

(*) δηλ. $\forall z_0 \in U, \exists r > 0 \mid D(z_0, r) \subset U$, όπου
 $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$.

1

ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΟΤΗΤΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ορισμός 1: Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, (*)

$f: U \rightarrow \mathbb{C}$ κ' $z_0 \in U$. Θα λέμε ότι η

f είναι διαφορίσιμη (ή παραγωγίσιμη)

στο z_0 ανν υπάρχει το όριο

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (1)$$

κ' είναι μιγαδικός αριθμός.

Σ' αυτή την περίπτωση, το παραπάνω
όριο λέγεται παραγωγός της f στο
 z_0 κ' συμβολ. με

$$\underline{f'(z_0)}.$$

1 ΣΟΔΥΝΑΜΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ:

f διαφορίσιμη στο z_0 ανν

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

Σχόλιο: Στην (2), η έκφραση $f(z_0+h)$

ορίζεται, για $|h|$ αρκετά "μικρό".

Πράγματι: εφόσον U ανοικτό & $z_0 \in U$,
 $\exists r > 0 : D(z_0, r) \subseteq U$,

όπου $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$.

Για $|h| < r$, έχουμε $|(z_0+h) - z_0| = |h| < r$

$\Rightarrow z_0+h \in D(z_0, r) \subseteq U$

\Rightarrow το $f(z_0+h)$ ορίζεται.

Παραδείγματα:

(i) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Εάν $z_0 \in \mathbb{C}$, τότε, $\forall z \neq z_0$,

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} =$$

$$= \frac{(z - z_0) \cdot (z^{n-1} + z^{n-2} \cdot z_0 + \dots + z_0^{n-1})}{z - z_0}$$

$$= z^{n-1} + z^{n-2} \cdot z_0 + \dots + z_0^{n-1}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
 η πλήθος όροι

Άρα,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \\ &= \underbrace{z_0^{n-1} + z_0^{n-1} + \dots + z_0^{n-1}}_{n \text{ πλῆθους}} = n z_0^{n-1}. \end{aligned}$$

Επομένως, f διαφορ. στο z_0 με $f'(z_0) = n z_0^{n-1}$.

(ii) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \bar{z}, z \in \mathbb{C}$.

Έστω $z_0 \in \mathbb{C}, \forall h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} &= \frac{\overline{z_0+h} - \bar{z}_0}{h} \\ &= \frac{\bar{z}_0 + \bar{h} - \bar{z}_0}{h} = \frac{\bar{h}}{h} \end{aligned}$$

$$\frac{\bar{h}}{h} = \begin{cases} 1, & h \in \mathbb{R} \\ -1, & h \text{ φανταστικός} \end{cases}$$

Άρα, $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{\bar{h}}{h} = 1, \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \text{ φαντ.}}} \frac{\bar{h}}{h} = -1$

$1 \neq -1 \Rightarrow$ δεν υπάρχει το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}$,

\Rightarrow η f δεν είναι διαφορ. στο z_0 .

Δηλ. η $z \mapsto \bar{z}$ δεν είναι πονδενά
διαφορίσιμη, ενώ είναι παντού συνεχής.

Σημ. ότι είναι εφαιρετικά περίπλοκο

να ορίσει κανείς συνεχή συνάρτηση
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που δεν είναι πονδενά
 διαφορ. (υπάρχει ένα παράδειγμα
 του Weierstrass!).

(iii) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = |z|^2$, $z \in \mathbb{C}$.

Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$. $\forall h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \frac{|z_0+h|^2 - |z_0|^2}{h} =$$

$$= \frac{|z_0|^2 + |h|^2 + z_0\bar{h} + \bar{z}_0h - |z_0|^2}{h}$$

$$= \frac{|h|^2}{h} + z_0 \frac{\bar{h}}{h} + \bar{z}_0$$

$$= \bar{h} + \bar{z}_0 + z_0 \frac{\bar{h}}{h} \quad (\text{σημ. } |h|^2 = h \cdot \bar{h}).$$

Εάν $z_0 \neq 0$, το $\lim_{h \rightarrow 0} z_0 \frac{\bar{h}}{h}$ δεν υπάρχει

(βλ. (ii')).

Επομένως, για $z_0 \neq 0$, το

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$
 δεν υπάρχει,

ενώ για $z_0 = 0$, το όριο ισούται με 0.

Άρα, f διαφορίσιμη μόνο στο $z_0 = 0$,
 με: $f'(0) = 0$.

Πρόταση 1: Εάν f διαφορίσιμη στο z_0 ,
 τότε f συνεχής στο z_0 .
 (Αποδεικνύεται εύκολα).

Πρόταση 2: Έστω U ανοικτό $\subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in U$
 κι $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$ διαφορίσιμες στο z_0 .

Τότε:

(i) $f+g, f \cdot g$ διαφορ. στο z_0 με

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$$

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, η $\lambda \cdot f$ είναι διαφορ. στο z_0
 με

$$(\lambda f)'(z_0) = \lambda f'(z_0).$$

(iii) Εάν $g(z_0) \neq 0$, η f/g είναι

διαφορ. στο z_0 με

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{[g(z_0)]^2}.$$

Η απόδειξη προκύπτει εύκολα από τον Ορισμό 1.

Πρόταση 3: (Παράγωγος σύνθεσης
συνάρτησης)

Έστω $U, W \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτά, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$,

$g: W \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in U$, ώστε

- $f(U) \subseteq W$
- f διαφορ. στο z_0

$$\boxed{U \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} \mathbb{C}}$$

- g διαφορ. στο $f(z_0)$.

Τότε, $g \circ f$ διαφορ. στο z_0 με

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Απόδειξη: Υπενθυμίζου με z_0

παρακάτω:

"Εστω $f: A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z_0 \in A$. Τότε,

f συνεχής στο z_0 ανν

\forall ακολουθία $(z_n) \subseteq A$ με $z_n \rightarrow z_0$,

\exists υπακολουθία (z_{k_n}) με $f(z_{k_n}) \rightarrow f(z_0)$."

(βλ. αρχείο με τίτλο ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥ)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $G: U \rightarrow \mathbb{C}$ με

$$G(z) = \begin{cases} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)}, & \text{αν } f(z) \neq f(z_0) \\ g'(f(z_0)), & \text{αν } f(z) = f(z_0). \end{cases}$$

Ισχυρισμός: G συνεχής στο z_0 .

Απόδ. Ισχυρισμού. Έστω $(z_n) \subseteq U$ με

$$z_n \rightarrow z_0.$$

Επειδή f συνεχής στο z_0 , ισχύει

$$f(z_n) \rightarrow f(z_0).$$

1 η περίπτωση: $f(z_n) = f(z_0)$, για

αίτερα n . Τότε, $\exists k_1 < k_2 < k_3 < \dots$

γνήσια αύξουσα ακολουθία φυσικών /

$$f(z_{k_n}) = f(z_0), \quad n \geq 1.$$

Τότε, $G(z_{k_n}) = g'(f(z_0)), \quad n \geq 1$

$$\Rightarrow G(z_{k_n}) \xrightarrow{n} g'(f(z_0)) = G(z_0).$$

2 η περίπτωση: $f(z_n) \neq f(z_0)$, μόνο

για πεπερασμένα n . Τότε, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$

$$\forall n \geq n_0, \quad f(z_n) \neq f(z_0)$$

$$\Rightarrow G(z_n) = \frac{g(f(z_n)) - g(f(z_0))}{f(z_n) - f(z_0)}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} g'(f(z_0)); \quad \text{λόγω διαφορ. στο } f(z_0).$$

$$\text{Ανα.} \quad G(z_n) \rightarrow G(z_0).$$

Σε κάθε περίπτωση, υπάρχει υπαρκτό (z_k) με $G(z_k) \rightarrow G(z_0)$ ή

άρα G συνεχής στο z_0 .

Ο λοχυρισμός αποδείχθηκε.

Από τον ορισμό της G προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} g(f(z)) - g(f(z_0)) &= \\ &= G(z) \cdot [f(z) - f(z_0)], \quad \underline{\forall z \in U} (!) \end{aligned}$$

Οπότε, $\forall z \in U \setminus \{z_0\}$,

$$\begin{aligned} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} &= \\ &= G(z) \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ } G \text{ συνεχής στο } z_0 \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} G(z) = G(z_0),$$

$$\bullet \text{ } f \text{ διαφορ. στο } z_0 \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα, } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} &= G(z_0) f'(z_0) \\ &= g'(f(z_0)) f'(z_0). \end{aligned}$$

□

Ορισμός 2: Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό κ' $f: U \rightarrow \mathbb{C}$. Η f λέγεται ολόμορφη ή αναλυτική στο U αν η f είναι διαφ. σε κάθε $z_0 \in U$.

Αν $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη, ορίζεται η παράγωγος συνάρτηση $f': U \rightarrow \mathbb{C}$ $U \ni z \mapsto f'(z) \in \mathbb{C}$

Συμβολισμός:

$$H(U) = \{f: U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ολόμορφη}\}$$

Από την πρόταση 2 προκύπτει ότι

$\forall f, g \in H(U), \forall \lambda \in \mathbb{C}$, ισχύει:

$$f+g \in H(U), f \cdot g \in H(U), \lambda \cdot f \in H(U),$$

$$f/g \in H(U'), \text{ όπου}$$

$$U' = U \setminus \{z \in U \mid g(z) = 0\}.$$

Σημ. ότι U' ανοικτό, λόγω συνέχειας της g .

Επιπλέον, αν $U, W \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτά is

$f \in H(U), g \in H(W)$ με $f(U) \subseteq W,$

τότε $g \circ f \in H(U)$ (βλ. Πρότ. 3).

Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $f = u + iv: U \rightarrow \mathbb{C}$

is $z_0 = x_0 + iy_0 \in U.$

Γνωρίζουμε ότι f συνεχής στο z_0 ανν

οι $u = u(x, y), v = v(x, y)$ είναι συνεχείς στο $(x_0, y_0).$

Ισχύει άραγε κάτι ανάλογο για την διαφοροσιμότητα;

Δηλ. Ισχύει ότι f διαφορ. στο z_0

ανν u, v διαφοροσιμες στο (x_0, y_0) ?

Όχι. Π.χ. $f(z) = \bar{z}, u(x, y) = x,$

$v(x, y) = -y.$ Οι $u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι

διαφοροσιμες αλλά f πανταίνα διαφορ.!!

Επομένως, δεν αρκεί η διαφοριστικότητα των u, v στο (x_0, y_0) για να μας δώσει την διαφοριστικότητα της f στο $z_0 = x_0 + iy_0$.

Χρειάζεται κάτι παραπάνω:
Οι συνθήκες Cauchy-Riemann
στο (x_0, y_0) .

Πρόταση 4: Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό,

$z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ διαφορ.

στο z_0 με $f = u + iv$. Τότε,

υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι

$$u_x(P_0), u_y(P_0), v_x(P_0), v_y(P_0),$$

$$(P_0 \equiv (x_0, y_0)) \quad \text{κ'}$$

$$\left. \begin{cases} u_x(P_0) = v_y(P_0) \\ u_y(P_0) = -v_x(P_0) \end{cases} \right\} \begin{array}{l} \text{Συνθήκες} \\ \text{Cauchy} \\ \text{Riemann} \\ \text{(C-R)} \end{array}$$

Επιπλέον, $f'(z_0) = u_x(P_0) + iv_x(P_0)$.

Απόδειξη: Υπενθυμίζουμε το παρακάτω:

« Έστω $F: A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0$ σημείο
 συσσώρευσης του A κ' $L \in \mathbb{C}$. Τότε,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = L \Leftrightarrow \left[\lim_{(x,y) \rightarrow P_0} \operatorname{Re} F(x,y) = \operatorname{Re} L \text{ κ' } \right.$$

$$\left. \lim_{(x,y) \rightarrow P_0} \operatorname{Im} F(x,y) = \operatorname{Im} L \right],$$

$$P_0 \equiv (x_0, y_0). \quad \text{»}$$

Έστω $h = h_1 + ih_2 \neq 0$ ($h_1, h_2 \in \mathbb{R}$) με
 $z_0 + h \in U$.

$$\text{Έχουμε} \quad z_0 = x_0 + iy_0,$$

$$z_0 + h = (x_0 + h_1) + i(y_0 + h_2),$$

$$\begin{aligned} f(z_0) &= u(x_0, y_0) + i v(x_0, y_0) \\ &= u(P_0) + i v(P_0), \end{aligned}$$

$$f(z_0 + h) = u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) + i v(x_0 + h_1, y_0 + h_2).$$

Θέτουμε

$$\lambda_h(z_0) = \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}.$$

Τότε, $\lim_{h \rightarrow 0} \lambda_h(z_0) = f'(z_0).$

Ευδικότερα:

$$\bullet \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R} \\ h_2 = 0}} \lambda_h(z_0) = f'(z_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{h_1 \rightarrow 0} \left[\frac{u(x_0+h_1, y_0) - u(x_0, y_0)}{h_1} + i \frac{v(x_0+h_1, y_0) - v(x_0, y_0)}{h_1} \right] = f'(z_0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{u(x_0+h_1, y_0) - u(x_0, y_0)}{h_1} = \operatorname{Re} f'(z_0) \\ \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{v(x_0+h_1, y_0) - v(x_0, y_0)}{h_1} = \operatorname{Im} f'(z_0). \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists \text{ολ } u_x(P_0), v_x(P_0), P_0 = (x_0, y_0) \text{ κ.ε}$$

$$\boxed{u_x(P_0) = \operatorname{Re} f'(z_0), v_x(P_0) = \operatorname{Im} f'(z_0).} \quad (3)$$

$$\bullet \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \text{ arbitrary} \\ (h_1=0)}} \Delta_h(z_0) = f'(z_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{h_2 \rightarrow 0} \left[\frac{u(x_0, y_0 + h_2) - u(x_0, y_0)}{i h_2} + \right. \\ \left. + j \frac{v(x_0, y_0 + h_2) - v(x_0, y_0)}{i h_2} \right] = f'(z_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{h_2 \rightarrow 0} \left[\frac{v(x_0, y_0 + h_2) - v(x_0, y_0)}{h_2} - \right. \\ \left. - i \frac{u(x_0, y_0 + h_2) - u(x_0, y_0)}{h_2} \right] = f'(z_0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + h_2) - v(x_0, y_0)}{h_2} = \operatorname{Re} f'(z_0) \\ - \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + h_2) - u(x_0, y_0)}{h_2} = \operatorname{Im} f'(z_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists \text{ οι } u_y(P_0), v_y(P_0) \quad (P_0 = (x_0, y_0))$$

με

$$\left\{ \begin{aligned} u_y(P_0) &= -\text{Im} f'(z_0), & v_y(P_0) &= \text{Re} f'(z_0) \end{aligned} \right. \quad (4)$$

$$(3), (4) \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} u_x(P_0) &= v_y(P_0), & u_y(P_0) &= -v_x(P_0) \end{aligned} \right.$$

Επιπλέον, $f'(z_0) = \text{Re} f'(z_0) + i \text{Im} f'(z_0)$
(3) $= u_x(P_0) + i v_x(P_0) \quad \square$

Σχόλιο: Το αντίστροφο της Πρότασης 4 δεν ισχύει γενικά!!

Παράδειγμα: $f = u + iv,$

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

$$v(x, y) = u(x, -y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{u(x, 0) - u(0, 0)}{x - 0} = \frac{x^3/x^2}{x} \stackrel{x \rightarrow 0}{=} 1 \rightarrow 1$$

$$\Rightarrow \boxed{u_x(0, 0) = 1}$$

$$\frac{v(x,0) - v(0,0)}{x-0} = 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

$$\Rightarrow \boxed{v_x(0,0) = 1}$$

$$\forall y \neq 0, \frac{u(0,y) - u(0,0)}{y-0} = \frac{-y^3/y^2}{y} = -1 \xrightarrow{y \rightarrow 0} -1$$

$$\Rightarrow \boxed{u_y(0,0) = -1}$$

$$\frac{v(0,y) - v(0,0)}{y-0} = \frac{u(0,-y)}{y} = \frac{y^3/y^2}{y} = 1 \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1$$

$$\Rightarrow \boxed{v_y(0,0) = 1}$$

Άρα, $u_x(0,0) = v_y(0,0)$, $u_y(0,0) = -v_x(0,0)$,

οπότε ικανοποιούνται οι (C-R) στο $(0,0)$.

$\forall z = x+iy \neq 0$, έχουμε

$$\lambda_0(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z-0} = \frac{u(x,y) + iv(x,y)}{x+iy}$$

$$= \frac{u(x,y) + iu(x-y)}{x+iy}$$

$$\bullet \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z=x \in \mathbb{R}}} \lambda_0(z) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x,0) + iu(x,0)}{x}$$

$$= \underline{1+i}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{z \rightarrow 0} \lambda_0(z) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x,x) + iu(x,-x)}{x + ix} \\ z = x + ix \quad x \in \mathbb{R} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 + i \frac{2x^3}{2x^2}}{x(1+i)} \\ &= \frac{i}{1+i} \end{aligned}$$

$1+i \neq \frac{i}{1+i} \Rightarrow \eta \ f \text{ δεν \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03b4\u03b9\u03b1\u03c6\u03bf\u03c1\u03b9\u03c3\u03c4\u03b7 \u03c3\u03c4\u03bf} \underline{z_0 = 0}.$

Παρ' \u03b1\u03bb\u03c9\u03c3\u03c4\u03b1, \u03b9\u03c7\u03c5\u03b5\u03b9 \u03c4\u03bf \u03c0\u03b1\u03c1\u03b1\u03ba\u03b1\u03b9\u03c9

\u0398\u03b5\u03bc\u03bc\u03b7\u03bc\u03b1 5 (\u0398. Cauchy - Riemann)

\u038c\u03c3\u03c4\u03c9 $U \subseteq \mathbb{C}$ \u03c4\u03b1\u03bd\u03b9\u03ba\u03c4\u03c9, $f = u + iv : U \rightarrow \mathbb{C}$
 \u03ba' $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$. \u038c\u03c0\u03bf\u03b8\u03b5\u03c4\u03bf\u03c5\u03bc\u03b5 \u03c4\u03c9:

(i) \u0399\u03ba\u03b1\u03bd\u03bf\u03c4\u03bf\u03b9\u03c9\u03bd\u03b5\u03bd\u03b1 \u03c9\u03b9 \u03c3\u03c5\u03bd\u03b4\u03b9\u03ba\u03b5\u03c2 C-R
 \u03c3\u03c4\u03c9 $P_0 = (x_0, y_0)$, \u03b4\u03b7\u03bb.
 $u_x(P_0) = v_y(P_0), u_y(P_0) = -v_x(P_0)$.

(ii) u, v \u03b4\u03b9\u03b1\u03c6\u03bf\u03c1\u03b9\u03c3\u03c4\u03b5\u03c2 \u03c3\u03c4\u03c9 P_0 .

\u038c\u03c4\u03c9\u03c4\u03b5, f \u03b4\u03b9\u03b1\u03c6\u03bf\u03c1\u03b9\u03c3\u03c4\u03b7 \u03c3\u03c4\u03c9 z_0 \u03ba'

$f'(z_0) = u_x(P_0) + i v_x(P_0)$.
\u0391\u03c0\u03cc\u03b4\u03b5\u03b9\u03be\u03b9 (\u03c0\u03b1\u03c1\u03b1\u03b1\u03b4\u03b5\u03b9\u03c4\u03b5\u03c1\u03b1)

Σχόλιο: Στο Θ.5, η υπόθεση (ii)

στην πράξη συνήθως αντικαθίσταται από την ισχυρότερη:

(ii)': \exists οι u_x, u_y, v_x, v_y σε περιοχή V
των \mathbb{C} \mathbb{C} είναι συνεχείς στο V .

Γνωρίζουμε από την Ανάλ. II ότι
(ii)' \Rightarrow (ii).

Το Θ.5 εφαρμόζεται άμεσα στην εκθετική συνάρτηση.

Πρόταση 6: Η $z \mapsto e^z$ είναι ολόμορφη

στο \mathbb{C} \mathbb{C} $(e^z)' = e^z, \forall z \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη: $f(z) = e^z, z \in \mathbb{C}$.

Τότε, $f = u + iv$, όπου

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y, \\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Οι u, v είναι διαφορίσιμες στο \mathbb{R}^2 \mathbb{C}

$$u_x = u, \quad u_y = -v, \quad v_x = v, \quad v_y = u$$

$$\Rightarrow \underline{u_x = v_y, \quad u_y = -v_x} \text{ στο } \mathbb{R}^2 \text{ (C-R)}$$

$$\stackrel{\Theta.5}{\Rightarrow} f \text{ ολόμορφη στο } \mathbb{C} \mathbb{C}$$

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C},$$

$$f'(z) = u_x + i v_x = u + i v = f(z). \quad \square$$

Πρόταση 7: Η συνάρτηση $w \mapsto \text{Log } w$

είναι ορόσηφη στο $A = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

$$\text{ή} \quad (\text{Log } w)' = \frac{1}{w}, \quad \forall w \in A.$$

Απόδειξη: Η συνάρτηση Log είναι συνεχής

(μόνο) στα σημεία $w \in A$ (βλ. αρχείο ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥ).

Έστω $w_0 \in A$. Για $w \neq w_0, w \neq 0$, δέσκει

$$z = \text{Log } w, \quad z_0 = \text{Log } w_0, \quad \text{οπότε}$$

$$w = e^z, \quad w_0 = e^{z_0}$$

$$\text{ή} \quad \frac{\text{Log } w - \text{Log } w_0}{w - w_0} = \frac{z - z_0}{e^z - e^{z_0}}.$$

Επειδή η Log είναι συνεχής στο w_0 ,

έχουμε ότι $z \rightarrow z_0$, καθώς $w \rightarrow w_0$.

$$\text{Άρα,} \quad \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{\text{Log } w - \text{Log } w_0}{w - w_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{e^z - e^{z_0}} =$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{\frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0}} = \frac{1}{(e^z)' \Big|_{z=z_0}} = \frac{1}{e^{z_0}} = \frac{1}{w_0} \quad \square$$

Επειδή

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}$$

παιρνουμε εύκολα (λόγω Πρότ. 6) ότι

$$\underline{(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z, \quad z \in \mathbb{C}}$$

Π.χ. $[\sin(z^3)]' = 3z^2 \cos(z^3), \quad z \in \mathbb{C}$,

$[\cos(e^z)]' = -e^z \sin(e^z), \quad z \in \mathbb{C}$.

Συχνά ο έλεγχος των Cauchy-Riemann απαιτεί περίπλοκους υπολογισμούς. Υπάρχει ένα λαβιακτική μέθοδος.

Έστω $f = u + iv: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (U ανοικτό).

$$\forall z = x + iy \in U, \quad x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}),$$

οπότε η f μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση των z, \bar{z} .

Λογικά η παρακάτω:

Πρόταση 8: Έστω $z_0 \in U$, $z_0 = x_0 + iy_0$.

Υποθέτουμε ότι u, v διαφορίσιμες στο z_0 .

Τότε

$$[f \text{ διαφ. στο } z_0] \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0.$$

Σ' αυτή την περίπτωση,

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$$

Απόδειξη: θέτουμε

$$\varphi(z, \bar{z}) = u\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right), \quad \psi(z, \bar{z}) = v\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}(z+\bar{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} &= u_x \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + u_y \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(u_x - i u_y) \\ &= \frac{1}{2}(u_x + i u_y), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} = \dots = \frac{1}{2}(v_x + i v_y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}[(u_x + i u_y) + i(v_x + i v_y)]$$

$$= \frac{1}{2}[(u_x - v_y) + i(u_y + v_x)]$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0 \Leftrightarrow \text{ισχύουν οι C-R στο } (x_0, y_0)$$

Επειδή u, v διαφορ. στο (x_0, y_0) ,

από το Θ.5 προκύπτει η ισοδυναμία

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0 \Leftrightarrow f \text{ διαφορ. στο } z_0.$$

Επιπλέον, με παρόμοιο τρόπο παίρνουμε

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} [(u_x + v_y) + i(v_x - u_y)]$$

οπότε αν $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) &= \frac{1}{2} (2u_x(P_0) + i2v_x(P_0)) \\ &= u_x(P_0) + iv_x(P_0) \\ &= f'(z_0), \quad P_0 = (x_0, y_0). \end{aligned}$$

□

Εφαρμογή: Να βρείτε σε ποιά $z_0 \in \mathbb{C}$

η $\sin(\bar{z})$ είναι διαφορίσιμη κ' να υπολογίσετε την παράγωγο σε αυτά τα σημεία.

Λύση:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} [\sin(\bar{z})] = 0 \Leftrightarrow \cos(\bar{z}) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = z_k = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Η παράγωγος είναι $\frac{\partial}{\partial z} [\sin(\bar{z})] \Big|_{z=z_k} = 0, k \in \mathbb{Z}.$

Μια χαρακτηριστική οίσκηση:

Να βρεθεί η ομόμορφη συνάρτηση
 $f = u + iv: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ώστε

$$u = x^2 - y^2 + e^{-y} \sin x - e^y \cos x, f(0) = -1.$$

Λύση: Από συνθήκες C-R έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} v_y = u_x \\ v_x = -u_y \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \underline{v_y = 2x + e^{-y} \cos x + e^y \sin x} \quad (1) \\ \underline{v_x = 2y + e^{-y} \sin x + e^y \cos x} \quad (2) \end{array}$$

Ολοκληρώνοντας την (1) ως προς y έχουμε

$$\underline{v = 2xy - e^{-y} \cos x + e^y \sin x + c(x)} \quad (3)$$

$$(3) \Rightarrow v_x = 2y + e^{-y} \sin x + e^y \cos x + c'(x)$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{(2)} v_x &= v_x + c'(x) \Rightarrow c'(x) = 0 \\ &\Rightarrow c(x) = c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Τώρα η (3) γράφεται

$$v = 2xy - e^{-y} \cos x + e^y \sin x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Όμως

$$-1 = f(0) = u(0,0) + i v(0,0)$$

$$= -1 + i(c-1)$$

$$\Rightarrow c-1=0 \Rightarrow c=1. \quad \text{Άρα,}$$

$$\forall z = x+iy \in \mathbb{C},$$

$$f(z) = (x^2 - y^2 + e^{-y} \sin x - e^y \cos x) + i(2xy - e^y \cos x + e^{-y} \sin x + 1).$$

Σχόλιο: Ολοκληρώνοντας την (1) ως

προς y , η σταθερά ολοκλήρωσης εν

γίνει εξαρτάται από το x , γι' αυτό

παιρνουμε την (3) με " $c(x)$ " ή όχι " c ".

Στη συνέχεια προκύπτει ότι $c(x) = c =$

= σταθερά αλλιώς αυτό είναι
συμβαματικό.