Εξ αποστάσεως επί πτυχίω εξέταση στο μάθημα
''Μιγαδική Ανάλυση '' - ''Μιγαδικές συναρτήσεις''
ΣΕΜΦΕ - ΣΗΜΜΥ - ΠΟΛ. ΜΗΧΑΝ., ΕΜΠ
10/02/2021
ΕΝΑΡΞΗ: 15:00 - ΛΗΞΗ ΥΠΟΒΟΛΗΣ: 16:15

–Στο **χειρόγραφο** των λύσεων να γράφετε ονοματεπώνυμο και Α.Μ.

–Να αναρτήσετε ένα ενιαίο αρχείο pdf με σκαναρισμένες **χειρόγραφες** λύσεις στο εργαλείο ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ στο mycourses.

–ΟΝΟΜΑ ΑΡΧΕΙΟΥ: ΤΟ ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΣΑΣ.

ΘΕΜΑ 1 (2 μ.) :
Να προσδιορίσετε ολόμορφη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$\mathrm{Re} f(x,y) = e^{-y}\cos x \; + \; 3x^2 y \; - \; y^3, \; (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(0) = 1 - i.$$

ΘΕΜΑ 2 (2 μ.) : Να δείξετε ότι

$$\max_{|z|\leq 1} |(z-1)(2z+1)| = \frac{9\sqrt{2}}{4} \; .$$

(*Υπόδειξη:* Αρχή Μεγίστου.)

ΘΕΜΑ 3 (3,5 μ.) : Να υπολογίσετε το ολοκληρώματα:

$$(2 \text{ μ.}) \;\; \int_\gamma \frac{e^z - 1}{z^3 \sin z} dz \; , \qquad (1{,}5 \text{ μ.}) \;\; \int_\gamma \frac{1}{1-z} \cos\left(\frac{1}{z}\right) dz,$$

όπου $\gamma(t) = 2e^{it}, \;\; t \in [0, 2\pi]$.

ΘΕΜΑ 4 : Έστω $k \in \mathbb{N}, \; k \geq 1$ και $\gamma(t) = 2e^{it}, \; t \in [0, 2\pi]$.
Να δείξετε ότι:

(i) (0,5 μ.) όλες οι ρίζες της εξίσωσης $z^{k+1} + z + 1 = 0$ βρίσκονται στο εσωτερικό της γ.

(ii) (1 μ.)

$$\lim_{R \to +\infty} \left| \int_{\gamma_R} \frac{z+1}{z(z^{k+1} + z + 1)} dz \right| = 0,$$

όπου $\gamma_R(t) = Re^{it}, \; t \in [0, 2\pi], \; R > 0$.

(iii) (1 μ.) $\displaystyle \int_\gamma \frac{z^k}{z^{k+1} + z + 1} dz = 2\pi i.$

Θ.1. Έστω $f = u + iv$ με

$$u = e^{-y}\cos x + 3x^2 y - y^3.$$

$$\text{C-R} \Rightarrow v_y = u_x = -e^{-y}\sin x + 6xy$$

$$\Longrightarrow v = e^{-y}\sin x + 3xy^2 + c(x) \quad (1)$$

$$\text{C-R} \Rightarrow u_y = -v_x \overset{(1)}{=}$$

$$= -\left(e^{-y}\cos x + 3y^2 + c'(x)\right)$$

$$\Rightarrow -e^{-y}\cos x + 3x^2 - 3y^2 =$$

$$= -e^{-y}\cos x - 3y^2 - c'(x)$$

$$\Rightarrow c'(x) = -3x^2 \Rightarrow \boxed{c(x) = -x^3 + c_1}$$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \boxed{v = e^{-y}\sin x + 3xy^2 - x^3 + c_1} \quad (2).$$

$$1 - i = f(0) = u(0,0) + iv(0,0) = 1 + ic_1$$

$$\longrightarrow c_1 = -1$$

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} \boxed{v = e^{-y}\sin x + 3xy^2 - x^3 - 1}.$$

Θ-2: Θέτουμε $f(z)=(z-1)(2z+1)$.

Από Αρχή Μεγίστου,

$$\max_{|z|\le 1} |f(z)| = \max_{|z|=1} |f(z)|.$$

Για $|z|=1$, έχουμε

$$|z-1|^2 = |z|^2 - 2Re(z) + 1$$
$$= 2[1 - Re(z)],$$

$$|2z+1|^2 = 4|z|^2 + 4Re(z) + 1$$
$$= 5 + 4Re(z).$$

Εάν $|z|=1$, τότε $\exists\, t \in [0, 2\pi] \,|\, z = e^{it} = \cos t + i\sin t$, οπότε

$$|f(z)|^2 = 2(1-\cos t)(5+4\cos t)$$

$$= 2\underbrace{\left(-4\cos^2 t - \cos t + 5\right)}_{g(t)}$$

$$\varphi'(t) = -8\cos t(-\sin t) + \sin t$$

$$= \sin t\,(1 + 8\cos t)$$

$\varphi'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$, ή π, ή 2π ή $\cos t = -1/8$

$\varphi(0) = \varphi(2\pi) = 0$, $\varphi(\pi) = 4$

Για $\cos t = -1/8$, τότε

$$|f(e^{it})|^2 = 2\left(-\frac{4}{64} + \frac{1}{8} + 5\right)$$

$$= 2\left(-\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + 5\right)$$

$$= -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + 10 =$$

$$= \frac{-1+2+80}{8} = \frac{81}{8} > 4$$

$$\Rightarrow \max_{|z|=1} |f(z)| = \sqrt{\frac{81}{8}} = \frac{9}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{9\sqrt{2}}{4}.$$

Θ.3. $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^3 \sin z}$

Ανώμαλα σημεία της f:
$k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Μόνο το $0 \in \operatorname{int} \gamma^*$.

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,0)$$

$\operatorname{Res}(f,0)$:

$$f(z) = \frac{z + z^2/2! + z^3/3! + \cdots}{z^3\left(z - z^3/3! + z^5/5! - \cdots\right)}$$

$$= \frac{z\,\varphi(z)}{z^4\,\psi(z)} = \frac{1}{z^3}\,\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

όπου

$$\varphi(z) = 1 + z/2! + z^2/3! + \cdots,$$

$$\psi(z) = 1 - z^2/3! + z^4/5! - \cdots$$

$\varphi(0)=1$, $\varphi'(0)=1/2$, $\varphi''(0)/2! = \frac{1}{3!}$

$\Rightarrow \varphi''(0) = 1/3$,

$\psi(0)=1$, $\psi'(0)=0$,

$\psi''(0)/2! = -1/3! \Rightarrow \psi''(0) = -1/3$.

Επειδή φ/ψ ολόμορφη σε περιοχή του 0 κ $\varphi(0)\neq 0$, το 0 είναι πόλος τάξης 3 της f

$$\text{Res}(f,0) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left[z^3 f(z)\right]''$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)''\Big|_{z=0}.$$ Αλλά,

$$\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)'' = \left(\frac{\varphi'\psi - \varphi\psi'}{\psi^2}\right)'$$

$$= \frac{(\varphi''\psi - \varphi\psi'')\psi^2 - 2\psi\psi'(\varphi'\psi - \varphi\psi')}{\psi^4}$$

Αλλά, $\varphi(0)=\psi(0)=1,\ \psi'(0)=0,$

$$\Rightarrow \left(\frac{\varphi}{\psi}\right)''\Big|_{z=0} = \varphi''(0)-\psi''(0) = 2/3$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(f,0) = 1/3$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i/3.$$

7

~~Άρα $\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{3} + \frac{1-e^{\pi}}{\pi^3} \dots\right) = 2\pi i\left(\frac{1}{3} + \frac{e^{\pi} - e^{\pi}}{\pi^3}\right)$~~

Θέτουμε $g(z) = \frac{1}{1-z}\cos\left(\frac{1}{z}\right)$.

Ανώμαλα σημεία: $0, 1 \in \operatorname{int}\gamma^*$

$\Rightarrow \oint_\gamma g(z)\,dz = 2\pi i\left[\operatorname{Res}(g,0) + \operatorname{Res}(g,1)\right]$

• Res(g,0)

Για $|z|<1$,

$$\frac{1}{1-z} = 1+z+z^3+z^4+z^5+z^6+\dots,$$

$$\cos\left(\frac{1}{z}\right) = 1 - \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{4!\,z^4} - \frac{1}{6!\,z^6} + \dots$$

Ο συντελεστής του $(1/z)$ στο

ανάπτυγμα της $g(z)$ είναι

$$-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\cdots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}=\cos 1-1$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Res}(g,0)=\cos 1-1.}$$

- $$\operatorname{Res}(g,1)=\left.\frac{\cos(1/z)}{(1-z)'}\right|_{z=1}$$

$$=\boxed{-\cos 1}$$

Άρα, $\int_\gamma g(z)\,dz = 2\pi i(-1)$

$$=\underline{-2\pi i}.$$

(9)

Θ-4. (i) Έστω ότι ρ ρίζα με $|\rho| \geq 2$. Τότε

$$1 + \frac{1}{\rho^k} + \frac{1}{\rho^{k+1}} = 0$$

Επί $\left|1 + \frac{1}{\rho^k} + \frac{1}{\rho^{k+1}}\right| \geq$

$$\geq 1 - \frac{1}{|\rho|^k} - \frac{1}{|\rho|^{k+1}} \geq 1 - \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}} > 0$$

(Άτοπο).

(ii) Για $z \in \gamma_R^*$, έχουμε

$$|z(z^{k+1} + z + 1)| = R|z^{k+1} + z + 1|$$

$$\geq R(|z|^{k+1} - |z| - 1)$$

$$= R(R^{k+1} - R - 1)$$

$$\Rightarrow \left|\frac{z+1}{z(z^{k+1}+z+1)}\right| \leq \frac{R+1}{R(R^{k+1}-R-1)} = M_R$$

$$\Rightarrow \left|\int_{\gamma_R} \frac{z+1}{z(z^{k+1}+z+1)}\,dz\right| \leq 2\pi R M_R =$$

$$= 2\pi \frac{R+1}{R^{k+1} - R - 1}$$

κ' το β' μέλος $\xrightarrow[]{R\to+\infty} 0$.

(iii) $f(z)=\dfrac{z^k}{z^{k+1}+z+1}=\dfrac{z^{k+1}}{z(z^{k+1}+z+1)}$

$=\dfrac{1}{z}\left(1-\dfrac{z+1}{z^{k+1}+z+1}\right)$

$=\dfrac{1}{z}-\dfrac{z+1}{z(z^{k+1}+z+1)}$

Λόγω του (i), $\forall R>2$, η f

είναι ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των

$\gamma^*, \gamma^*_R \xRightarrow[\text{Παραμ.}]{\text{Αρχή}}$

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_{\gamma_R} f(z)\,dz=$$

$$=\underbrace{\int_{\gamma_R}\frac{dz}{z}}_{2\pi i}-\underbrace{\int_{\gamma_R}\frac{z+1}{z(z^{k+1}+z+1)}\,dz}_{\xrightarrow{R\to+\infty\ (ii)}\ 0}$$

$$\Longrightarrow \int_\gamma f(z)\,dz=2\pi i.$$