικότερη προοπτική. Ο προσεκτικός αναγνώστης θα βρει ότι τα μαθηματικά γραπτά είναι γεμάτα από ανοησίες και παραλογισμούς που συνήθως πηγάζουν από το άπειρο. Έτσι, λ.χ., μερικοί υποστηρίζουν, εν είδει περιοριστικής συνθήκης, ότι στα αυστηρά μαθηματικά επιτρέπονται μόνο αποδείξεις με έναν *πεπερασμένο* αριθμό συμπερασμών – σαν να είχε ποτέ κανείς καταφέρει να κάνει αποδείξεις με έναν άπειρο αριθμό συμπερασμών!

Ακόμα και παλαιές αντιρρήσεις, που θα πίστευε κανείς πως έχουν εγκαταλειφθεί από καιρό, ξαναπαρουσιάζονται με διαφορετική μορφή. Λόγου χάρη, τον τελευταίο καιρό συναντά κανείς δηλώσεις όπως τούτη: ακόμα κι αν είναι δυνατόν να εισαγάγουμε μία έννοια χωρίς κίνδυνο (δηλ. χωρίς να γεννιούνται αντιφάσεις) και αν, επιπλέον μπορούμε να αποδείξουμε ότι η εισαγωγή της δεν προκαλεί αντιφάσεις, μολοντούτο δεν είναι αιτιολογημένη η εισαγωγή της έννοιας αυτής. Μήπως η αντίρρηση αυτή δεν είναι ακριβώς η ίδια με την παλαιότερη αντίρρηση για τους μιγαδικούς αριθμούς, όταν έλεγαν: «Ασφαλώς η χρήση τους δεν οδηγεί σε αντιφάσεις· ωστόσο η εισαγωγή τους δεν είναι αιτιολογημένη γιατί, στο κάτω κάτω, δεν υπάρχουν φανταστικά μεγέθη»; Αν έχει νόημα να θέσουμε το ερώτημα της αιτιολόγησης ενός μέτρου ανεξάρτητα από την απόδειξη ότι δεν οδηγεί σε αντίφαση, τότε αυτή η αιτιολόγηση δεν μπορεί να σημαίνει παρά μόνο ότι αυτό το μέτρο είναι επιτυχές. Πράγματι η επιτυχία είναι απαραίτητη, γιατί





στα μαθηματικά, όπως και αλλού, αυτή αποτελεί το ανώτατο δικαστήριο μπροστά στο οποίο όλοι υποκλίνονται.

Όπως μερικοί βλέπουν φαντάσματα, έτσι ένας άλλος συγγραφέας φαίνεται πως βλέπει αντιφάσεις ακόμα και εκεί που κανείς δεν βεβαίωσε τίποτε, θέλω να πω στον συγκεκριμένο κόσμο της αισθητηριακής αντίληψης [Sinnenwelt], και θεωρεί ότι η «συνεπής λειτουργία» του αποτελεί μία ειδική παραδοχή. Εγώ, πάντως, πιστεύω ότι μόνο οι δηλώσεις (Auusagen) και οι παραδοχές (Annahmen), στο βαθμό που οδηγούν σε δηλώσεις διαμέσου συμπερασμών, μπορούν να είναι αντιφατικές μεταξύ τους. Η άποψη, σύμφωνα με την οποία τα γεγονότα και τα συμβάντα μπορούν επίσης να είναι αντιφατικά, αποτελεί κατά τη γνώμη μου το τέλειο παράδειγμα του παραλογισμού.

Με τις παρατηρήσεις μου ήθελα μόνο να δείξω ότι η οριστική διασάφηση της *φύσης του απείρου* δεν αφορά μονάχα τη σφαίρα των ειδικών ενδιαφερόντων των επιστημών, αλλά ότι είναι απαραίτητη για *την τιμή* της ίδιας *της ανθρώπινης νόησης* [Verstand].

Ανέκαθεν το άπειρο κινούσε τα ανθρώπινα πάθη περισσότερο από κάθε άλλο ζήτημα. Είναι δύσκολο να βρει κανείς μια *ιδέα* που να έχει ερεθίσει τόσο γόνιμα τη νόηση όσο η ιδέα του απείρου. Εντούτοις καμία άλλη *έννοια* δεν χρειάζεται *διασάφηση* όσο αυτή.

Προτού καταπιαστούμε μ' αυτό το έργο, δηλ. με το να διασαφηνίσουμε τη φύση του απείρου, πρέπει να εξετάσουμε, έστω και πολύ συνοπτικά, ποια είναι η περιεχομενική αναφορά[2] που πραγματικά αποδίδεται σ' αυτή την έννοια. Ας δούμε πρώτα τι μπορεί να μας διδάξει η Φυσική.

Η αρχική, αφελής εντύπωσή μας για τα φυσικά συμβάντα και την ύλη είναι η εντύπωση της σταθερότητας, της συνέχειας. Αν θεωρήσουμε ένα κομμάτι μέταλλο ή έναν ορισμένο υγρό όγκο, έχουμε την εντύπωση ότι αυτά μπορούν να διαιρεθούν επ' άπειρον, ότι τα ελάχιστα μέρη τους παρουσιάζουν τις ίδιες ιδιότητες που παρουσιάζει το όλον. Αλλά εκεί όπου τελειοποιήθηκαν αρκετά οι ερευνητικές μέθοδοι της Φυσικής της ύλης, οι επιστήμονες ανακάλυψαν όρια διαιρετότητας, που δεν οφείλονται στις ατέλειες των πειραμάτων μας, αλλά στην ίδια τη φύση των πραγμάτων. Γι' αυτό και θα μπορούσαμε να πούμε ότι η σύγχρονη επιστήμη τείνει να χειραφετηθεί από το άπειρα μικρό και ότι στη θέση της παλαιάς αρχής «natura non facit saltus» θα μπορούσαμε τώρα να βεβαιώσουμε το αντίθετο, δηλ. ότι «η φύση κάνει άλματα».

Είναι σ' όλους γνωστό ότι η ύλη συντίθεται από μικροσκοπικούς οικοδομικούς πλίνθους που λέγονται «άτομα»· όταν συνδυασθούν και συνδεθούν, αυτά παράγουν όλη την ποικιλία των μακροσκοπικών αντικειμένων.

Αλλά η Φυσική δεν στάθηκε στον ατομισμό της ύλης. Στο τέλος του περασμένου αιώνα εμφανίσθηκε ο ατομισμός του ηλεκτρισμού, κάτι που εκ πρώτης όψεως φαίνεται πολύ παράξενο. Ο ηλεκτρισμός που ώς τότε κατατασσόταν στα ρευστά και αποτελούσε το κατεξοχήν υπόδειγμα του συνεχούς ενεργού παράγοντα, αποκαλύφθηκε ότι συνίσταται από σωμάτια, τα θετικά και τα αρνητικά *ηλεκτρόνια*.

Εκτός από την ύλη και τον ηλεκτρισμό, στη Φυσική υπάρχει ακόμα μία οντότητα για την οποία ισχύει ο νόμος της διατήρησης, η ενέργεια. Αλλά τώρα αποδεικνύεται ότι ούτε και η ενέργεια επιδέχεται μια απλή και άνευ όρων άπειρη διαιρετότητα. Ο Planck ανακάλυψε τα *κβάντα ενεργείας*.

Το τελικό αποτέλεσμα, λοιπόν, είναι ότι σε κανένα τομέα της πραγματικότητας δεν βρίσκουμε ένα ομοιογενές συνεχές που να επιτρέπει το είδος εκείνο της διαιρετότητας η οποία είναι απαραίτητη ώστε να πραγματοποιείται το άπειρα μικρό. Η άπειρη διαιρετότητα ενός συνεχούς είναι μία πράξη που υπάρχει μόνο στη σκέψη. Είναι μόνο μία ιδέα που ανασκευάζεται από τις φυσικές παρατηρήσεις μας και από τα πειράματα της Φυσικής και της Χημείας.

Συναντάμε το ζήτημα του φυσικού απείρου, όταν εξετάζουμε το σύμπαν ως ολότητα. Εδώ πρέπει να ερευνήσουμε την απέραντη έκταση του σύμπαντος, για να προσδιορίσουμε αν σ' αυτό υπάρχει κάτι το άπειρα μεγάλο.

Επί πολύ καιρό επικρατούσε η άποψη ότι ο κόσμος είναι άπειρος· ώς την εποχή του Kant, και ακόμα μετά τον Kant, κανένας δεν αμφέβαλε ότι ο χώρος είναι άπειρος.

Και εδώ, όμως, η σύγχρονη επιστήμη, ειδικά η αστρονομία, θέτει ξανά το ερώτημα και προσπαθεί να δώσει μία απάντηση, όχι με τα ανεπαρκή μέσα της μεταφυσικής θεώρησης, αλλά με λόγους που να στηρίζονται στην εμπειρία και στην εφαρμογή των φυσικών νόμων. Και στην περίπτωση αυτή παρουσιάστηκαν σοβαρές αντιρρήσεις στο άπειρο. Η *ευκλείδεια* γεωμετρία κατ' ανάγκην οδηγεί στο αίτημα, σύμφωνα με το οποίο ο χώρος είναι άπειρος. Η ευκλείδεια γεωμετρία αυτή καθ' εαυτήν είναι μη αντιφατική ως οικοδόμημα και ως εννοιολογικό σύστημα· ωστόσο, όμως, αυτό δεν σημαίνει ότι στην πραγματικότητα ο χώρος είναι ευκλείδειος. Μόνο η παρατήρηση και το πείραμα μπορούν να αποφασίσουν αν ο χώρος είναι ή δεν είναι ευκλείδειος. Η προσπάθεια να αποδειχθεί με καθαρά θεωρησιακά μέσα ότι ο χώρος είναι άπειρος περιέχει χοντρά λάθη. Από το γεγονός ότι πέρα από μία περιοχή του χώρου υπάρχει πάντα μία άλλη περιοχή του, μπορούμε να συμπεράνουμε μόνο ότι ο χώρος είναι απεριόριστος, όχι ότι είναι άπειρος. Το απεριόριστο και το πεπερασμένο δεν είναι ασυμβίβαστα. Με τη λεγόμενη *ελλειπτική* γεωμετρία η μαθηματική έρευνα μας δίνει το φυσικό μοντέλο ενός πεπερασμένου κόσμου. Σήμερα η εγκατάλειψη της ευκλείδειας γεωμετρίας δεν είναι πια απλό αποτέλεσμα μαθηματικής ή φιλοσοφικής θεώρησης· αντίθετα, την εγκαταλείψαμε για λόγους που αρχικά δεν είχαν καμία





σχέση με το ζήτημα του πεπερασμένου του σύμπαντος. Ο Einstein έδειξε ότι πρέπει να εγκαταλείψουμε την ευκλείδεια γεωμετρία. Ξεκινώντας από τη βαρυτική θεωρία του ο Einstein καταπιάνεται με το κοσμολογικό πρόβλημα και δείχνει ότι είναι δυνατός ένας πεπερασμένος κόσμος και ότι, επιπλέον, όλα τα αποτελέσματα της αστρονομίας συμβιβάζονται με την υπόθεση ενός ελλειπτικού σύμπαντος.

Αποδείξαμε ότι η πραγματικότητα είναι πεπερασμένη προς δύο κατευθύνσεις, δηλ. όσον αφορά το άπειρα μικρό και το άπειρα μεγάλο. Ωστόσο μπορεί κάλλιστα να συμβαίνει το άπειρο να έχει μία εντελώς δικαιολογημένη θέση *στη σκέψη μας* και να παίζει το ρόλο μιας απαραίτητης έννοιας. Ας δούμε πώς παρουσιάζονται τα πράγματα στα μαθηματικά. Και πρώτα απ' όλα ας εξετάσουμε το καθαρότερο και απλούστερο προϊόν του ανθρώπινου πνεύματος, τη θεωρία των αριθμών. Από την πλούσια ποικιλία των στοιχειωδών τύπων, ας διαλέξουμε έναν τύπο, λ.χ. τον τύπο

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}\,n(n+1)(2n+1)\,.$$

Αφού μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $n$ με οποιονδήποτε αριθμό, ας πούμε τον *2* ή τον *5*, αυτός ο τύπος περιέχει έναν *άπειρο αριθμό* προτάσεων. Αυτό είναι το ουσιαστικό χαρακτηριστικό που του επιτρέπει να παριστά τη λύση ενός αριθμητικού προβλήματος και να απαιτεί μία αποδεικτική σκέψη, ενώ οι μεμονωμένες αριθμητικές εξισώσεις

$$1^2+2^2=\frac{1}{6}\,.\,2.3.5$$

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=\frac{1}{6}\,.\,5.6.11$$

μπορούν να επαληθευτούν με απλό συλλογισμό και, επομένως, μεμονωμένες δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Συναντάμε μία εντελώς διαφορετική, μοναδική και θεμελιακή αντίληψη της έννοιας του απείρου, στην εξαιρετικά σημαντική και γόνιμη μέθοδο των *ιδεατών στοιχείων*. Η μέθοδος χρησιμοποιείται ακόμα και στη στοιχειώδη γεωμετρία του επιπέδου. Αρχικά, τα σημεία και οι ευθείες του επιπέδου είναι τα μόνα αντικείμενα που υπάρχουν πραγματικά. Αυτά, ανάμεσα στα άλλα αξιώματα, ικανοποιούν και το αξίωμα της σύνδεσης: από δύο σημεία περνά μία και μόνη ευθεία. Από το αξίωμα τούτο απορρέει ότι δύο ευθείες τέμνονται το πολύ σε ένα σημείο. Δεν υπάρχει όμως θεώρημα που να λέει ότι δύο ευθείες γραμμές τέμνονται πάντοτε σε ένα σημείο, γιατί μπορούν κάλλιστα να είναι παράλληλες. Είναι όμως γνωστό ότι με την εισαγωγή ιδεατών στοιχείων, δηλ. σημείων στο άπειρο και ευθειών στο άπειρο, μπορούμε να μετατρέψουμε την πρόταση ότι δύο ευθείες έχουν πάντοτε ένα και μόνο ένα κοινό σημείο σε καθολικά έγκυρη πρόταση.

Τα ιδεατά στοιχεία «στο άπειρο» παρουσιάζουν το πλεονέκτημα ότι καθιστούν το σύστημα των νόμων σύνδεσης όσο γίνεται πιο απλό και ευσύνοπτο. Επιπλέον, η συμμετρία ανάμεσα στην ευθεία και στο σημείο μας δίνει τη γόνιμη αρχή του γεωμετρικού δυϊσμού.

Άλλο παράδειγμα χρήσης ιδεατών στοιχείων αποτελούν τα γνωστά *σύνθετα-φανταστικά* μεγέθη της άλγεβρας· η χρησιμότητά τους έγκειται στο ότι απλουστεύουν τα θεωρήματα που αφορούν την ύπαρξη και τον αριθμό των ριζών μιας εξίσωσης.

Στη γεωμετρία, για να ορίσουμε ένα ιδεατό σημείο χρησιμοποιούμε τις άπειρες ευθείες, δηλ. τις ευθείες που είναι παράλληλες μεταξύ τους. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, στην ανώτερη αριθμητική, για να ορίσουμε έναν *ιδεατό* αριθμό, χρησιμοποιούμε ορισμένα συστήματα με άπειρα μέλη-αριθμούς. Και από όλες τις εφαρμογές της αρχής των ιδεατών στοιχείων ασφαλώς αυτή είναι η πιο μεγαλοφυής. Όταν εφαρμόσουμε συστηματικά τη διαδικασία αυτή σε ένα αλγεβρικό σώμα, ξαναβρίσκουμε σ' αυτό τους απλούς και γνωστούς νόμους της διαιρετότητας, που ισχύουν και για τους κοινούς ακεραίους *1, 2, 3, 4, ...* Στο σημείο αυτό έχουμε κιόλας μπει στην περιοχή της ανώτερης αριθμητικής.

Ερχόμαστε τώρα στην ανάλυση, την πιο καλλιτεχνική και καλοδουλεμένη μαθηματική δομή. Γνωρίζετε πόσο σημαντικός είναι ο ρόλος του απείρου στην ανάλυση. Κατά κάποιο τρόπο, η μαθηματική ανάλυση είναι μία [μουσική] συμφωνία του απείρου.

Η μεγάλη πρόοδος του απειροστικού λογισμού οφείλεται κυρίως στη χρήση μαθηματικών συστημάτων με άπειρο αριθμό στοιχείων. Επειδή, όμως, ήταν αληθοφανής η ταύτιση του απείρου με το «πολύ μεγάλο», σχεδόν αμέσως παρουσιάστηκαν αντιφάσεις, τα λεγόμενα παράδοξα του απειροστικού λογισμού, τα οποία ήσαν εν μέρει γνωστά στους αρχαίους σοφιστές. Η αναγνώριση, όμως, ότι πολλά θεωρήματα [Sätze] που ισχύουν για το πεπερασμένο (λ.χ., ότι το μέρος είναι μικρότερο του όλου, ότι υπάρχει ένα ελάχιστο ή ένα μέγιστο, ότι η σειρά των όρων ενός αθροίσματος ή των παραγόντων ενός γινομένου μπορεί να τροποποιηθεί) δεν μπορούν να επεκταθούν αμέσως και χωρίς περιορισμούς στο άπειρο, ήταν σημαντικό βήμα προόδου. Στην αρχή της διάλεξής μου ανέφερα το γεγονός ότι αυτά τα ζητήματα διασαφηνίστηκαν πλήρως, κυρίως χάρη στην οξύνοια του Weierstrass. Σήμερα η ανάλυση είναι όχι μόνο αλάθητη μέσα στο χώρο της, αλλά έγινε και πρακτικό εργαλείο για τη χρήση του απείρου.

Μόνη της, όμως, η ανάλυση δεν αρκεί ώστε να κατανοήσουμε βαθύτερα τη φύση του απείρου. Την κατανόηση αυτή μας παρέχει ένας κλάδος που πλησιάζει περισσότερο προς ένα γενικό τρόπο φιλοσοφικού σκέπτεσθαι και έμελλε να ρίξει νέο φως πάνω στο πλέγμα των ζητημάτων που σχετίζονται με το άπειρο: πρόκειται για τη θεωρία των συνόλων που δημιούργησε ο





Georg Cantor. Εδώ, όμως, θα μας απασχολήσει μόνο το μοναδικό και πρωτότυπο εκείνο τμήμα της, που αποτελεί τον κεντρικό πυρήνα της, δηλ. η θεωρία των *υπερπεπερασμένων αριθμών*. Κατά τη γνώμη μου αυτή η θεωρία είναι το άνθος της μαθηματικής μεγαλοφυΐας και μία από τις μεγαλύτερες κατακτήσεις της καθαρά νοητικής ανθρώπινης δραστηριότητας. Αλλά περί τίνος πρόκειται;

Αν θέλαμε να χαρακτηρίσουμε συνοπτικά τη νέα αντίληψη του απείρου που εισήγαγε ο Cantor, θα μπορούσαμε να πούμε: στην ανάλυση ασχολούμαστε με το άπειρα μεγάλο και το άπειρα μικρό μόνο ως οριακές έννοιες – ως κάτι που γίνεται, που γεννάται, που σχηματίζεται– δηλ., όπως λέμε, με το *δυνάμει άπειρο*. Αλλά αυτό δεν είναι το αληθινό άπειρο. Συναντάμε το αληθινό άπειρο όταν, λ.χ., θεωρούμε την ολότητα των αριθμών *1, 2, 3, 4, ...* ως μία ολοκληρωμένη οντότητα ή όταν θεωρούμε τα σημεία ενός διαστήματος ως μία δεδομένη και ολοκληρωμένη ολότητα αντικειμένων. Αυτό το είδος του απείρου λέγεται *ενεργεία άπειρο*.

Ο Frege και ο Dedekind, δύο μαθηματικοί που φημίζονται για τις εργασίες τους στη θεμελίωση των μαθηματικών, χρησιμοποίησαν, ο ένας ανεξάρτητα από τον άλλο, το ενεργεία άπειρο για να θεμελιώσουν την αριθμητική, ανεξάρτητα από την εποπτεία [Anchauung] ή την εμπειρία. Η θεμελίωση αυτή βασιζόταν στην καθαρή λογική και δεν χρησιμοποιούσε παρά μόνο την καθαρά λογική παραγωγή. Ο Dedekind μάλιστα έφτασε στο σημείο να μην αντλήσει την έννοια του πεπερασμένου αριθμού από την εποπτεία, αλλά να την παραγάγει λογικά χρησιμοποιώντας την έννοια του άπειρου συνόλου. Αυτός όμως που ανέπτυξε συστηματικά την έννοια του ενεργεία απείρου ήταν ο Cantor. Ας κοιτάξουμε τα δύο παραδείγματα απείρου που αναφέραμε πιο πάνω:

1. *1, 2, 3, 4, ...*
2. Τα σημεία του ευθύγραμμου διαστήματος με άκρα το *0* και το *1* ή, ισοδύναμα, η ολότητα των πραγματικών αριθμών ανάμεσα στο *0* και στο *1*.

Είναι πολύ φυσικό να εξετάσει κανείς αυτά τα παραδείγματα από την άποψη του πληθικού μεγέθους τους. Τότε, όμως, παρατηρούμε εκπληκτικά γεγονότα με τα οποία είναι σήμερα εξοικειωμένοι όλοι οι μαθηματικοί. Διότι, αν θεωρήσουμε το σύνολο όλων των ρητών αριθμών, δηλ. όλων των κλασμάτων $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{3}{7}, \ldots$, αποκλειστικά από την άποψη του πληθικού μεγέθους του, αυτό το σύνολο δεν είναι μεγαλύτερο από το σύνολο των ακέραιων αριθμών. Γι' αυτό λέμε ότι οι ρητοί αριθμοί μπορούν να απαριθμηθούν με τον συνηθισμένο τρόπο ή ότι είναι αριθμήσιμοι. Το ίδιο ισχύει για το σύνολο όλων των ριζών τους, ακόμα και για το σύνολο όλων των αλγεβρικών αριθμών. Το δεύτερο παράδειγμα είναι παρόμοιο: όσο κι αν φαίνεται παράξενο, το σύνολο των σημείων ενός τετραγώνου ή ενός κύβου, δεν υπερβαίνει το σύνολο των σημείων του διαστήματος από το *0* ώς το *1*· το ίδιο ισχύει και για το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων. Την πρώτη φορά που πληροφορείται κανείς αυτά τα αποτελέσματα, θα μπορούσε να σκεφτεί ότι από την άποψη του μεγέθους υπάρχει μόνο ένα άπειρο. Αυτό όμως δεν συμβαίνει: Τα σύνολα στα παραδείγματα (1) και (2) δεν είναι, όπως λέμε, «ισοδύναμα». Πράγματι το σύνολο (2) δεν είναι αριθμήσιμο, γιατί είναι μεγαλύτερο από το σύνολο (1). Σ' αυτό έγκειται η χαρακτηριστική στροφή των ιδεών του Cantor. Τα σημεία του διαστήματος δεν μπορούν να απαριθμηθούν με τον συνηθισμένο τρόπο, δηλ. μετρώντας 1, 2, 3, . . . ! Αλλά αν δεχθούμε το ενεργεία άπειρο, δεν είμαστε υποχρεωμένοι να περιορισθούμε σ' αυτό το είδος μέτρησης ούτε να σταματήσουμε σ' αυτό το σημείο. Όταν μετρήσουμε 1, 2, 3, . . . , μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα αντικείμενα που απαριθμήσαμε αποτελούν ένα άπειρο σύνολο που ολοκληρώθηκε με τη συγκεκριμένη τούτη διάταξη· αν, ακολουθώντας τον Cantor, συμβολίσουμε τον τύπο αυτής της τάξης με το $\omega$, η αρίθμηση συνεχίζεται με φυσικό τρόπο με το $\omega + 1, \omega + 2, \ldots$ έως το $\omega + \omega$ ή $\omega.2$· κατόπιν με το $\omega.2 + 1, \omega.2 + 2, \omega.2 + 3, \ldots, \omega.2 + \omega = \omega.3$ και, ακόμα, με το $\omega.2, \omega.3, \omega.4, \ldots, \omega.\omega(=\omega^2), \omega^2 + 1, \ldots$ Τελικά έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

$$\begin{array}{l}
1, 2, 3, \ldots \\
\omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots \\
\omega.2, (\omega.2) + 1, (\omega.2) + 2, \ldots \\
\omega.3, (\omega.3) + 1, (\omega.3) + 2, \ldots \\
\vdots \\
\omega^2, \omega^2 + 1, \ldots \\
\omega^2 + \omega, \omega^2 + \omega.2, \omega^2 + \omega.3, \ldots \\
\omega^2.2, (\omega^2.2) + 1, \ldots \\
(\omega^2.2) + \omega, (\omega^2.2) + (\omega.2), \ldots \\
\omega^3, \ldots \\
\omega^4, \ldots \\
\vdots \\
\omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots
\end{array}$$

Αυτοί είναι οι πρώτοι υπερπεπερασμένοι αριθμοί του Cantor ή, όπως τους ονομάζει ο ίδιος, οι αριθμοί της δεύτερης αριθμητικής κλάσης. Σ' αυτούς φτάνουμε με μία απλή υπεραρίθμηση [Hinüberzählen] συνεχίζοντας πέρα από το κοινό αριθμήσιμο άπειρο, δηλ. με μία εντελώς φυσική και μονοσήμαντα καθορισμένη, συστηματική εξακολούθηση της συνηθισμένης





απαρίθμησης, όπως γίνεται με τους αριθμούς του πεπερασμένου. Όπως πρωτύτερα μετρούσαμε μόνο το πρώτο, το δεύτερο, το τρίτο, . . . στοιχείο ενός συνόλου, τώρα μετράμε και το $\omega$-στό, το $(\omega + 1)$-στό, το $(\omega + 2)$-στό αντικείμενο.

Δεδομένων αυτών των εξελίξεων, είναι φυσικό να διερωτηθεί κανείς αμέσως, αν χρησιμοποιώντας αυτούς τους υπερπεπερασμένους αριθμούς, μπορούμε πραγματικά να αριθμήσουμε τα σύνολα εκείνα που δεν μπορούν να απαριθμηθούν με την κοινή σημασία του όρου.

Βάσει αυτών των εννοιών ο Cantor ανέπτυξε τη θεωρία των υπερπεπερασμένων αριθμών με πολύ ικανοποιητικό τρόπο και επινόησε γι' αυτούς έναν πλήρη λογισμό. Έτσι, χάρη στην ηράκλεια συνεργασία του Frege, του Dedekind και του Cantor, το άπειρο ανέβηκε στο θρόνο και απόλαυσε την περίοδο του μεγάλου θριάμβου του. Αποτολμώντας να πετάξει, το άπειρο είχε φτάσει στην ιλιγγιώδη κορυφή της επιτυχίας.

Η αντίδραση δεν άργησε να φανεί. Πήρε δραματική μορφή και παρουσιάστηκε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, όπως και η αντίδραση στην ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού. Στη χαρά τους για τα νέα και σημαντικά αποτελέσματα, οι μαθηματικοί δεν φρόντισαν να ελέγξουν την εγκυρότητα των τρόπων συμπερασμού που χρησιμοποιούσαν. Πράγματι, ξεπρόβαλαν βαθμιαία αντιφάσεις που οφείλονταν στη χρήση συνηθισμένων τρόπων εισαγωγής εννοιών και μεθόδων συμπερασμού. Οι αντιφάσεις αυτές, τα λεγόμενα παράδοξα της θεωρίας των συνόλων, αν και αρχικά ήταν σποραδικές, δεν άργησαν να γίνουν οξύτερες και σοβαρότερες. Ιδιαίτερα μία αντίφαση της οποίας η ανακάλυψη οφείλεται στον Zermelo και στον Russell, είχε εντελώς καταστροφική επίδραση, όταν έγινε γνωστή στον μαθηματικό κόσμο. Μπροστά σ' αυτά τα παράδοξα, ο Dedekind και ο Frege εγκατέλειψαν τις απόψεις τους και τραβήχτηκαν από τον αγώνα: ο Dedekind δίστασε πολύ προτού επιτρέψει τη δημοσίευση μιας νέας έκδοσης της πραγματείας του *Was sind und was sollen die Zahlen*, που είχε αφήσει εποχή και ο Frege, σ' έναν επίλογο, αναγκάστηκε να ομολογήσει ότι η κατεύθυνση του βιβλίου του *Grundgesetze der Arithmetik* ήταν λαθεμένη. Η ίδια η θεωρία του Cantor έγινε στόχος εξαιρετικά σκληρών επιθέσεων από όλες τις πλευρές. Η αντίδραση αυτή ήταν τόσο βίαιη, που απειλήθηκαν οι κοινότερες και γονιμότερες έννοιες και οι απλούστερες και σημαντικότερες μέθοδοι συμπερασμού των μαθηματικών και η χρήση τους κόντεψε να κηρυχθεί παράνομη. Φυσικά, η παλαιά τάξη είχε υπερασπιστές, αλλά η τακτική τους ήταν πολύ άτολμη και ποτέ τους δεν ενώθηκαν σε κοινό μέτωπο στα ζωτικά σημεία. Προτάθηκε πληθώρα θεραπειών για τα παράδοξα, αλλά οι μέθοδοι για τη διασάφησή τους ήταν μεταξύ τους ασυμβίβαστες.

Ομολογουμένως η τωρινή κατάσταση ως προς τα παράδοξα είναι αφόρητη. Σκεφτείτε μόνο ότι στα μαθηματικά, το πρότυπο της βεβαιότητας και της αλήθειας, οι ορισμοί και οι μέθοδοι παραγωγής που όλοι μαθαίνουν, διδάσκουν και χρησιμοποιούν, οδηγούν σε παραλογισμούς! Και πού θα βρει κανείς βεβαιότητα και αλήθεια, αν ακόμη και η μαθηματική σκέψη είναι ατελής;

Υπάρχει όμως ένας εντελώς ικανοποιητικός τρόπος για να αποφευχθούν τα παράδοξα, χωρίς να προδοθεί η επιστήμη μας. Οι σκέψεις που μας οδηγούν στην ανακάλυψη αυτού του τρόπου και η επιθυμία που μας δείχνει το δρόμο που πρέπει να ακολουθήσουμε είναι οι εξής:

1. Όταν υπάρχει και η παραμικρή ελπίδα διάσωσης, θα εξετάσουμε προσεκτικά όλες τις δημιουργίες εννοιών και τις γόνιμες μεθόδους συμπερασμού και θα τις φροντίσουμε, θα τις ενισχύσουμε και θα τις καταστήσουμε εύχρηστες. Κανείς δεν θα μπορέσει να μας διώξει από τον παράδεισο που δημιούργησε για μας ο Cantor.

2. Πρέπει να επεκταθεί σε όλα τα Μαθηματικά η ασφάλεια των μεθόδων συμπερασμού που χρησιμοποιεί η στοιχειώδης θεωρία των αριθμών· κανείς δεν αμφισβητεί την αξιοπιστία της και οι αντιφάσεις και τα παράδοξα οφείλονται μόνο στην αμέλειά μας.

Είναι φανερό ότι δεν είναι δυνατόν να πετύχουμε αυτούς τους στόχους παρά μόνο μετά από την πλήρη διασάφηση της *φύσης του απείρου*.

Προηγουμένως είδαμε ότι το άπειρο δεν βρίσκεται πουθενά στην πραγματικότητα, όποια εμπειρία, παρατήρηση ή επιστήμη κι αν επικαλεσθούμε. Μπορεί η σκέψη πάνω στα πράγματα να είναι τόσο διαφορετική από τα πράγματα; Μπορούν οι διαδικασίες της σκέψης να διαφέρουν τόσο πολύ από τις πραγματικές διαδικασίες των πραγμάτων; Με δύο λόγια, μπορεί η σκέψη να είναι τόσο απομακρυσμένη από την πραγματικότητα; Μήπως δεν είναι ξεκάθαρο ότι, όταν πιστεύαμε πως κατά κάποιο τρόπο συναντήσαμε την πραγματικότητα του απείρου, αφεθήκαμε σ' αυτή την πεποίθηση, επειδή συχνά συναντάμε στην πραγματικότητα διαστάσεις που είναι εξαιρετικά μεγάλες ή μικρές; Μας εξαπατά ποτέ και μας εγκαταλείπει ο περιεκτικός[3] λογικός συμπερασμός, όταν τον εφαρμόζουμε σε αληθινά αντικείμενα ή συμβάντα; Όχι! Ο περιεκτικός λογικός συμπερασμός είναι αναντικατάστατος. Μας εξαπάτησε μόνο όσες φορές δεχθήκαμε αυθαίρετους και αφηρημένους ορισμούς εννοιών, ιδιαίτερα εκείνων στις οποίες υπάγεται ένας άπειρος αριθμός αντικειμένων. Σ' αυτές τις περιπτώσεις τον χρησιμοποιούμε αθέμιτα, δηλ. δεν προσέχουμε αρκετά τις αναγκαίες προϋποθέσεις για την έγκυρη εφαρμογή του. Και με το να αναγνωρίσουμε ότι υπάρχουν τέτοιες προϋποθέσεις που πρέπει να τις σεβαστούμε, συμφωνούμε με τους φιλοσόφους και ιδιαίτερα με τον Kant. Ο Kant δίδασκε –και τούτο είναι αναπόσπαστο μέρος της θεωρίας του– ότι τα μαθηματικά διαθέτουν μία ύλη που είναι ασφαλής ανεξάρτητα από κάθε λογική. Επομένως, τα μαθηματικά δεν μπορούν να θεμελιωθούν μόνο στη Λογική. Γι' αυτό οι





προσπάθειες του Frege και του Dedekind ήταν καταδικασμένες σε αποτυχία. Προϋπόθεση για να χρησιμοποιήσουμε τον λογικό συμπερασμό και να εκτελέσουμε λογικές πράξεις είναι να έχει ήδη δοθεί κάτι σαν παράσταση (Vorstellung): δηλ. συγκεκριμένα εξω-λογικά αντικείμενα δοσμένα στην εποπτεία ως άμεσες εμπειρίες πριν από κάθε σκέψη. Για να είναι ασφαλής ο λογικός συμπερασμός, πρέπει τα αντικείμενα αυτά να μπορούν να εποπτευθούν από κάθε τους πλευρά, και το γεγονός ότι παρουσιάζονται, ότι διαφέρουν μεταξύ τους, ότι το ένα ακολουθεί το άλλο, ή ότι είναι συνδυασμένα μεταξύ τους, πρέπει να δίδεται άμεσα στην εποπτεία μαζί με τα αντικείμενα, ως κάτι που δεν επιδέχεται παραπέρα αναγωγή σε κάτι άλλο ή δεν χρειάζεται αναγωγή. Αυτή είναι η βασική φιλοσοφική θέση που θεωρώ αναγκαία όχι μόνο για τα μαθηματικά αλλά, γενικότερα, για κάθε επιστημονική σκέψη, κατανόηση και επικοινωνία. Και, ειδικά στα μαθηματικά, αντικείμενο της μελέτης μας είναι τα ίδια τα συγκεκριμένα σημεία των οποίων η μορφή είναι, βάσει της θέσης που υιοθετήσαμε, άμεσα σαφής και αναγνωρίσιμη.

Ας στρέψουμε την προσοχή μας στη φύση και τις μεθόδους της περατοκρατικής[4] θεωρίας των αριθμών. Αυτή η θεωρία μπορεί ασφαλώς να αναπτυχθεί μέσω αριθμητικών κατασκευών που στηρίζονται αποκλειστικά σε περιεχομενικές εποπτικές θεωρήσεις. Αλλά με κανένα τρόπο οι μαθηματικές εξισώσεις δεν εξαντλούν τη μαθηματική επιστήμη ούτε αυτή μπορεί να αναχθεί σ' αυτές μονάχα. Θα μπορούσε, όμως, κανείς να ισχυρισθεί ότι τα μαθηματικά είναι ένας μηχανισμός που πρέπει, όταν εφαρμόζεται σε ακέραιους αριθμούς, να δίνει πάντα ορθές αριθμητικές εξισώσεις. Τότε, όμως, θα έπρεπε να μελετήσουμε αρκετά διεξοδικά τη δομή αυτού του μηχανισμού, ώστε να βεβαιωθούμε ότι οδηγεί πάντοτε σε ορθές αριμητικές εξισώσεις. Και το εργαλείο που διαθέτουμε για να κάνουμε αυτή την έρευνα είναι το ίδιο εργαλείο που χρησιμοποιούμε για την παραγωγή των αριθμητικών εξισώσεων όταν κατασκευάζουμε τη θεωρία των αριθμών, δηλ. το ενδιαφέρον για το συγκεκριμένο υλικό περιεχόμενο, τον περατοκρατικό τρόπο σκέψης. Και πράγματι μπορούμε να ανταποκριθούμε σ' αυτό το επιστημονικό αίτημα· δηλ., είναι δυνατόν να έχουμε με τρόπο καθαρά εποπτικό και περατοκρατικό (ακριβώς όπως βρίσκουμε τις αλήθειες της θεωρίας των αριθμών) τις συλλήψεις [Einsichten] που εξασφαλίζουν την αξιοπιστία του μαθηματικού μηχανισμού. Ας εξετάσουμε τη θεωρία των αριθμών από πιο κοντά.

Στη θεωρία των αριθμών έχουμε τα αριθμητικά σημεία:

1, 11, 111, 11111,

όπου κάθε αριθμητικό σημείο μπορεί να αναγνωρισθεί εποπτικά εξαιτίας του γεγονότος ότι το σημείο 1 ακολουθείται πάντα από ένα άλλο 1. Αυτά τα αριθμητικά σημεία που αποτελούν το αντικείμενο της μελέτης μας, μόνα τους δεν σημαίνουν τίποτα. Ωστόσο στη στοιχειώδη θεωρία των αριθμών χρησιμοποιούμε, εκτός από αυτά τα σημεία, και άλλα που σημαίνουν κάτι και εξυπηρετούν την επικοινωνία. Λόγου χάρη, το σημείο[5] 2 χρησιμοποιείται ως σύντμηση του αριθμητικού σημείου 11 και το σημείο 3 ως σύντμηση του αριθμητικού σημείου 111. Επιπλέον χρησιμοποιούμε τα σημεία +, =, > και άλλα, για να μεταδώσουμε βεβαιώσεις. Έτσι χρησιμοποιούμε την 2 + 3 = 3 + 2 για να μεταδώσουμε το γεγονός ότι τα 2 + 3 και 3 + 2, όταν ληφθούν υπόψη οι συντμήσεις, αποτελούν το ίδιο αριθμητικό σημείο, δηλ. το 11111. Ομοίως, χρησιμοποιούμε το 3>2 για να μεταδώσουμε το γεγονός ότι το μήκος του σημείου 3 (δηλ. του 111) είναι μεγαλύτερο του μήκους του σημείου 2 (δηλ. του 11) ή, με άλλα λόγια, ότι το τελευταίο σημείο είναι γνήσιο τμήμα του πρώτου.

Για να επικοινωνήσουμε χρησιμοποιούμε και τα γράμματα $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ως αριθμητικά σημεία. Επομένως, το $\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$ μεταδίδει την πληροφορία ότι το αριθμητικό σημείο $\mathfrak{b}$ έχει μεγαλύτερο μήκος από ό,τι το σημείο $\mathfrak{a}$. Ομοίως, από την παρούσα σκοπιά, το $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$ μεταδίδει μόνο το γεγονός ότι το αριμητικό σημείο $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ είναι το ίδιο με το $\mathfrak{b} + \mathfrak{a}$. Εδώ, μπορούμε επίσης να αποδείξουμε την περιεχομενική ορθότητα αυτής της πληροφορίας με τη βοήθεια του περιεκτικού συμπερασμού. Και, μπορούμε, με αυτό το εποπτικό, περιεχομενικό είδος πραγμάτευσης να προχωρήσουμε και να φτάσουμε πολύ μακριά.

Θα ήθελα τώρα να σας δώσω ένα πρώτο παράδειγμα του τρόπου με τον οποίο μπορούμε να υπερβούμε τα όρια αυτής της εποπτικής μεθόδου. Από τους πρώτους αριθμούς ο μέγιστος που γνωρίζουμε σήμερα έχει 39 ψηφία και είναι ο

$$\mathfrak{p} = 170\,141\,183\,460\,469\,231\,731\,687\,303\,715\,884\,105\,727.$$

Με τη μέθοδο του Ευκλείδη, και στο πλαίσιο της στάσης που υιοθετήσαμε, μπορούμε να αποδείξουμε το θεώρημα ότι ανάμεσα στον $\mathfrak{p} + 1$ και στον $\mathfrak{p}! + 1$ υπάρχει τουλάχιστον ένας πρώτος αριθμός. Επιπλέον, η ίδια η διατύπωση του θεωρήματος εναρμονίζεται τέλεια με την περατοκρατική προσπέλαση, γιατί εδώ η έκφραση «υπάρχει» χρησιμεύει μόνο για την επιβράχυνση της πρότασης:

> Είναι βέβαιο ότι ο $\mathfrak{p} + 1$ ή ο $\mathfrak{p} + 2$ ή ο $\mathfrak{p} + 3$ . . . ή ο $\mathfrak{p}! + 1$ είναι πρώτος αριθμός.

Επιπλέον, αφού είναι φανερό ότι η πρόταση αυτή ισοδυναμεί με την:

> Υπάρχει ένας πρώτος αριθμός που είναι (1) $>\mathfrak{p}$ και (2) ταυτόχρονα $\leqslant \mathfrak{p}! + 1$,





φτάνουμε στη διατύπωση ενός θεωρήματος που εκφράζει μόνο ένα μέρος του περιεχομένου της βεβαίωσης του Ευκλείδη, δηλ. υπάρχει ένας πρώτος αριθμός $> \mathfrak{p}$. Ως προς το περιεχόμενο, η βεβαίωση αυτή είναι πολύ ασθενέστερη, αφού εκφράζει μόνο ένα μέρος της πρότασης του Ευκλείδη· ωστόσο, όσο κι αν φαίνεται επικίνδυνο το πέρασμα σ' αυτήν, αν απομονώσουμε από τα συμφραζόμενά της τη μερική πρόταση και τη διατυπώσουμε ως ανεξάρτητη βεβαίωση, το πέρασμα αυτό συνεπάγεται ένα άλμα στο υπερπεπερασμένο.

Πώς είναι δυνατόν; Έχουμε μια υπαρκτική πρόταση με το «υπάρχει». Και στο θεώρημα του Ευκλείδη είχαμε μια τέτοια πρόταση, αλλά σ' αυτό, όπως είπα νωρίτερα, το «υπάρχει» είναι σύντμηση της:

> «ο $\mathfrak{p} + 1$ ή ο $\mathfrak{p} + 2$ ή ο $\mathfrak{p} + 3$. . . είναι πρώτος αριθμός»,

ακριβώς όπως συμβαίνει όταν, αντί να λέω: «Τούτο το κομμάτι κιμωλίας είναι κόκκινο ή εκείνο το κομμάτι κιμωλίας είναι κόκκινο», λέω για συντομία: «Ανάμεσα σε τούτα τα κομμάτια κιμωλίας υπάρχει ένα κόκκινο κομμάτι». Η βεβαίωση ότι, σε μία πεπερασμένη ολότητα «υπάρχει» ένα αντικείμενο που έχει μία ορισμένη ιδιότητα, εναρμονίζεται απόλυτα με την περατοκρατική στάση μας. Από την άλλη μεριά, η έκφραση:

> ο $\mathfrak{p} + 1$ ή ο $\mathfrak{p} + 2$ ή ο $\mathfrak{p} + 3$ ή . . . (επ' άπειρον) είναι πρώτος αριθμός,

είναι, σαν να λέγαμε, ένα άπειρο λογικό γινόμενο[6], και μια τέτοια μετάβαση στο άπειρο δεν επιτρέπεται χωρίς ειδική διερεύνηση και, ενδεχομένως, χωρίς εισαγωγή ορισμένων προφυλακτικών μέτρων. Συμβαίνει ακριβώς ό,τι και στην ανάλυση, προκειμένου για τη μετάβαση από ένα πεπερασμένο γινόμενο σ' ένα άπειρο γινόμενο· στη γενική περίπτωση αυτή η επέκταση δεν έχει νόημα.

Γενικά, από την περατοκρατική σκοπιά, μία υπαρκτική πρόταση της μορφής «υπάρχει ένας αριθμός που έχει την άλφα ή τη βήτα ιδιότητα» έχει νόημα μονάχα ως *μερική πρόταση* [Partialaussage], δηλ. ως μέρος μιας πρότασης που είναι καθορισμένη με μεγαλύτερη ακρίβεια, αλλά της οποίας το ακριβές περιεχόμενο δεν χρησιμοποιείται ουσιαστικά σε πολλές εφαρμογές.

Συναντάμε το υπερπεπερασμένο όταν από μία υπαρκτική πρόταση αντλήσουμε μία μερική πρόταση που δεν μπορεί να θεωρηθεί ως πεπερασμένη[7] διάζευξη. Ομοίως, αν αρνηθούμε μία καθολική βεβαίωση, δηλ. μία βεβαίωση που αναφέρεται σε αυθαίρετα αριθμητικά σημεία, έχουμε μία υπερπεπερασμένη βεβαίωση. Ας πάρουμε, λ.χ., την πρόταση ότι αν το $\mathfrak{a}$ είναι ένα αριθμητικό σημείο, πρέπει πάντοτε να ισχύει

$$\mathfrak{a} + 1 = 1 + \mathfrak{a}.$$

Από την περατοκρατική σκοπιά η πρόταση αυτή *δεν μπορεί να γίνει αντικείμενο άρνησης*. Αυτό θα γίνει σαφέστερο, αν παρατηρήσουμε ότι [από την άποψή μας] η πρόταση δεν μπορεί να ερμηνευθεί ως άπειρος συνδυασμός αριθμητικών εξισώσεων διαμέσου του «και», αλλά μόνο ως υποθετική κρίση που βεβαιώνει κάτι, όταν δοθεί ένα αριθμητικό σημείο.

Ειδική συνέπεια αυτού είναι ότι, σύμφωνα με το πνεύμα της περατοκρατικής άποψης, δεν μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι μία εξίσωση, όπως αυτή που μόλις δώσαμε, στην οποία παρουσιάζεται ένα αυθαίρετο αριθμητικό σημείο, ή ισχύει για κάθε αριθμητικό σημείο ή ότι το αντίθετό της μπορεί να αποδειχθεί με ένα αντιπαράδειγμα. Ένα επιχείρημα όπως αυτό, όντας εφαρμογή της αρχής του αποκλειόμενου τρίτου, βασίζεται στην προϋπόθεση ότι η βεβαίωση της [καθολικής] εγκυρότητας της εξίσωσης αυτής μπορεί να γίνει αντικείμενο άρνησης.

Πάντως, παρατηρούμε τα ακόλουθα: αν περιοριστούμε –όπως και πρέπει– στο πεδίο των περατοκρατικών προτάσεων, οι λογικές σχέσεις δεν είναι καθόλου ευσύνοπτες και αυτή η έλλειψη του ευσύνοπτου γίνεται αφόρητη, όταν τα «αν» και «για κάθε» παρουσιάζονται συνδυασμένα ή με προτάσεις που η μια τους είναι τοποθετημένη μέσα στην άλλη. Πάντως δεν ισχύουν οι νόμοι της λογικής που οι άνθρωποι τους χρησιμοποιούν από τότε που άρχισαν να σκέφτονται, οι νόμοι που δίδαξε ο Αριστοτέλης. Φυσικά θα μπορούσαμε να βρούμε νόμους που να ισχύουν για το πεδίο των περατοκρατικών προτάσεων, αλλά αυτό δεν θα μας ήταν και πολύ χρήσιμο, γιατί δεν θέλουμε να παραιτηθούμε από τη χρήση των απλών νόμων της αριστοτελικής λογικής. Και κανένας, ακόμα κι αν μιλάει τη γλώσσα των αγγέλων, δεν μπορεί να εμποδίσει τους ανθρώπους να αρνούνται γενικές βεβαιώσεις, να διατυπώνουν μερικές κρίσεις και να χρησιμοποιούν την αρχή του αποκλειομένου τρίτου. Τι πρέπει να κάνουμε λοιπόν;

Μην ξεχνάμε ότι *είμαστε μαθηματικοί* και ότι, ως μαθηματικοί, συχνά βρεθήκαμε σε δύσκολη θέση από την οποία μας έβγαλε η μέθοδος των ιδεατών στοιχείων, η μεγαλοφυής αυτή δημιουργία που μας επέτρεψε να βρούμε μια διέξοδο. Στην αρχή της διάλεξής μου παρουσίασα μερικά λαμπρά παραδείγματα της μεθόδου των ιδεατών στοιχείων. Για να κρατήσουμε τους τυπικά απλούς κανόνες της κοινής αριστοτελικής λογικής πρέπει *στις περατοκρατικές προτάσεις να προσθέσουμε τις ιδεατές προτάσεις*, ακριβώς όπως εισήχθη ο $i = \sqrt{-1}$ για να διατηρήσουν την απλή μορφή τους οι νόμοι της άλγεβρας, λ.χ. αυτοί που αφορούν την ύπαρξη και τον αριθμό των ριζών μιας εξίσωσης ή, ακόμα, όπως εισήχθησαν ιδεατοί παράγοντες για να μπορούν να διατηρηθούν οι απλοί νόμοι της διαιρετότητας και για τους αλγεβρικούς αριθμούς: λ.χ., εισάγουμε έναν ιδεατό κοινό διαιρέτη των αριθμών 2 και $1 + \sqrt{-5}$, αν και αυτός δεν υπάρχει πραγματικά. Και είναι περίεργο το ότι οι μέθοδοι συμπερασμού που ο Kronecker πο-





λέμησε με τόσο πάθος είναι το ακριβές σύστοιχο εκείνου που ο ίδιος ο Kronecker θαύμαζε με τόσο ενθουσιασμό στο έργο του Kummer πάνω στη θεωρία των αριθμών, θεωρία που την επαινούσε ως το ύψιστο μαθηματικό επίτευγμα.

Αλλά πώς φτάνουμε στις *ιδεατές προτάσεις*; Είναι αξιοσημείωτο και ασφαλώς ευνοϊκό το γεγονός ότι, για να μπούμε στο δρόμο που οδηγεί σ' αυτές, αρκεί να εξακολουθήσουμε να αναπτύσσουμε με φυσικό και συνεπή τρόπο την υπάρχουσα θεμελιωτική θεωρία των μαθηματικών. Πραγματικά, πρέπει να πεισθούμε ότι ακόμα και τα στοιχειώδη μαθηματικά υπερβαίνουν την εποπτική θεωρία των αριθμών. Γιατί η μέθοδος του αλγεβρικού υπολογισμού με γράμματα δεν περιέχεται στην περιεχομενική εποπτική θεωρία των αριθμών, όπως την αντιλαμβανόμασταν μέχρι σήμερα. Σ' αυτή τη θεωρία, οι τύποι χρησιμοποιούνταν αποκλειστικά για λόγους επικοινωνίας· τα γράμματα σήμαιναν αριθμητικά στοιχεία και η εξίσωση μετέδιδε το γεγονός ότι συνέπιπταν δύο αριθμητικά σημεία [δηλ. σύμβολα]. Αντίθετα, στην άλγεβρα θεωρούμε τις εκφράσεις που περιέχουν γράμματα ως ανεξάρτητες δομές αυτές καθ' εαυτές οι οποίες εξυπηρετούν την τυποποίηση των περιεχομενικών προτάσεων της αριθμοθεωρίας. Στη θέση των προτάσεων που αφορούν αριθμητικά σημεία, τώρα έχουμε τύπους που είναι συγκεκριμένα αντικείμενα εποπτικής εξέτασης, και στη θέση της αριθμοθεωρητικής περιεχομενικής απόδειξης μπαίνει τώρα η παραγωγή ενός τύπου από τον άλλο σύμφωνα με καθορισμένους κανόνες.

Γι' αυτό, όπως είδαμε, στην άλγεβρα έχουμε μία αύξηση των περατοκρατικών αντικειμένων. Ώς εδώ, αυτά τα αντικείμενα ήταν μόνο αριθμητικά σημεία, όπως τα 1, 11, . . . 11111· μόνο αυτά αποτελούσαν αντικείμενα της περιεχομενικής μελέτης μας. Αλλά και στην άλγεβρα η μαθηματική πρακτική ήδη πάει παραπέρα. Πράγματι, ακόμα και όταν μία πρόταση είναι έγκυρη από την περατοκρατική σκοπιά μας, στο βαθμό που συνδέεται με κάποια ένδειξη για την περιεχομενική ερμηνεία της, όπως, λ.χ., η πρόταση ότι πάντοτε

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}\,,$$

όπου τα $\mathfrak{a}$ και $\mathfrak{b}$ σημαίνουν καθορισμένα αριθμητικά σημεία, προτιμάμε να μη χρησιμοποιήσουμε τούτη τη μορφή για επικοινωνία, αλλά την αντικαθιστούμε με τον τύπο

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha\,.$$

Αυτός ο τύπος με κανέναν τρόπο δεν αποτελεί άμεση μετάδοση κάποιου περιεχομένου, αλλά είναι μία ορισμένη τυπική δομή της οποίας η σχέση με τις αρχικές περατοκρατικές προτάσεις

$2 + 3 = 3 + 2$,
$5 + 7 = 7 + 5$,

συνίσταται στο ότι, όταν αντικαταστήσουμε τα $a$ και $b$ του τύπου τα με αριθμητικά σημεία 2, 3, 5, 7, δηλ. όταν χρησιμοποιήσουμε μία αποδεικτική διαδικασία (έστω κι αν αυτή είναι εξαιρετικά απλή), ποριζόμαστε τις επιμέρους περατοκρατικές προτάσεις. Έτσι καταλήγουμε στην αντίληψη ότι τα $a$, $b$, $=$, $+$, καθώς και ολόκληρος ο τύπος

$$a + b = b + a,$$

από μόνα τους δεν σημαίνουν τίποτε, ακριβώς όπως τα αριθμητικά σημεία δεν σημαίνουν τίποτε αυτά καθ' εαυτά. Αλλά από τον τύπο μπορούν να παραχθούν άλλοι στους οποίους αποδίδουμε νόημα θεωρώντας ότι αυτοί ανακοινώνουν περατοκρατικές προτάσεις. Όταν γενικεύσουμε αυτή την αντίληψη, τα μαθηματικά γίνονται απογραφή τύπων που αυτοί καθ' εαυτούς δεν σημαίνουν τίποτα και αποτελούν τις *ιδεατές δομές [Gebilde] της θεωρίας μας*.

Τώρα, ποιος ήταν ο σκοπός μας; Στα μαθηματικά βρήκαμε, από τη μία μεριά, περατοκρατικές προτάσεις που περιέχουν μόνο αριθμητικά σημεία, όπως οι

$$3 > 2, 2 + 3 = 3 + 2, 2 = 3, 1 \neq 1,$$

οι οποίες, από την περατοκρατική σκοπιά, μπορούν να αποτελέσουν αντικείμενο άμεσης εποπτείας και είναι κατανοητές χωρίς προσφυγή σε κάτι άλλο. Αυτές επιδέχονται άρνηση και το αποτέλεσμα θα είναι αληθές ή ψευδές· σ' αυτές μπορούμε να εφαρμόσουμε την αριστοτελική λογική ελεύθερα και χωρίς ενδοιασμούς· γι' αυτές ισχύει ο νόμος της μη αντίφασης, δηλαδή είναι αδύνατον μία πρόταση και η άρνησή της να είναι ταυτόχρονα αληθείς. Ισχύει η «αρχή του αποκλειόμενου τρίτου»: ή αληθεύει μία πρόταση ή αληθεύει η άρνησή της. Το να πούμε ότι μία πρόταση είναι ψευδής ισοδυναμεί με το να πούμε ότι η άρνησή της είναι αληθής. Από την άλλη μεριά, εκτός από αυτές τις στοιχειώδεις προτάσεις που δεν παρουσιάζουν κανένα πρόβλημα, συναντήσαμε περατοκρατικές προτάσεις που έχουν κάτι το προβληματικό, λ.χ. αυτές που δεν είναι δυνατόν να κατακερματισθούν [σε μερικές προτάσεις].

Τώρα, τέλος, έχουμε εισαγάγει τις ιδεατές προτάσεις για να μπορούν να ισχύουν ξανά όλοι γενικά οι νόμοι της λογικής. Αλλά επειδή οι ιδεατές προτάσεις, δηλ. οι τύποι, δεν έχουν κανένα νόημα αφ' εαυτών εφόσον δεν εκφράζουν περατοκρατικές βεβαιώσεις, εδώ οι λογικές πράξεις δεν έχουν εφαρμογή με περιεχομενικό τρόπο, όπως συμβαίνει όταν εφαρμόζονται στις περατοκρατικές προτάσεις. Είναι ανάγκη λοιπόν να τυποποιήσουμε τις λογικές πράξεις και τις ίδιες τις μαθηματικές αποδείξεις· τούτο απαιτεί





τη μεταγραφή των λογικών σχέσεων σε τύπους· γι' αυτό στα μαθηματικά σημεία πρέπει να προστεθούν και λογικά σημεία, όπως τα:

| &, | $\vee$, | $\rightarrow$, | — |
|---|---|---|---|
| και | ή | συνεπάγεται | όχι |

και, εκτός από τις μαθηματικές μεταβλητές $a$, $b$, $c$, . . . να χρησιμοποιήσουμε και λογικές μεταβλητές, δηλ. προτασιακές μεταβλητές $A$, $B$, $C$, ...

Πώς μπορεί να πραγματοποιηθεί αυτό; Εδώ έχουμε την τύχη να μας βοηθάει η ίδια προδιατεταγμένη αρμονία που παρατηρήσαμε τόσο συχνά στην ιστορία της επιστήμης, η αρμονία που παραστάθηκε του Einstein όταν για τη θεωρία της βαρύτητας βρήκε ήδη τέλεια ανεπτυγμένο τον γενικό λογισμό των αναλλοιώτων· ανακαλύπτουμε ότι έχει ήδη γίνει αρκετή προκαταρκτική δουλειά: βρίσκουμε έτοιμο το *λογισμό της λογικής*. Αναμφίβολα, αρχικά ο λογικός λογισμός δημιουργήθηκε σε ένα εντελώς διαφορετικό πλαίσιο· αρχικά τα σημεία του εισήχθησαν για να εξυπηρετήσουν την επικοινωνία. Ωστόσο είμαστε συνεπείς [με την περατοκρατική σκοπιά μας], αν τώρα από τα λογικά σημεία αφαιρέσουμε κάθε νόημα, ακριβώς όπως κάναμε με τα μαθηματικά σημεία, και δηλώσουμε ότι οι τύποι του λογικού λογισμού είναι ιδεατά στοιχεία τα οποία αυτά καθ' εαυτά δεν σημαίνουν τίποτε. Στον λογικό λογισμό βρίσκουμε μία γλώσσα σημείων, που επιτρέπει να παραστήσουμε τις μαθηματικές προτάσεις με τύπους και να εκφράσουμε τις λογικές παραγωγές με τη βοήθεια τυπικών διεργασιών. Με τρόπο που να αντιστοιχεί ακριβώς στο πέρασμα από την περιεχομενική αριθμοθεωρία στην τυπική άλγεβρα, θεωρούμε τα σημεία και τα σύμβολα των πράξεων του λογικού λογισμού ως αποχωρισμένα από το περιεχομενικό τους νόημα. Έτσι στη θέση της περιεχομενικής μαθηματικής γνώσης που μεταδίδεται με τη βοήθεια της κοινής γλώσσας, τελικά έχουμε έναν κατάλογο τύπων που σχηματίζονται από μαθηματικά και λογικά σημεία, και ο ένας τύπος γεννιέται από τον άλλο, σύμφωνα με καθορισμένους κανόνες. Μερικοί από τους τύπους αυτούς αντιστοιχούν στα μαθηματικά αξιώματα, ενώ στην περιεχομενική παραγωγή αντιστοιχούν οι κανόνες, σύμφωνα με τους οποίους ο ένας τύπος γεννιέται από τον άλλο. Επομένως, η περιεχομενική παραγωγή αντικαθίσταται από το χειρισμό των σημείων σύμφωνα με κανόνες· μ' αυτόν τον τρόπο ολοκληρώνεται το πέρασμα από την αφελή στην τυπική πραγμάτευση αφ' ενός των αξιωμάτων (τα οποία αρχικά θεωρούνταν αφελώς ως θεμελιακές αλήθειες, αλλά στη μοντέρνα αξιωματική θεωρούνται ήδη από καιρό ότι απλώς διασυνδέουν έννοιες), αφ' ετέρου του λογικού λογισμού (που αρχικά θεωρήθηκε μόνο ως μία άλλη γλώσσα).

Τώρα θα εξηγήσω με λίγα λόγια πώς τυποποιείται *μία αξιωματική απόδειξη*. Όπως είπα, ονομάζουμε αξιώματα ορισμένους τύπους που χρησιμεύουν ως υλικό για τη δόμηση του τυπικού οικοδομήματος των μαθηματικών. Η μαθηματική απόδειξη είναι μία διάταξη που, ως διάταξη, πρέπει να μπορεί να προσφέρεται στην εποπτεία μας και συνίσταται σε συμπερασμούς σύμφωνα με το σχήμα:

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{S}\\ \mathfrak{S}\rightarrow\mathfrak{T}\end{array}}{\mathfrak{T}}$$

όπου κάθε προκείμενη, δηλ. οι τύποι $\mathfrak{S}$ και $\mathfrak{S}\rightarrow\mathfrak{T}$ της διάταξης, ή είναι αξίωμα ή είναι το αποτέλεσμα μιας αντικατάστασης μέσα σε ένα αξίωμα ή συμπίπτει με τον τελευταίο τύπο ενός προγενέστερου συμπερασμού ή προκύπτει από αυτόν με αντικατάσταση. Λέμε ότι ένας τύπος είναι αποδείξιμος, αν είναι ο τελευταίος τύπος μιας απόδειξης.

Το πρόγραμμά μας υποδεικνύει την επιλογή των αξιωμάτων για τη θεωρία της απόδειξης. Αν και η επιλογή των αξιωμάτων είναι ώς ένα βαθμό αυθαίρετη, ωστόσο μπορούν να ταξινομηθούν σε ομάδες που διαφέρουν ποιοτικά, ακριβώς όπως στη γεωμετρία. Αναφέρουμε μερικά παραδείγματα[8]:

I. Αξιώματα της συνεπαγωγής:

(i) $A\rightarrow(B\rightarrow A)$
(εισαγωγή μιας παραδοχής)

(ii) $(B\rightarrow C)\rightarrow\{(A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)\}$
(απάλειψη μιας πρότασης)

II. Αξιώματα της άρνησης:

(i) $\{A\rightarrow(B\&\bar{B})\}\rightarrow\bar{A}$
(αρχή της μη αντίφασης)

(ii) $\bar{\bar{A}}\rightarrow A$
(αρχή της διπλής άρνησης).

Τα αξιώματα των ομάδων I και II δεν είναι παρά τα αξιώματα του προτασιακού λογισμού.

III. Υπερπεπερασμένα αξιώματα:

(i) $(\alpha)A(\alpha)\rightarrow A(b)$
(συμπερασμός του επιμέρους από το καθόλου· αξίωμα του Αριστοτέλη)

(ii) $\overline{(\alpha)A(\alpha)}\rightarrow(E\alpha)\bar{A}(\alpha)$
(αν ένα κατηγόρημα δεν ισχύει για όλα τα άτομα, τότε υπάρχει ένα αντιπαράδειγμα)·





(iii) $(\overline{Ea})A(a)\rightarrow(\alpha)\bar{A}(\alpha)$
(αν δεν υπάρχει κανένα άτομο για το οποίο να ισχύει μία πρόταση, τότε η πρόταση είναι ψευδής για κάθε $\alpha$).

Σ' αυτό το σημείο συναντάμε ένα αξιοσημείωτο γεγονός: όλα αυτά τα υπερπεπερασμένα αξιώματα μπορούν να παραχθούν από ένα μοναδικό αξίωμα που περιέχει τον πυρήνα του πιο πολυσυζητημένου αξιώματος της μαθηματικής γραμματείας, δηλ. το λεγόμενο αξίωμα της επιλογής:

(i') $A(\alpha)\rightarrow A(\varepsilon A)$

όπου το $\varepsilon$ συμβολίζει τη συνάρτηση της υπερπεπερασμένης λογικής επιλογής[9].

Επιπλέον υπάρχουν ειδικά μαθηματικά αξιώματα:

IV. Αξιώματα της ισότητας:

(i) $\alpha=\alpha$

(ii) $a=b\rightarrow\{A(a)\rightarrow A(b)\}$,

και τέλος:

V. Αξιώματα των αριθμών:

(i) $a+1\neq 0$

και

(ii) το αξίωμα της μαθηματικής επαγωγής
$[\{A(0)\&(x)(Ax)\rightarrow A(x'))\}\rightarrow A(\alpha)]$.

Μ' αυτόν τον τρόπο μπορούμε να αναπτύξουμε τη θεωρία της απόδειξης και να οικοδομήσουμε το σύστημα των αποδείξιμων τύπων, δηλ. τη μαθηματική επιστήμη.

Ωστόσο, στη χαρά μας για το γεγονός ότι, γενικά, έχουμε πετύχει και, ειδικά, ότι βρήκαμε ήδη έτοιμο ένα απαραίτητο εργαλείο, τον λογικό λογισμό, δεν πρέπει να ξεχνάμε το ουσιαστικό ζητούμενο της μεθόδου μας. Γιατί υπάρχει μία συνθήκη, μοναδική αλλά απόλυτα αναγκαία, στην οποία υπόκειται η χρήση της μεθόδου των ιδεατών στοιχείων: *η απόδειξη της εσωτερικής συνέπειας*· διότι επέκταση με την προσθήκη ιδεατών στοιχείων είναι νόμιμη μόνο αν δεν γεννά αντιφάσεις στο παλαιό και στενότερο πεδίο, δηλ. αν οι σχέσεις που προκύπτουν για τα παλαιά αντικείμενα, όταν απομακρύνουμε τις ιδεατές δομές, παραμένουν έγκυρες στο παλαιό πεδίο.

Ωστόσο, στην παρούσα περίπτωση είναι εύκολο να λύσουμε το πρόβλημα της εσωτερικής συνέπειας. Αυτό ανάγεται, όπως μπορεί κανείς να διαπιστώσει αμέσως, στο να δείξουμε ότι, ξεκινώντας από τα αξιώματα και εφαρμόζοντας τους ισχύοντες κανόνες, δεν μπορούμε ως τελικό τύπο μιας απόδειξης να έχουμε τον «$1 \neq 1$», ή με άλλα λόγια ότι ο «$1 \neq 1$» δεν είναι αποδείξιμος τύπος. Αυτό το έργο ουσιαστικά ανήκει στην περιοχή της εποπτικής επεξεργασίας, το ίδιο ακριβώς όπως στην περιεχομενική θεωρία των αριθμών πρέπει, λ.χ., να αποδείξουμε ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός, δηλ. ότι είναι αδύνατον να βρούμε δύο αριθμητικά σημεία $a$ και $b$ που να ικανοποιούν τη σχέση $a^2 = 2b^2$· με άλλα λόγια, δεν είναι δυνατόν να παρουσιάσουμε δύο αριθμητικά σημεία που να έχουν μία ορισμένη ιδιότητα. Αντιστοίχως, πρέπει να δείξουμε ότι είναι αδύνατον να γίνει ένα ορισμένο είδος απόδειξης. Αλλά μία τυποποιημένη απόδειξη είναι ένα συγκεκριμένο και εποπτεύσιμο αντικείμενο, όπως το αριθμητικό σημείο. Και μπορούμε να την περιγράψουμε πλήρως. Το ότι ο τελικός τύπος έχει την απαιτούμενη δομή, είναι δηλαδή ο «$1 \neq 1$», είναι επίσης μία ιδιότητα της απόδειξης και μπορεί να εξακριβωθεί με συγκεκριμένο τρόπο. Το ότι η απόδειξη μπορεί πραγματικά να δοθεί [ότι ο «$1 \neq 1$» δεν είναι ο τελικός τύπος] αιτιολογεί την εισαγωγή των ιδεατών προτάσεων.

Συγχρόνως δοκιμάζουμε μία ευχάριστη έκπληξη, γιατί ανακαλύπτουμε ότι λύθηκε ένα πρόβλημα που από καιρό βασανίζει τους μαθηματικούς: το πρόβλημα του να αποδείξουμε *την εσωτερική συνέπεια των αξιωμάτων της αριθμητικής*. Γιατί όταν χρησιμοποιούμε την αξιωματική μέθοδο, παρουσιάζεται το πρόβλημα της απόδειξης της συνέπειας. Στο κάτω κάτω, όταν επιλέγουμε, ερμηνεύουμε και χρησιμοποιούμε τα αξιώματα και τους κανόνες, δεν μπορούμε να βασιζόμαστε αποκλειστικά στην καλή πίστη ή την απλή εμπιστοσύνη. Στην περίπτωση της γεωμετρίας ή των φυσικών θεωριών, η απόδειξη της συνέπειας γίνεται με αναγωγή στην εσωτερική συνέπεια των αξιωμάτων της αριθμητικής. Είναι φανερό ότι δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την ίδια μέθοδο και στην περίπτωση της αριθμητικής. Η θεωρία των αποδείξεων που προτείνουμε επιτρέπει να κάνουμε το τελευταίο και σημαντικό τούτο βήμα χάρη στη μέθοδο των ιδεατών στοιχείων· γι' αυτό και αποτελεί τον θολίτη λίθο στο οικοδόμημα της αξιωματικής θεωρίας. Και αυτό που βιώσαμε δύο φορές, την πρώτη με τα παράδοξα του απειροστικού λογισμού και τη δεύτερη με τις αντινομίες της θεωρίας των συνόλων, δεν μπορεί να μας συμβεί και τρίτη φορά ούτε και ποτέ ξανά.

Η θεωρία της απόδειξης, που εδώ την παρουσιάσαμε σε γενικές γραμμές, όχι μόνο μπορεί να διασφαλίσει τα θεμέλια των μαθηματικών, αλλά, όπως πιστεύω, ανοίγει ένα δρόμο που, αν τον ακολουθήσουμε, θα μας επιτρέψει να αντιμετωπίσουμε γενικά προβλήματα που έχουν θεμελιακό χαρακτήρα και ανήκουν στο πεδίο των μαθηματικών, προβλήματα που προηγουμένως δεν ήταν δυνατόν ούτε καν να τα πλησιάσουμε.

Τα μαθηματικά έγιναν κατά κάποιο τρόπο ένα δικαστήριο διαιτησίας, ένα ανώτατο δικαστήριο που θα αποφασίζει για ζητήματα αρχών – και με





τόσο συγκεκριμένη βάση, ώστε να είναι δυνατή η γενική συμφωνία και να μπορούν να ελεγχθούν όλες οι βεβαιώσεις.

Ακόμα και οι βεβαιώσεις της πρόσφατης σχολής που ονομάζεται «ιντουισιονιστική», αν και όχι πολύ φιλόδοξες, πρέπει, κατά τη γνώμη μου, να εφοδιαστούν με ένα πιστοποιητικό εγκυρότητας, που μόνο αυτό το δικαστήριο μπορεί να εκδώσει.

Ως παραδείγματα του τρόπου με τον οποίο μπορούμε να πραγματευθούμε θεμελιακά ζητήματα, θα ήθελα να διαλέξω τη θέση ότι κάθε μαθηματικό πρόβλημα επιδέχεται λύση. Όλοι μας το πιστεύουμε αυτό. Στο κάτω κάτω ένα από τα βασικά κίνητρα που μας ωθούν να αντιμετωπίσουμε ένα μαθηματικό πρόβλημα είναι ότι πάντοτε μέσα μας ακούμε τη φωνή: να το πρόβλημα, βρες τη λύση· μπορείς να τη βρεις με την καθαρή σκέψη γιατί στα μαθηματικά δεν υπάρχει ignorabimus [θα αγνοούμε]. Βέβαια η θεωρία της απόδειξης που προτείνω δεν μπορεί να δώσει μία γενική μέθοδο για τη λύση οποιουδήποτε μαθηματικού προβλήματος· εξάλλου δεν υπάρχει τέτοια μέθοδος. Ωστόσο, η θεωρία μας είναι αρμόδια να αποδείξει πως η παραδοχή ότι κάθε μαθηματικό πρόβλημα επιδέχεται λύση είναι μη αντιφατική*.

* Παραλείπουμε το τελευταίο μέρος του άρθρου, όπου ο Hilbert σκιαγραφεί μία μέθοδο για τη λύση του προβλήματος του συνεχούς (σσ. 180-190). Η μέθοδος τούτη έχει ίσως κάποιες αναλογίες με την απόδειξη του Gödel που αναφέρεται στο συμβιβαστό της υπόθεσης του συνεχούς και περιέχεται στο Gödel (1940). Σχετικά βλ. το άρθρο του Gödel που δημοσιεύεται σε τούτη τη συλλογή (Κεφ. 7) και τις παρατηρήσεις του (επιστολή με ημερομηνία 8 Ιουλίου 1965 που περιέχεται στη συλλογή *From Frege to Gödel*, ed. von Heijenoort, ό.π., σ. 369). Σ' αυτήν ο Gödel γράφει: «Υπάρχει μία μακρινή αναλογία ανάμεσα στο Λήμμα I του Hilbert και στο θεώρημά μου 12.2 για $a = 0$. Ωστόσο υπάρχει η μεγάλη διαφορά ότι ο Hilbert θεωρεί μονάχα αυστηρά κατασκευαστικούς ορισμούς και, ακόμα, υπερπεπερασμένες επαναλήψεις των διεργασιών ορισμού, που περιορίζονται στους κατασκευαστικούς διατακτικούς αριθμούς, ενώ εγώ δέχομαι όχι μόνο ποσοδείκτες στους ορισμούς, αλλά και επαναλήψεις των πράξεων ορισμού, που φτάνουν σε *οποιονδήποτε* διατακτικό αριθμό, ανεξάρτητα από τη δυνατότητα ή τον τρόπο ορισμού του» [Σ.τ.Ε.].

## *Σημειώσεις*

1. Η διάλεξη 'Ueber das Unendliche' του Hilbert διαβάστηκε στις 4 Ιουνίου 1925 σε μία συγκέντρωση που οργάνωσε η Μαθηματική Εταιρεία της Βεστφαλίας για να τιμήσει τη μνήμη του Weierstrass. Δημοσιεύτηκε στο περιοδικό *Mathematische Annalen* 95 (1925) 161-190 και, μεταφρασμένο, δημοσιεύτηκε σε διάφορες συλλογές όπως των Benacerraf και Putman (1964, 1983), Cellucci (1967), van Heijenoort (1967) [ΣτΕ].

2. Έτσι μεταφράζω την έκφραση 'inhaltliche Bedeutung'. Η διάκριση ανάμεσα στο *περιεχόμενο* (Inhalt) ή *ύλη* και στη *μορφή* μιας πρότασης είναι παραδοσιακή. Προσθέτοντας τον όρο *αναφορά* ο Hilbert επεξηγεί τον πρώτο όρο της διάκρισης. Παρακάτω μιλάει για inhaltliche logische Schliessen – και εννοεί τη λογική παραγωγή με έννοιες των οποίων το περιεχόμενο είναι προσιτό στην αισθητηριακή αντίληψη [ΣτΕ].

3. Inhaltliche logische Schliessen. Βλ. και σημ. 2 [ΣτΕ].

4. Με τον όρο *περατοκρατικός* αποδίδω τους ξένους όρους *finitary, finitiste, finitistisches* που υποδηλώνουν ότι έχουμε να κάνουμε με μεθόδους, έννοιες και διαδικασίες που περιορίζονται στη σφαίρα του πεπερασμένου [ΣτΕ].

5. Ακολουθώντας τον van Heijenoort, εδώ και στην επόμενη παράγραφο, αποδώσαμε το *Zeichen* με «σημείο» και το *Zahlreichen* με «αριθμητικό σημείο», μολονότι καμιά φορά ο Hilbert χρησιμοποιεί το πρώτο ως συνεπτυγμένη μορφή του δευτέρου. Επιπλέον, όταν ο Hilbert χρησιμοποιεί τον όρο *Abkürzung* –σύμπτυξη– εννοεί άλλοτε «σύμπτυξη του συμβόλου» και άλλοτε «όνομα του συμβόλου». Βλ. van Heijenoort, σ. 377, σημ. 2 [ΣτΕ].

6. Μάλλον: άθροισμα ή διάζευξη. Αλλού (*Grundlagen der Geometrie*) ο Hilbert αντί για logisches Produkt γράφει «Oder - Verknüpfung». Βλ. van Heijenoort σ. 378, σημ. 3 [ΣτΜ].

7. Το γερμανικό κείμενο λέει: 'Wir stossen also hier aus das Transfinite durch Zerlegung einer existentialen Aussage, die sich nicht als eine Oder - Verknüpfung deuten lässt'. Στο *Grundlagen der Geometrie* η παραλλαγή είναι: 'Wir stossen also hier auf das Transfinite durch Zerlegung einer existentialen Aussage in Teile, deren keiner sich als eine Oder - Verknüpfung deuten lässt'. Η απόδοση είναι δυσχερής. Οι Putman και Benacerraf στα αγγλικά, και ο Cellucci στα ιταλικά, αποδίδουν ως «πεπερασμένη διάζευξη». Ο Heijenoort, αντίθετα, διατηρεί «διάζευξη» χωρίς επίθετο [ΣτΕ].

8. Πλήρη κατάλογο θα βρει ο αναγνώστης στο άρθρο 'Die Grundlagen der Mathematik' που δημοσιεύτηκε στα *Abhandlungen aus den mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, αρ. 6 (1928) σσ. 65-85. Αγγλ. μετάφραση στη συλλογή του van Heijenoort ως *The Foundations of Mathematics*, σσ. 464-479. [ΣτΕ].

9. Στο άρθρο που αναφέρεται στη σημείωση 8, ο Hilbert δίνει την εξής παραγωγή. Την παραθέτουμε για να διασαφηνιστεί η σημασία του «ε». Γράφει:

«[αξίωμα] 13. $A(a) \rightarrow A(\varepsilon(A))$.

Εδώ το $\varepsilon(A)$ συμβολίζει ένα αντικείμενο για το οποίο ασφαλώς ισχύει η πρόταση $A(a)$, αν ισχύει για κάποιο αντικείμενο· ας ονομάσουμε την ε 'λογική συνάρτηση Ε': [Αλλού προσθέτει: Η αντικατάσταση οποιουδήποτε δοσμένου τύπου $A(a)$ γίνεται δυνατή αν, αντί για $\varepsilon(A)$, γράψουμε πιο ακριβολογικά: $\varepsilon_x A(x)$, $\varepsilon_y A(y)$, . . . ]. Για να διασαφηνίσουμε το ρόλο της λογικής συνάρτησης ε, θα κάνουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις.

Στο τυπικό σύστημα η συνάρτηση ε χρησιμοποιείται με τρεις τρόπους:

1. Τα «όλα» και «υπάρχει» μπορούν να οριστούν με τη βοήθεια του ε με τον ακόλουθο τρόπο:





$$(a)A(a) \leftrightarrows A(\varepsilon(\bar{A}))$$
$$(Ea)A(a) \leftrightarrows A(\varepsilon(A))$$

Εδώ το διπλό βέλος συμβολίζει μία σύζευξη δύο συνεπαγωγών· στη θέση της, από δω και πέρα, θα χρησιμοποιούμε το σημείο της «ισοδυναμίας» ~.

Με βάση τούτο τον ορισμό, το αξίωμα 13 για το ε δίνει τις λογικές σχέσεις που ισχύουν για τον γενικό και τον υπαρκτικό ποσοδείκτη, όπως

$$(a)A(a) \rightarrow A(b) \qquad \text{(αξίωμα του Αριστοτέλη)}$$

και

$$\overline{(a)A(a)} \rightarrow (Ea)\overline{A(a)} \qquad \text{(αρχή του αποκλειομένου τρίτου).}$$

2. Αν μία πρόταση Α ισχύει για ένα και μόνο αντικείμενο, τότε $\varepsilon(A)$ είναι *το αντικείμενο* για το οποίο ισχύει η $A(a)$.

   Έτσι η συνάρτηση ε μας επιτρέπει να επιλύσουμε μια πρόταση όπως η $A(a)$, όταν αυτή ισχύει για ένα μονάχα αντικείμενο, ώστε να έχουμε

   $$a = \varepsilon(A)$$

3. Πέρα από αυτό, η ε παίζει το ρόλο συνάρτησης επιλογής· που σημαίνει ότι στην περίπτωση που η $A(\alpha)$ ισχύει για περισσότερα αντικείμενα, $\varepsilon(A)$ είναι *κάποιο* από τα αντικείμενα a για τα οποία ισχύει η $A(a)$». (Βλ. van Heijenoort, σ. 466.) [ΣτΕ].