Α. Αραγεώργης
Τομέας ΑΚΕΔ, Σχολή ΕΜΦΕ, ΕΜΠ

Αξιωματική Θεωρία Συνόλων ZFC

Έστω L_{ZF} μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ισότητα της οποίας το μοναδικό μη-λογικό σύμβολο είναι το διθέσιο κατηγορηματικό σύμβολο '$\in$'. Γράφουμε '$x \in y$' αντί για '$\in xy$' ή '$\in (x, y)$'. Επίσης γράφουμε '$x \neq y$' και '$(x \notin y)$' αντί για '$\neg (x = y)$' και '$\neg (x \in y)$' αντίστοιχα, όπου '$\neg$' ο σύνδεσμος της άρνησης. Θεωρούμε ότι η L_{ZF} είναι εφοδιασμένη με ένα ορθό και πλήρες σύστημα λογικών αξιωμάτων και κανόνων συναγωγής. Εισάγουμε τα ακόλουθα μη-λογικά αξιώματα.

[ZF1] *Αξίωμα έκτασης* ή *εκτασιακότητας* (axiom of extensionality)

$$(\forall x)(\forall y)\big((\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y\big).$$

Δυο σύνολα με ακριβώς τα ίδια στοιχεία ταυτίζονται.

[ZF2] *Αξίωμα κενού συνόλου* (empty set axiom)

$$(\exists x)(\forall y)\big(y \notin x\big)$$

Υπάρχει σύνολο χωρίς στοιχεία. Λόγω [ZF1], το σύνολο αυτό είναι μοναδικό: το ονομάζουμε *κενό σύνολο* και το συμβολίζουμε με '$\varnothing$'.

[ZF3] *Αξίωμα ζεύγους* (pairing axiom)

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall w)\big(w \in z \leftrightarrow (w = x \vee w = y)\big)$$

Δεδομένων δυο συνόλων x και y υπάρχει σύνολο z του οποίου τα στοιχεία είναι ακριβώς τα x και y. Λόγω [ZF1], το σύνολο αυτό είναι μοναδικό και το συμβολίζουμε με '$\{x, y\}$'. Επίσης $\{x\} = \{x, x\}$.

[ZF4] *Αξίωμα ένωσης* (union axiom)

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)\big(z \in y \leftrightarrow (\exists w)(z \in w \wedge w \in x)\big)$$

Για κάθε σύνολο x υπάρχει σύνολο y του οποίου τα στοιχεία z είναι ακριβώς τα στοιχεία των στοιχείων του x. Λόγω [ZF1], το σύνολο αυτό είναι μοναδικό και το συμβολίζουμε με '$\cup x$'.

Ορισμός. *Ένωση συνόλων*. $x \cup y = \cup\{x, y\}$.

Ορισμός. *Υποσύνολο*. Γράφουμε '$x \subseteq y$' και λέμε 'το x είναι υποσύνολο του y' αν και μόνο αν '$(\forall z)(z \in x \to z \in y)$'.

[ZF5] *Αξίωμα δυναμοσυνόλου* (power set axiom)

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)\big(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x\big)$$

Για κάθε σύνολο x υπάρχει σύνολο y του οποίου τα στοιχεία z είναι ακριβώς τα υποσύνολα του x. Λόγω [ZF1], το σύνολο αυτό είναι μοναδικό: το ονομάζουμε *δυναμοσύνολο του* x και το συμβολίζουμε με '$P(x)$'.

[ZF6] *Αξιωματικό σχήμα αντικατάστασης* (axiom scheme of replacement / substitution)

Για κάθε τύπο $\varphi(x, y)$ (με παραμέτρους) της L_{ZF}

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\big\{\big[\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z)\big] \to y = z\big\} \to (\forall u)(\exists v)(\forall w)\big[w \in v \leftrightarrow (\exists t)(t \in u \wedge \varphi(t, w))\big]$$

Αν ο τύπος $\varphi(x, y)$ της L_{ZF} είναι *συναρτησιακός* με την έννοια ότι $\big[\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z)\big] \to y = z$ για κάθε x, y, z, τότε για κάθε σύνολο u υπάρχει σύνολο v του οποίου τα στοιχεία w είναι ακριβώς οι εικόνες των στοιχείων του u μέσω της συνάρτησης που ορίζει ο $\varphi(x, y)$.

Από το [ZF6] προκύπτει το *αξιωματικό σχήμα διαχωρισμού* (axiom scheme of separation) ή *αξιωματικό σχήμα υποσυνόλων* (axiom scheme of subsets): για κάθε τύπο $\varphi(x, x_0, x_1, ..., x_n)$ της L_{ZF} με ελεύθερες μεταβλητές από τη λίστα $x_0, x_1, ..., x_n$ ισχύει

$$(\forall x_0)(\forall x_1)...(\forall x_n)(\forall z)(\exists y)(\forall x)\big(x \in y \leftrightarrow (x \in z \wedge \varphi(x, x_0, x_1, ..., x_n))\big)$$

Με λόγια, δεδομένων ενός τύπου $\varphi(x, x_0, x_1, ..., x_n)$ της L_{ZF}, παραμέτρων $x_0, x_1, ..., x_n$ και ενός συνόλου z, υπάρχει σύνολο y του οποίου τα στοιχεία x είναι ακριβώς τα στοιχεία του z που ικανοποιούν τη σχέση $\varphi(x, x_0, x_1, ..., x_n)$. Λόγω [ZF1], το σύνολο αυτό είναι μοναδικό και το παριστάνουμε με

‘ $\{x : x \in z \wedge \varphi(x, x_0, x_1, ..., x_n)\}$ ’ ή ‘ $\{x \in z : \varphi(x, x_0, x_1, ..., x_n)\}$ ’.

Ορισμός. *Τομή συνόλων.* $x \cap y = \{z \in x : z \in y\}$.

Ορισμός. *Σύνολα ξένα μεταξύ τους.* Λέμε ότι τα σύνολα x και y είναι ξένα μεταξύ τους αν και μόνο αν $x \cap y = \varnothing$.

Ορισμός. *Διαφορά συνόλων.* $x - y = \{z \in x : z \notin y\}$.

[ZF7] *Αξίωμα απείρου* (axiom of infinity)

$$(\exists x)\big(\varnothing \in x \wedge (\forall y)(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x)\big)$$

Υπάρχει σύνολο x που περιέχει το $\varnothing$ και όλα τα σύνολα $y \cup \{y\}$ όπου $y \in x$. Έπεται ότι το x περιέχει τα

$$\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\varnothing, \{\varnothing\}\},\ \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\},\ ...$$

και μ’ αυτή την έννοια είναι «άπειρο».

[ZF8] *Αξίωμα θεμελίωσης* ή *κανονικότητας* (axiom of foundation or regularity)

$$(\forall x)\big(x \neq \varnothing \rightarrow (\exists y)(y \in x \wedge y \cap x = \varnothing)\big)$$

Κάθε μη-κενό σύνολο x έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο y που είναι *ξένο* προς το x. Με χρήση του [ZF8] προκύπτει ως θεώρημα η πρόταση

$$(\forall x)(x \notin x).$$

[C] *Αξίωμα επιλογής* (axiom of choice)

$$(\forall z)\big\{(\forall x)\big[\big(x \in z \rightarrow x \neq \varnothing\big) \wedge (\forall y)\big(y \in z \rightarrow x \cap y = \varnothing \vee x = y\big)\big] \rightarrow (\exists u)(\forall x)(\exists v)\big(x \in z \rightarrow u \cap x = \{v\}\big)\big\}$$

Για κάθε σύνολο z μη-κενών και ξένων μεταξύ τους συνόλων, υπάρχει σύνολο u το οποίο περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο v από κάθε στοιχείο x του z. Με άλλα λόγια, για κάθε σύνολο z μη-κενών και ξένων μεταξύ τους συνόλων υπάρχει συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το z και τέτοια ώστε $(\forall x)(x \in z \rightarrow f(x) \in x)$. Η συνάρτηση f επιλέγει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε στοιχείο του z και γι’ αυτό αποκαλείται *συνάρτηση επιλογής* (choice function).

Η θεωρία που χαρακτηρίζεται από τα παραπάνω μη-λογικά αξιώματα στη γλώσσα L_{ZF} ονομάζεται *αξιωματική θεωρία Zermelo-Fraenkel με αξίωμα επιλογής* (ZFC). Τα αξιώματα [ZF1]-[ZF5], αξιωματικό σχήμα διαχωρισμού, [ZF7] και [C] διατυπώθηκαν από τον Ernst Zermelo στο “Investigations in the Foundations of Set Theory I” (1908). Το αξιωματικό σχήμα αντικατάστασης [ZF6] προτάθηκε από τον Abraham Fraenkel και τον Thoralf Skolem γύρω στο 1922 και το αξίωμα θεμελίωσης [ZF8] εντάχθηκε στη θεωρία συνόλων από τον John von Neumann το 1925.[1]

[1] Η αναφερθείσα εργασία του Zermelo καθώς και οι κλασικές συμβολές των Fraenkel, Skolem, von Neumann, κ.ά. στη θεωρία συνόλων βρίσκονται στη συλλογή van Heijenoort, J. (ed.), *From Frege to Gödel: A Sourcebook in Mathematical Logic, 1879-1931*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1967.