

## Βασικοί Όροι και Επιχειρήματα

### 1. Αναγκαιότητα και A Priori Χαρακτήρας των Μαθηματικών

**1.1. Αναγκαία πρόταση:** μια πρόταση που έχει την ίδια αληθοτιμή σε όλους τους δυνατούς κόσμους – «αναγκαία αλήθεια: μια πρόταση που δεν μπορεί παρά να είναι αληθής». **Ενδεχομενική πρόταση:** μια πρόταση που έχει διαφορετικές αληθοτιμές σε διαφορετικούς δυνατούς κόσμους – «ενδεχομενική αλήθεια: μια πρόταση που συμβαίνει να είναι αληθής στον πραγματικό κόσμο αλλά δεν είναι αληθής σε όλους τους δυνατούς κόσμους». **Μεταφυσική διάκριση.**

**1.2. p γνωστή a priori:** η γνώση της p δεν βασίζεται στην, ή εξαρτάται από την, εμπειρία μιας οποιασδήποτε συγκεκριμένης ακολουθίας συμβάντων στον πραγματικό κόσμο. Αλλιώς, **p γνωστή a posteriori. p a priori:** p μπορεί να γίνει γνωστή a priori. Αλλιώς, **p a posteriori. Γνωσιολογική διάκριση.**

**1.3. Αναλυτική πρόταση:** πρόταση της οποίας η αληθοτιμή καθορίζεται από τη λογική μορφή και το νόημα των όρων που περιέχει. Η αληθοτιμή μιας αναλυτικής πρότασης μπορεί να διαπιστωθεί με εννοιολογική ανάλυση και μόνο. **Συνθετική πρόταση:** πρόταση της οποίας η αληθοτιμή δεν καθορίζεται μόνο από τη λογική μορφή και το νόημα των όρων αλλά εξαρτάται και από το πώς έχουν τα πράγματα στον πραγματικό κόσμο. Η αληθοτιμή μιας συνθετικής πρότασης δεν μπορεί να διαπιστωθεί με εννοιολογική ανάλυση και μόνο. **Σημασιολογική διάκριση.**

### 2. Το Καθεστώς των Μαθηματικών Αντικειμένων

**Ρεαλισμός ως προς τις μαθηματικές οντότητες:** τουλάχιστον μερικά μαθηματικά αντικείμενα υπάρχουν αντικειμενικά, ανεξάρτητα από τον μαθηματικό.<sup>1</sup>

**Ιδεαλισμός ως προς τις μαθηματικές οντότητες:** τα μαθηματικά αντικείμενα υπάρχουν, αλλά όχι ανεξάρτητα από τον νου του μαθηματικού.

**Νομιναλισμός** (όπως συνήθως νοείται στη φιλοσοφία των μαθηματικών): τα μαθηματικά αντικείμενα δεν υπάρχουν.

**The “indispensability argument”:**

- (Π1) Η πραγματική ανάλυση αναφέρεται σε, και περιλαμβάνει μεταβλητές που λαμβάνουν ως τιμές, αφηρημένες οντότητες που λέγονται «πραγματικοί αριθμοί». Και αποδοχή της αλήθειας των προτάσεων της πραγματικής ανάλυσης δεσμεύει στην αποδοχή της ύπαρξης αυτών των οντοτήτων.
- (Π2) Η πραγματική ανάλυση είναι απαραίτητη για τη φυσική: η σύγχρονη φυσική δεν μπορεί να διατυπωθεί ή να αναπτυχθεί χωρίς προτάσεις της πραγματικής ανάλυσης.
- (Π3) Αν η πραγματική ανάλυση είναι απαραίτητη για τη φυσική, τότε όποιος αποδέχεται ότι η φυσική συγκροτεί αληθή περιγραφή της υλικής πραγματικότητας πρέπει να αποδεχθεί την αλήθεια των προτάσεων της πραγματικής ανάλυσης.
- (Π4) Η φυσική είναι (κατά προσέγγιση) αληθής.

∴ Οι πραγματικοί αριθμοί υπάρχουν.

### 3. Η Σημασιολογία των Μαθηματικών Προτάσεων

**Ρεαλισμός ως προς την αληθοτιμή:** κάθε μαθηματική πρόταση έχει αντικειμενική (δισθενή) αληθοτιμή, ανεξάρτητα από τον μαθηματικό.

**Αντιρεαλισμός ως προς την αληθοτιμή:** τουλάχιστον κάποιες μαθηματικές προτάσεις δεν έχουν αντικειμενικές (δισθενείς) αληθοτιμές, ανεξάρτητες από τον μαθηματικό.

### 4. Το «δίλημμα» του Benacerraf

Η επιθυμητή ομοιομορφία της σημασιολογίας της μαθηματικής γλώσσας με εκείνη της επιστημονικής και καθημερινής γλώσσας προκρίνει το συνδυασμό του ρεαλισμού ως προς την αληθοτιμή με τον ρεαλισμό ως προς τις οντότητες. Αλλά ο συνδυασμός αυτός συναντά δύσκολα γνωσιολογικά προβλήματα. Άρα ο φιλόσοφος των μαθηματικών πρέπει είτε να λύσει τα γνωσιολογικά προβλήματα του ρεαλισμού είτε να απεμπολήσει το αίτημα της ομοιομορφίας της σημασιολογίας της μαθηματικής γλώσσας με εκείνη της επιστημονικής και καθημερινής γλώσσας είτε να προτείνει μια διαφορετική σημασιολογία για την επιστημονική και την καθημερινή γλώσσα.

<sup>1</sup> Με την έκφραση «ανεξάρτητα από τον μαθηματικό» εννοούμε «ανεξάρτητα από τον ανθρώπινο νου, τη γλώσσα ή τις κοινωνικές πρακτικές των μαθηματικών, κ.λπ.»