ΜΙΓΑΔ. ΣΥΝΑΡΤ. ΣΗΜΜΥ

**ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ** ΜΙΓΑΔ. ΑΝΑΛ. – ΣΕΜΦΕ & ΠΟΛ. ΜΗΧ.

**29/6/2021**

**ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 90′**

**ΘΕΜΑ 1: (i)(1,5 μ.)** Δίνεται η συνάρτηση $u(x,y) = x^3 - 3x^2y - 3xy^2 + y^3,\ \ x, y \in \mathbb{R}$. Να βρείτε ολόμορφη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ώστε $\mathrm{Re}f = u,\ \ f(0) = i$.

**(ii)(1 μ.)** Να προσδιορίσετε τα σημεία $z \in \mathbb{C}$ στα οποία η συνάρτηση $f(z) = \mathrm{Log}\left(\mathrm{Log}z - i\frac{\pi}{2}\right)$ είναι διαφορίσιμη.

**ΘΕΜΑ 2:(1,5 μ.)** Να βρείτε το $\max\limits_{|z|\leq 1} |z^2 + 3z - 1|$, καθώς και τα σημεία για τα οποία το μέγιστο αυτό λαμβάνεται.

**ΘΕΜΑ 3: (4 μ.)** Με αποκλειστική χρήση Μιγαδικής Ανάλυσης, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 16} dx \ (2\ \mu.), \qquad \int_{\gamma} \frac{(e^z - 1)^2}{z^3 \sin z} dz \ (2\ \mu.),$$

όπου $\gamma(t) = 2e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$. [Για το πρώτο ολοκλήρωμα παρατηρήστε ότι $(e^{i\pi/4})^4 = -1$.]

**ΘΕΜΑ 4: (2 μ.)** Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη τέτοια ώστε

$$|f(nz)| \ \leq \ n|f(z)|, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Να δείξετε ότι η $f$ είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ 1.
[*Υπόδειξη*: Να δείξετε ότι $f''(z) = 0,\ \forall\, z \in \mathbb{C}$.]

Θ.2: (i) Έστω $f = u + iv$ η ζητούμενη. ①

Τότε, $v_y \overset{[C-R]}{=} u_x = 3x^2 - 6xy - 3y^2$

$\Rightarrow \underline{v = 3x^2y - 3xy^2 - y^3 + c(x)}$ (1)

$\Rightarrow \underline{v_x = 6xy - 3y^2 + c'(x)}$. (2)

Αλλά $v_x \overset{[C-R]}{=} -u_y = 3x^2 + 6xy - 3y^2$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} \cancel{6xy} - \cancel{3y^2} + c'(x) = 3x^2 + \cancel{6xy} - \cancel{3y^2}$

$\Rightarrow c'(x) = 3x^2 \Rightarrow \underline{c(x) = x^3 + c_1}$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} \underline{v(x,y) = 3x^2y - 3xy^2 - y^3 + x^3 + c_1}$.

Είναι $i = f(0) = u(0,0) + iv(0,0) = ic_1$

$\Rightarrow c_1 = 1$. Άρα,

$f(x+iy) = (x^3 - 3x^2y - 3xy^2 + y^3) +$

$+ i(3x^2y - 3xy^2 - y^3 + x^3 + 1)$,

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

<u>(ii')</u> Η $z \mapsto \mathrm{Log}\, z$ είναι διαφορίσιμη για $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

Επιπλέον, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$,

$$\mathrm{Log}\, z - i\frac{\pi}{2} = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z - i\frac{\pi}{2}$$

$$= \ln|z| + i\left(\mathrm{Arg}\, z - \frac{\pi}{2}\right) =: g(z)$$

Η $z \mapsto f(z) = \mathrm{Log}\,[g(z)]$ δεν είναι διαφορίσιμη για $g(z) \in (-\infty, 0]$ δηλ. όταν

$$\left.\begin{array}{l} \ln|z| \le 0 \\ \mathrm{Arg}\, z = \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \ln|z| \le 0 \\ z = iy, \ y \in [0, \infty) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = iy \\ y \in [0, 1] \end{array}\right. \Leftrightarrow z \in [0, i].$$

Άρα, $f$ διαφορίσιμη για σημεία

$$z \in \mathbb{C} \setminus \left((-\infty, 0] \cup [0, i]\right).$$

**Θ-2:** $\max\limits_{|z|\le 1} |z^2+3z-1| \ \underset{\text{Μέγιστου}]}{\overset{[\text{Αρχή}}{=}} \max\limits_{|z|=1} |z^2+3z-1|.$



Για $|z|=1$, έχουμε $z=e^{i\varphi}$, για κάποιο $\varphi\in(-\pi,\pi]$

$\Rightarrow$ κ' $\bar z = 1/z$

$$|z^2+3z-1| = \left|z\left(z+3-\frac{1}{z}\right)\right| =$$

$$= |z+3-\bar z| = |3+2i\,\mathrm{Im}\,z| = |3+2i\sin\varphi|$$

$$= \sqrt{9+4\sin^2\varphi} \le \sqrt{13}$$ κ' το "=" ισχύει

για $\sin^2\varphi = 1 \Leftrightarrow \varphi = \pm\pi/2 \Leftrightarrow z=\pm i.$

Άρα, $\max\limits_{|z|\le 1} |z^2+3z-1| = \sqrt{13}$ και

λαμβάνεται για $z=\pm i.$

Θ.3. Θέτουμε $f(z) = \frac{z^3 e^{iz}}{z^4+16}$, $\rho = 2e^{i\pi/4} \Rightarrow \rho^4 = -16$. (4)

Οι ρίζες του $z^4+16$ είναι $\pm\rho$, $\pm\bar{\rho}$

ό' $\rho = 2\frac{1+i}{\sqrt{2}} = (1+i)\sqrt{2}$. Μόνο οι $\rho$, $-\bar{\rho}$ έχουν ~~θετικό~~ φανταστικό μέρος

$$\Rightarrow J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{x^4+16} e^{ix} dx = 2\pi i \left[ Res(f,\rho) + Res(f,-\bar{\rho}) \right].$$

$$\forall \alpha \in \{\rho, -\bar{\rho}\}, \quad Res(f,\alpha) = \frac{\alpha^3 e^{i\alpha}}{4\alpha^3} = \frac{1}{4} e^{i\alpha}$$

$$\Rightarrow J = \frac{\pi i}{2}\left(e^{i\rho} + e^{-i\bar{\rho}}\right) = \frac{\pi i}{2}\left(e^{i\rho} + \overline{e^{i\rho}}\right)$$

$$= \pi i \, Re(e^{i\rho})$$

$$i\rho = \sqrt{2}(-1+i)$$

$$\Rightarrow e^{i\rho} = e^{-\sqrt{2}} \left[ \cos(\sqrt{2}) + i \sin(\sqrt{2}) \right]$$

$$\Rightarrow J = \pi i \, e^{-\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{x^4+16} \sin x \, dx = Im(J) = \underline{\pi e^{-\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2})}.$$

Τα ανώμαλα σημεία της $g(z) = \frac{(e^z-1)^2}{z^3 \sin z}$ είναι $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ αλλά μόνο $0 \in int\gamma^* \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_\gamma g(z)dz = 2\pi i \, Res(g, 0).$$

Έχουμε

$$g(z) = \frac{\left(z + z^2/2! + z^3/3! + \cdots\right)^2}{z^3\left(z - z^3/3! + z^5/5! - \cdots\right)}$$

$$= \frac{1}{z^2} \cdot \frac{A(z)^2}{B(z)}, \quad \text{όπου}$$

$A(z) = 1 + z/2! + z^2/3! + \cdots$, $A(0) = 1$, $A'(0) = 1/2$,

$B(z) = 1 - z^2/3! + z^4/5! - \cdots$, $B(0) = 1$, $B'(0) = 0$.

Επειδή $B(0) \neq 0$, η $A^2/B$ είναι ολόμορφη σε περιοχή του $0$ $\Rightarrow$ <u>$0$ = διπλός πόλος της $g$</u>

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(g, 0) = \lim_{z \to 0} \left[z^2 g(z)\right]' = \frac{d}{dz}\left[\frac{A(z)^2}{B(z)}\right]\Bigg|_{z=0} =$$

$$= \frac{2A(0)A'(0)B(0) - A(0)^2 B'(0)}{B(0)^3} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 1/2 \cdot 1}{1^3} = 1$$

$$\Rightarrow \underline{\oint g(z)\,dz = 2\pi i.}$$

~~Θ~~ 4. Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, (6)

$\gamma_n(t) = z_0 + ne^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Ο.Τ. Cauchy $\Rightarrow$ $f''(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\gamma_n} \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^3}\, dz$. (1).

$\forall z \in \gamma_n^*$, $|z| \leq |z - z_0| + |z_0| = n + |z_0|$

$\Rightarrow \quad \left|\dfrac{z}{n}\right| \leq 1 + \dfrac{|z_0|}{n} \leq 1 + |z_0| = \rho_0$

$\Rightarrow \quad |f(z)| = \left|f\left(n \dfrac{z}{n}\right)\right| \overset{[\text{ΥΠΟΘΕΣΗ}]}{\leq} n \left|f\left(\dfrac{z}{n}\right)\right|$

$\leq nM$,

όπου $M = \max\{|f(w)| : |w| \leq \rho_0\}$

$\Rightarrow \quad \left|\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^3}\right| \leq \dfrac{nM}{n^3} = \dfrac{M}{n^2}$, $\forall z \in \gamma_n^*$ (2)

Από (1), (2) ε' ML – ανισότητα, παίρνουμε

$|f''(z_0)| \leq \dfrac{1}{2\pi} 2\pi n \dfrac{M}{n^2} = \dfrac{M}{n}$, $\forall n \geq 1$

$\xrightarrow{(n \to \infty)}$ $f''(z_0) = 0$, $\forall z_0 \in \mathbb{C}$

Άρα, $f''(z)=0, \ \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow f'(z) = c_1 \in \mathbb{C}, \ \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow (f(z) - c_1 z)' = 0, \ \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow f(z) - c_1 z = c_2, \ \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \underline{f(z) = c_1 z + c_2, \ \forall z \in \mathbb{C}}$