I. Σειρές μιγαδικών αριθμών

<u>Ορισμός I.1.</u> Για κάθε ακολουθία $(z_n) \subset \mathbb{C}$, θεωρούμε την παράσταση

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots \quad \text{ή} \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

και την ονομάζουμε <u>σειρά</u> με γενικό όρο (z_n).

Η ακολουθία (S_n) με $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$, $n \geq 1$ λέγεται <u>ακολουθία μερικών αθροισμάτων</u> της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

<u>Ορισμός I.2.</u> Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ <u>συγκλίνει</u> ανν $\lim_{n\to\infty} S_n = L \in \mathbb{C}$.

Σ' αυτή την περίπτωση γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = L.$$

Παράδειγμα (Γεωμετρική σειρά):

Για $|z|<1$, $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = 1+z+z^2+\cdots$

$$= \frac{1}{1-z}.$$

Πράγματι: $\forall\, n \geq 1$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$ με $|z|<1$,

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z^{k-1} - \frac{1}{1-z} \right| =$$

$$= \left| 1+z+\cdots+z^{n-1} - \frac{1}{1-z} \right|$$

$$= \left| \frac{1-z^n}{1-z} - \frac{1}{1-z} \right| = \frac{|z|^n}{|1-z|} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Πρόταση Ι.3. Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ συγκλίνουσες σειρές και $\lambda \in \mathbb{C}$.

Τότε, οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n + w_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda z_n)$$

συγκλίνουν και ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n + w_n) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n + \sum_{n=1}^{\infty} w_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda z_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Επιπλέον, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{z_n}$ συγκλίνει

και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{z_n} = \overline{\sum_{n=1}^{\infty} z_n} .$$

Πρόταση I.4. (Κριτήριο απόλυτης σύγκλισης)

Εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει και ισχύει

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| .$$

Πρόταση I.5. (Κριτήριο του λόγου).

Έστω $(z_n) \subset \mathbb{C}$, με $z_n \neq 0$, $\forall n \geq 1$.

- Εάν $\limsup_n \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει (απόλυτα).

- Εάν $\liminf_{n} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| > 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ αποκλίνει.

- Εάν $\liminf_{n} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \leq 1 \leq \limsup_{n} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$,

το κριτήριο <u>δεν</u> αποφαίνεται.

<u>Παράδειγμα</u>

Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ συγκλίνει απόλυτα, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Πράγματι· $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1.$$

<u>Πρόταση I.5. (Κριτήριο Ρίζας)</u>

- Εάν $\limsup_n \sqrt[n]{|z_n|} < 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει απόλυτα.

- Εάν $\liminf_n \sqrt[n]{|z_n|} > 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ αποκλίνει.

- Εάν
$$\liminf_n \sqrt[n]{|z_n|} \leq 1 \leq \limsup_n \sqrt[n]{|z_n|},$$
το κριτήριο <u>δεν</u> αποφαίνεται.

<u>Παράδειγμα:</u> Θεωρούμε τη σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}.$$

$$\sqrt[n]{\left|\frac{z^n}{n^2}\right|} = \frac{|z|}{(\sqrt[n]{n})^2} \xrightarrow{n} |z|.$$

Εάν $|z|<1$ (αντ. $|z|>1$), η σειρά συγκλίνει (αντ. αποκλίνει).

Για $|z|=1$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$

Συνοψίζοντας, η σειρά

- συγκλίνει, για $|z| \leq 1$.
- αποκλίνει, για $|z| > 1$.

Πρόταση I.6: Εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει, τότε $z_n \xrightarrow{n} 0$.

II. Δυναμοσειρές

Ορισμός II.1. Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Δυναμοσειρά με κέντρο z_0 & συντελεστές a_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι η σειρά

$$\boxed{a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.} \quad (1)$$

Θέτουμε $L = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, \infty]$.

Η ακτίνα σύγκλισης της (1) ορίζεται ως:

$$R = \begin{cases} 1/L, & \text{αν } L \in (0, \infty) \\ 0, & \text{αν } L = \infty \\ +\infty, & \text{αν } L = 0 \end{cases}$$

<u>Πρόταση ΙΙ.1.</u> Θεωρούμε τη δυναμοσειρά (1) με ακτίνα σύγκλισης $R \in [0, +\infty]$.

<u>(α)</u> Αν $R = 0$, η (1) <u>αποκλίνει</u>, $\forall z \in \mathbb{C}$.

(β) Αν $R = +\infty$, η (1) <u>συγκλίνει</u>, $\forall z \in \mathbb{C}$.

(γ) Αν $0 < R < +\infty$, τότε η (1)

- συγκλίνει, $\forall z \in D(z_0, R)$
- αποκλίνει, για $|z - z_0| > R$.

Ο δίσκος

$(0 < R < \infty)$ $$D(z_0, R) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R \}$$

λέγεται <u>δίσκος σύγκλισης της (1)</u>.

Για $R = \infty$, ορίζουμε

$$D(z_0, R) = \mathbb{C}.$$

Θεώρημα ΙΙ. 2. (Παραγώγιση δυναμοσειράς)

Έστω $R \in (0, +\infty]$ η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad z \in D(z_0, R).$$

Τότε, η f είναι ολόμορφη στο $D(z_0, R)$ και ισχύει

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}, \quad z \in D(z_0, R).$$

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το παρακάτω

Λήμμα ΙΙ. 3. Έστω $z, h \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $\delta > 0$ με $|h| \leq \delta$. Τότε,

$$\left| (z+h)^n - z^n - n z^{n-1} \cdot h \right| \leq \frac{|h|^2}{\delta^2} (|z| + \delta)^n.$$

Απόδειξη:

Από το Διώνυμο του Νεύτωνα έχουμε

$$\left|(z+h)^n - z^n - nz^{n-1}\cdot h\right| = \left|\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k} z^{n-k}\cdot h^k\right|$$

$$\leq \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}|z|^{n-k}\cdot|h|^k$$

$$= \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}|z|^{n-k}\cdot|h|^2\cdot|h|^{k-2}$$

$$\leq |h|^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}|z|^{n-k}\delta^{k-2}$$

$$= \frac{|h|^2}{\delta^2}\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}|z|^{n-k}\cdot\delta^{k}$$

$$\leq \frac{|h|^2}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|z|^{n-k}\cdot\delta^{k}$$

$$= \frac{|h|^2}{\delta^2}(|z|+\delta)^n.$$

$\boxtimes$

Απόδειξη του Θ. ΙΙ. 2:

Θέτουμε

$$\boxed{g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}.} \quad (2)$$

Είναι $\limsup_n \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$ (αφού $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$), οπότε η ακτίνα σύγκλισης της (2) είναι

$$\frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}} = R.$$

Άρα, η g που δίνεται από την (2) ορίζεται για $z \in D(z_0, R)$.

• Υποθέτουμε ότι $z_0 = 0$. Τότε,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1},$$

για $|z| < R$.

Έστω $z \in D(z_0, R)$. Επιλέγουμε $\delta > 0$ με

$$0 < \delta < R - |z|, \text{ για } R < \infty$$

κ' $\delta > 0$ τυχαίο, για $R = \infty$.

Έστω $h \in \mathbb{C}$ με
$$0 < |h| < \delta.$$

Έχουμε

$$f(z+h) - f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[(z+h)^n - z^n \right]$$

$$\Rightarrow f(z+h) - f(z) - h g(z) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[(z+h)^n - z^n - n z^{n-1} \cdot h \right]$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left[(z+h)^n - z^n - n z^{n-1} h \right]$$

$$\Rightarrow | f(z+h) - f(z) - h g(z) | \leq$$

$$\leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \cdot \left| (z+h)^n - z^n - n z^{n-1} \cdot h \right|$$

(Λήμμα II.3)

$\Longrightarrow$

$$\left|f(z+h)-f(z)-hg(z)\right| \leq$$

$$\leq \frac{|h|^2}{\delta^2}\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\cdot(|z|+\delta)^n$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-g(z)\right| \leq$$

$$\leq \frac{|h|}{\delta^2}\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\cdot(|z|+\delta)^n.$$

Αλλά, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ είναι R, ενώ $|z|+\delta<R$

$$\Longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty}|a_n|(|z|+\delta)^n = M < \infty$$

Έχουμε λοιπόν ότι για $0<|h|<\delta$,

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-g(z)\right| \leq \frac{M}{\delta^2}|h|$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = g(z)$$

$\Rightarrow$ f διαφορίσιμη στο z κ'

$$f'(z) = g(z), \quad \forall z \in D(0,R).$$

• <u>Γενική περίπτωση: $z_0 \in \mathbb{C}$.</u>

Εφαρμόζουμε την προηγούμενη περίπτωση για τη συνάρτηση

$$\tilde{f}(w) = f(w+z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n, \quad |w|<R$$

κ' παίρνουμε

$$f'(w+z_0) = \tilde{f}'(w) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1}, \quad \text{για } |w|<R.$$

Άρα, για $|z-z_0|<R$, θέτοντας $w=z-z_0$, παίρνουμε

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}. \quad \boxtimes$$

<u>Πόρισμα ΙΙ.4.</u> Έστω η δυναμοσειρά

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad z\in D(z_0,R)$$

$(0<R\leq\infty)$.

Τότε, υπάρχουν όλων των τάξεων παράγωγοι $f', f'', \dots, f^{(k)}, \dots,\ k\geq 1$ και ισχύει $\forall k\geq 1$,

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k},$$

για $z\in D(z_0,R)$.

Επιπλέον,

$$a_k=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

<u>Απόδειξη:</u>

Η απόδειξη του α' σκέλους γίνεται με επαγωγή στο k, με χρήση του Θ. ΙΙ.2.

Για το β' σκέλος έχουμε, $\forall k\geq 1$,

$$f^{(k)}(z_0)=k(k-1)\dots 1\cdot a_k = k!\,a_k,$$

ενώ προφανώς $f(z_0)=a_0$. $\boxtimes$

III. Ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθιών κ' σειρών συναρτήσεων.

<u>Ορισμός III. 1.</u> Έστω $K \subseteq \mathbb{C}$ και μια ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n : K \to \mathbb{C}, \ n \geq 1.$$

Έστω και $f : K \to \mathbb{C}$ συνάρτηση.

Θα λέμε ότι

<u>$f_n \to f$ ομοιόμορφα στο K</u>

ανν $\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \ \forall z \in K,$

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

<u>Πρόταση III. 2:</u> Έστω γ τμ. λεία καμπύλη κ' $f_n : \gamma^* \to \mathbb{C}$, $n \geq 1$, $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχείς με $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο γ^*.

Τότε,
$$\lim_n \int_\gamma f_n(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\varepsilon>0$. Επειδή $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο γ^*,

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ \forall z \in \gamma^*,$

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/\|\gamma\|,$$

όπου $\|\gamma\| =$ μήκος(γ). Τότε, $\forall n \geq n_0$,

$$\left|\int_\gamma f_n(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_\gamma [f_n(z) - f(z)]\,dz\right|$$

$$\overset{\text{(ML-ανισ.)}}{\leq} \frac{\varepsilon}{\|\gamma\|}\cdot\|\gamma\| = \varepsilon. \qquad \boxtimes$$

<u>Πρόταση III.3</u>: Έστω γ τμ. λεία καμπύλη κ' $f_n : \gamma^* \to \mathbb{C}$, $n \geq 1$, συνεχείς, ώστε

$$|f_n(z)| \leq \theta_n,\ z \in \gamma^*,\ n \geq 1,$$

όπου $(\theta_n) \subset (0, +\infty)$ με

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n < \infty.$$

Τότε,

$$\int_\gamma \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right] dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz.$$

Απόδειξη: Θέτουμε

$$g_n(z) = \sum_{j=1}^{n} f_j(z), \quad n \geq 1, \ z \in \gamma^*,$$

$$g(z) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(z), \quad z \in \gamma^*.$$

Η $g : \gamma^* \to \mathbb{C}$ ορίζεται καλώς, αφού

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(z)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j < \infty, \quad \forall z \in \gamma^*.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\sum_{j=1}^{\infty} \theta_j < \infty$,

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \ \Big| \ \sum_{j>N} \theta_j < \varepsilon.$$

Τότε, $\forall\, n \geq N$, $\forall\, z \in \gamma^*$,

$$|g_n(z) - g(z)| = \Big| \sum_{j>n} f_j(z) \Big| \leq$$

$$\leq \sum_{j>n} |f_j(z)| \leq \sum_{j>n} \theta_j \leq \sum_{j>N} \theta_j < \varepsilon.$$

Άρα,

$$\underline{g_n \to g \text{ ομοιόμορφα στο } \gamma^*.}$$

Επιπλέον, η g είναι συνεχής.

Πράγματι· έστω $z_0 \in \gamma^*$, $\varepsilon > 0$.

Επιλέγουμε $N \in \mathbb{N} \mid N \geq 1$ και

$$\underline{|g_N(z) - g(z)| < \varepsilon/3, \ \forall z \in \gamma^*}$$

(σημ. ότι $g_n \to g$ ομοιόμορφα στο γ^*)

Επειδή g_N συνεχής στο z_0,

$\exists \delta > 0 \mid \underline{\forall z \in \gamma^* \text{ με } |z - z_0| < \delta},$

ισχύει $\underline{|g_N(z) - g_N(z_0)| < \varepsilon/3}.$

Τότε, για $z \in \gamma^*$ με $|z - z_0| < \delta$,

$$|g(z) - g(z_0)| \leq |g(z) - g_N(z)| +$$
$$+ |g_N(z) - g_N(z_0)| + |g_N(z_0) - g(z_0)|$$
$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Από Πρότ. ΙΙΙ. 2,

$$\lim_n \int_\gamma g_n(z)\,dz = \int_\gamma g(z)\,dz. \ \boxtimes$$

ΘΕΩΡΗΜΑ TAYLOR
ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ CAUCHY
ΓΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

Πρόταση 1: Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$,

$0<r<R\leq\infty$ και f ολόμορφη στον δίσκο $D(z_0, R)$.

Εάν $|z-z_0|<r$, τότε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

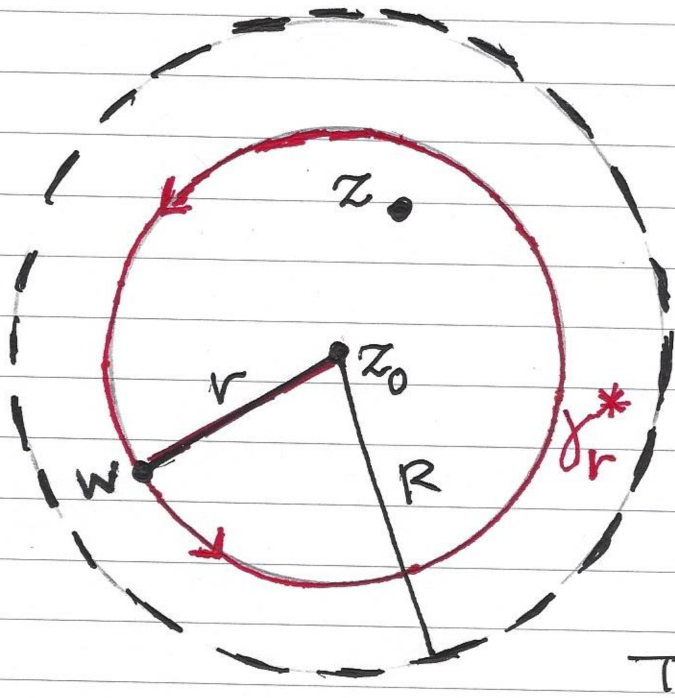
όπου

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw, \quad n\in\mathbb{N},$$

$$\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}, \quad t\in[0,2\pi].$$

Απόδειξη:

$\longrightarrow$



$\gamma_r^* \subset D(z_0, R)$

$|z - z_0| < r$

$\Longrightarrow \quad z \in \operatorname{int}\gamma_r^*.$

Από Ολοκληρωτικό Τύπο του Cauchy παίρνουμε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)\left(1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}\right)}\, dw.$$

$\forall w \in \gamma_r^*$, έχουμε $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{r} < 1$

$$\xrightarrow[\text{Σειρά}]{\text{Γεωμετρ.}} \quad \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^n}$$

$$\Longrightarrow \frac{f(w)}{(w-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n.$$

Αλλά, $\forall\, w \in \gamma_r^*$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n \right| =$$

$$= \frac{|f(w)|}{r^{n+1}} |z-z_0|^n$$

$$\leq \frac{M_r}{r} \left| \frac{z-z_0}{r} \right|^n,$$

όπου $M_r = \max\limits_{w \in \gamma_r^*} |f(w)|$.

Όμως,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z-z_0}{r} \right|^n < \infty,$$

αφού $\left| \frac{z-z_0}{r} \right| < 1$.

Από την Πρότ. III.3 του αρχείου

ΣΕΙΡΕΣ–ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ ΜΙΓΑΔ. ΑΡΙΘΜ.

παίρνουμε

$$\int_{\gamma_r}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\right]dw =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right](z-z_0)^n$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-z}dw = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right](z-z_0)^n$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-z}dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right](z-z_0)^n.$$

$\boxtimes$

Θεώρημα 2 (Taylor)

Έστω $0 < R \leq \infty$ και f ολόμορφη στο δίσκο $D(z_0, R)$ $(z_0 \in \mathbb{C})$.

Τότε, υπάρχουν όλων των τάξεων οι παράγωγοι

$$f', f'', \dots, f^{(k)}, \dots, \quad k \in \mathbb{N},$$

στον $D(z_0, R)$ και

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

$\forall\ z \in D(z_0, R)$.

Επιπλέον, αν $0 < r < R$,

$$\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

τότε

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw,$$

$n \in \mathbb{N}$.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $0<r<R$

και $\gamma_r(t)=z_0+re^{it},\ t\in[0,2\pi]$.

Θέτουμε $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw,\ n\in\mathbb{N}$.

Θα δ.ο.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\ \forall z\in D(z_0,R).$$

→ Εάν $|z-z_0|<r$, το συμπέρασμα έπεται από την Πρόταση 1.

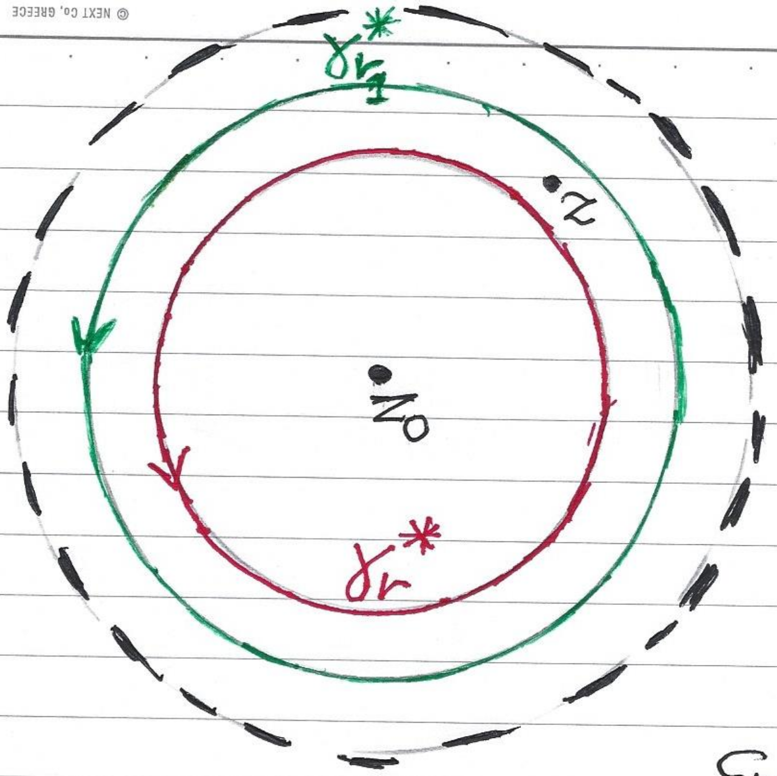
→ Έστω $r\le|z-z_0|<R$.

Επιλέγουμε $r_1>0$ με

$$|z-z_0|<r_1<R$$

και θέτουμε

$$\gamma_{r_1}(t)=z_0+r_1e^{it},\ t\in[0,2\pi].$$



λόγω της Πρότ. 1, ισχύει

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

όπου

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw,$$

$n\in\mathbb{N}$.

Η συνάρτηση $w \mapsto \dfrac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}$ είναι ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των $\gamma^*_{r_1}$, γ^*_r, οπότε από την Αρχή Παραμόρφωσης παίρνουμε

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw=a_n,$$

$n\in\mathbb{N}$.

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n ,$$

$$\forall z \in D(z_0, R).$$

Από το **Πόρισμα II.4** του αρχείου

"ΣΕΙΡΕΣ- ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ- ΜΙΓΑΔ. ΑΡΙΘΜ.",

παίρνουμε ότι υπάρχουν όλων των τάξεων οι παράγωγοι

$$f^{(k)}, \quad k \in \mathbb{N}$$

στον δίσκο $D(z_0, R)$ και

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}$$

(ή)

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw ,$$

$$k \in \mathbb{N}.$$

$\boxtimes$

<u>Πόρισμα 3:</u> Εάν f ακέραια, δηλ. $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ολόμορφη, τότε $\forall\, z_0, z\in\mathbb{C}$,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

<u>Απόδειξη:</u> Είναι $\mathbb{C}=D(z_0,R)$ για $R=\infty$.

Το συμπέρασμα έπεται από το Θ.2. $\boxtimes$

<u>Πρόταση 4:</u> Έστω $U\subseteq\mathbb{C}$ <u>ανοικτό</u> κ' $f\in\mathcal{H}(U)$. Τότε, υπάρχουν όλων των τάξεων οι παράγωγοι $f^{(n)}$, $n\in\mathbb{N}$ και είναι όλες ολόμορφες στο U.

<u>Απόδειξη:</u>

<u>Ισχυρισμός:</u> $\forall g\in\mathcal{H}(U)$, ισχύει $g'\in\mathcal{H}(U)$.

[Πράγματι· έστω $z_0\in U\Rightarrow\exists\, R\in(0,\infty)\,/$

$$D(z_0,R)\subset U$$

$\xRightarrow{\Theta.2}$ $\exists$ η g'' στον $D(z_0,R)$

$\Longrightarrow$ g' διαφορίσιμη στο z_0.]

Τώρα, λόγω του Ισχυρισμού παίρνουμε

$f' \in \mathcal{H}(U) \xRightarrow{\text{(Ισχυρισμός)}}$

$\Rightarrow f'' \in \mathcal{H}(U)$

$\xRightarrow{\text{Ισχυρ.}} f''' \in \mathcal{H}(U)$

κ.ο.κ.

$\boxtimes$

Πρόταση 5 (ολοκλ. τύποι Cauchy για παραγώγους):

Έστω $\gamma \in \mathcal{C}_+$ με

εσωτερικό $U = \operatorname{int}\gamma^*$ κ'

$$f : U \cup \gamma^* \to \mathbb{C}$$

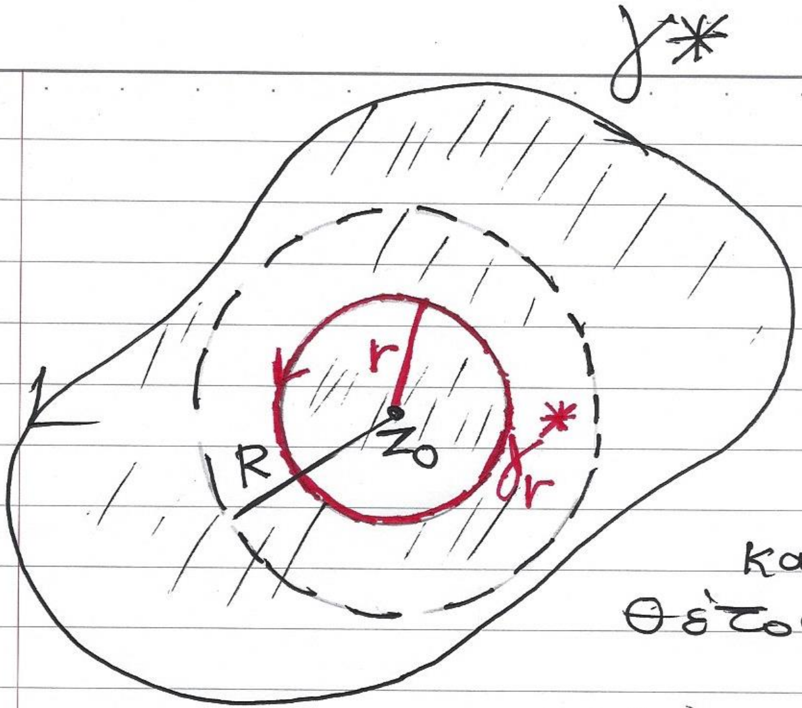
με $f|_U \in \mathcal{H}(U)$, $f|_{\gamma^*}$ συνεχής.

Εάν $z_0 \in U$, τότε

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη:

$\longrightarrow$



Επιλέγουμε $R \in (0,\infty) \mid D(z_0,R) \subset U$ και $r \in (0,R)$. Θέτουμε

$$\gamma_r(t) = z_0 + re^{it},\ t \in [0,2\pi].$$

Λόγω του Θ. 2, $\exists$ οι παράγωγοι όλων των τάξεων στον $D(z_0,R)$ και ισχύει

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw,$$

$n \in \mathbb{N}$.

Αλλά, η συνάρτηση

$$w \longmapsto \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}$$

είναι ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των γ^*, γ_r^* $\xRightarrow{\text{Αρχή Παραμόρφ.}}$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw,$$

$n \in \mathbb{N}$.

$\boxtimes$

Σειρές Taylor γύρω από το $z_0=0$ βασικών συναρτήσεων

I. $f(z)=e^z,\ z\in\mathbb{C}$. Η f είναι ολόμορφη σε όλο το $\mathbb{C}$ $\xrightarrow[(\Theta.\text{Taylor})]{\Theta.2}$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n,\quad \forall z\in\mathbb{C}$$

$$\Longrightarrow \boxed{e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\qquad z\in\mathbb{C}.}$$

II. $f(z)=\sin z,\quad z\in\mathbb{C}$.

$\forall z\in\mathbb{C}$,

$$f(z)=\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)=$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n!}i^n z^n$$

$$=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)!}i^{2n+1}\cdot z^{2n+1}$$

$$= \frac{1}{i}\, i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad z \in \mathbb{C}.}$$

$$= z - z^3/3! + z^5/5! - z^7/7! + \cdots$$

III. $f(z) = \cos z, \quad z \in \mathbb{C}.$

$\forall z \in \mathbb{C},$

$$\cos z = (\sin z)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(z^{2n+1}\right)' =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2n+1) z^{2n}$$

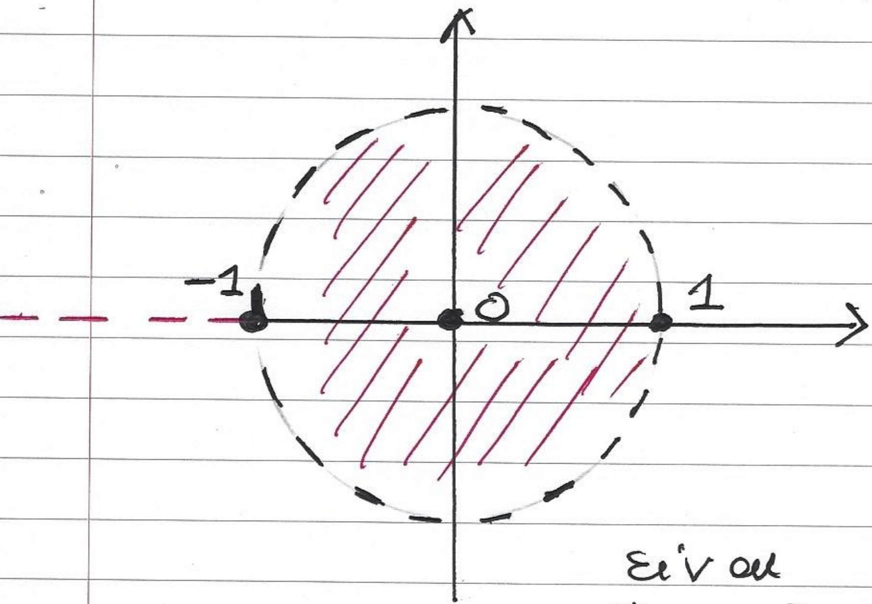
$$\Longrightarrow \boxed{\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad z \in \mathbb{C}.}$$

$$= 1 - z^2/2! + z^4/4! - z^6/6! + \cdots$$

IV. $f(z) = \mathrm{Log}(1+z), \quad z \neq -1.$

Η f είναι ολόμορφη στο πεδίο

$$U = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1].$$



Ο μεγαλύτερος ανοικτός δίσκος κέντρου 0 που περιέχεται στο U είναι ο

$$D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

Επομένως, ο $D(0,1)$ είναι ο μεγαλύτερος ανοικτός δίσκος πάνω στον οποίο η f έχει ανάπτυγμα Taylor γύρω από το 0.

$$\forall z \in D(0,1), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

$\forall z \in D(0,1), \quad f'(z) = \frac{1}{1+z},$

$$f''(z) = -\frac{1}{(1+z)^2},$$

$$f'''(z) = \frac{1\cdot 2}{(1+z)^3},$$

$$f^{(4)}(z) = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+z)^4}$$

κ.ο.κ.

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι

$\forall n \geq 1, \quad f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(1+z)^n}$

$\Longrightarrow \forall n \geq 1, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

$\Longrightarrow \forall n \geq 1, \quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$

Εφ' όσον $f(0)=0$, παίρνουμε

$$\boxed{\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n, \quad |z|<1.}$$

$= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots$

Ασκήσεις:

(1) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma_R} \frac{\bar{z} e^z}{z}\, dz, \text{ όπου } \gamma_R(t) = Re^{it}, \; t \in [0, 2\pi] \; (R > 0).$$

Λύση: $\forall z \in \gamma_R^*$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = R^2$

$$\Longrightarrow \bar{z} = \frac{R^2}{z}$$

$$\Longrightarrow \int_{\gamma_R} \frac{\bar{z} e^z}{z}\, dz = R^2 \int_{\gamma_R} \frac{e^z}{z^2}\, dz =$$

$$= R^2 \cdot 2\pi i \left(e^z\right)'\Big|_{z=0} = 2\pi i R^2.$$

(2) Να υπολογίσετε το $\int_{\gamma} f(z)\, dz$,

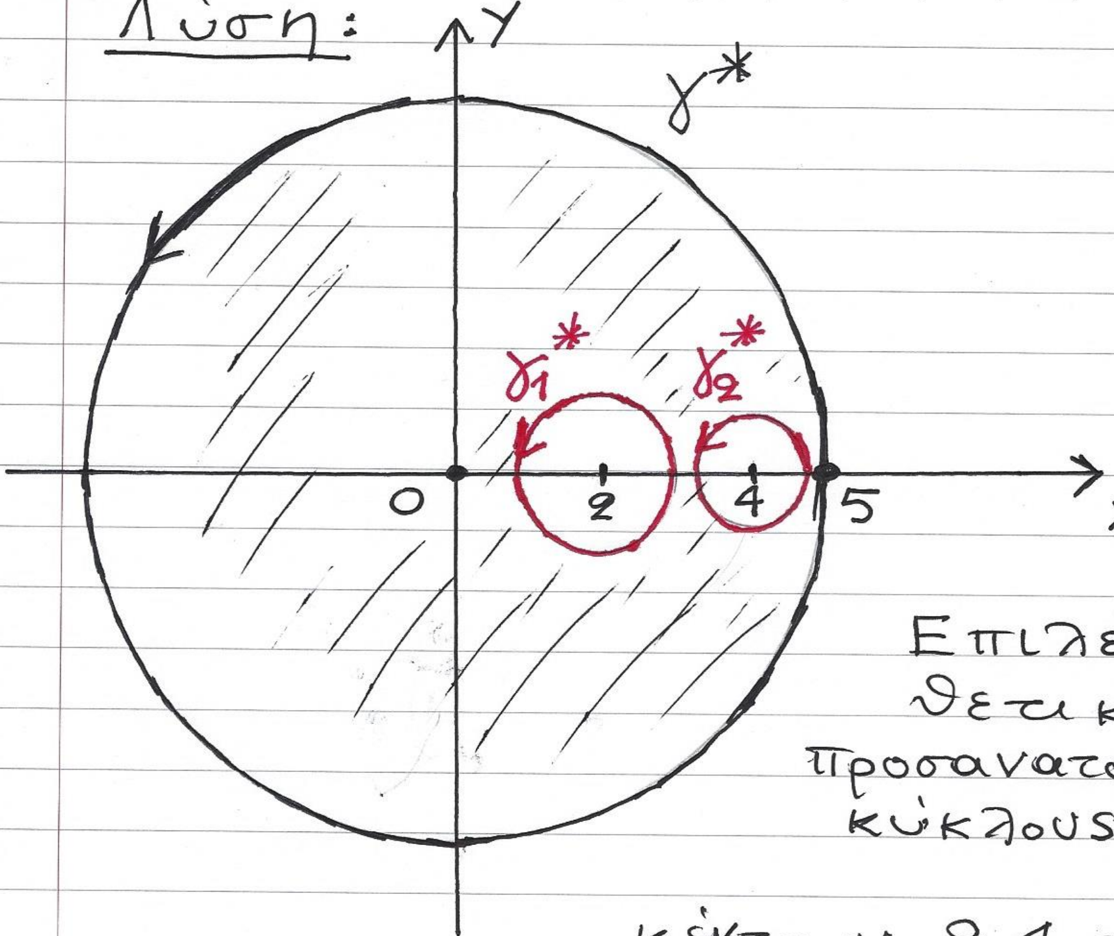
όπου

$$f(z) = \frac{\sin(\pi z)}{(z-2)^2 (z-4)}$$

και

$$\gamma(t) = 5e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Λύση:



Επιλέγουμε θετικά προσανατολισμένους κύκλους γ_1, γ_2 κέντρων 2, 4 αντίστοιχα ώστε

$$\gamma_1^* \cap \gamma_2^* = \emptyset, \quad \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \subset \operatorname{int}\gamma^*.$$

Η f είναι ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των $\gamma^*, \gamma_1^*, \gamma_2^*$

$$\xrightarrow[\text{Παραμ.}]{\text{Αρχή}} \quad \int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

Έχουμε

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{\frac{\sin(\pi z)}{z-4}}{(z-2)^2}\,dz =$$

$$= 2\pi i \left[\frac{\sin(\pi z)}{z-4}\right]'\Big|_{z=2}$$

$$= 2\pi i \left.\frac{\pi\cos(\pi z)(z-4)-\sin(\pi z)}{(z-4)^2}\right|_{z=2}$$

$$= 2\pi i \, \frac{\pi\cos(2\pi)(-2)-\sin(2\pi)}{(-2)^2}$$

$$= 2\pi i \, \frac{(-2\pi)}{4} = -\pi^2 i,$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} \frac{\frac{\sin(\pi z)}{(z-2)^2}}{z-4}\,dz =$$

$$= 2\pi i \left[\frac{\sin(\pi z)}{(z-2)^2}\right]\Big|_{z=4}$$

$$= 2\pi i \, \frac{0}{4} = 0.$$

Άρα, $\int_{\gamma} f(z)\,dz = -\pi^2 i + 0 = -\pi^2 i.$

(3) Έστω $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με

$$|f(z)| \leq a|z| + b, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

όπου $a, b > 0$.

Να δείξετε ότι:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall R > 0$,

$$|f^{(n)}(0)| \leq n! \, \frac{aR+b}{R^n}$$

(ii) $\exists \; A, B \in \mathbb{C}$ ώστε

$$f(z) = Az + B, \; \forall z \in \mathbb{C}, \; |A| \leq a, \; |B| \leq b.$$

Λύση:

(i) Έστω $n \in \mathbb{N}$, $R > 0$, $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Τότε,

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz.$$

(Σημ. ότι f ολόμορφη στο $\mathbb{C}$!)

Αλλά, $\forall z \in \gamma_R^*$,

$$\left| \frac{f(z)}{z^{n+1}} \right| \leq \frac{a|z|+b}{R^{n+1}} = \frac{aR+b}{R^{n+1}}$$

$$\xrightarrow[\text{ανισ.}]{ML} \quad |f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{\cancel{2\pi}} \cancel{2\pi} R \, \frac{aR+b}{R^{n+1}}$$

$$= n! \, \frac{aR+b}{R^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall R>0.$$

(ii) Έστω $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$. Τότε,

$\forall R>0$, $$|f^{(n)}(0)| \overset{(i)}{\leq} n! \, \frac{aR+b}{R^n} \xrightarrow{R \to +\infty} 0$$

$$\Longrightarrow f^{(n)}(0) = 0, \quad \forall n \geq 2.$$

Επειδή f ολόμορφη σε όλο το $\mathbb{C}$,

το Θ. Taylor δίνει ότι $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

$$= f(0) + f'(0) z.$$

$\forall R>0$, $$|f(0)| \overset{(i)}{\leq} aR+b \xrightarrow{R \to 0^+} b$$

οπότε $\underline{|f(0)| \leq b}$.

Επιπλέον, $\forall R>0$,

$$|f'(0)| \leq \frac{aR+b}{R} \xrightarrow{R\to+\infty} a$$

οπότε $\underline{|f'(0)| \leq a}$.

Θέτουμε $A=f'(0)$, $B=f(0)$.

(4) Δίνεται ολόμορφη συνάρτηση

$f: D(0,1) \to D(0,1)$, όπου
$D(0,1) = \{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$.

Να δείξετε ότι

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}, \quad |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-|z|)^2},$$

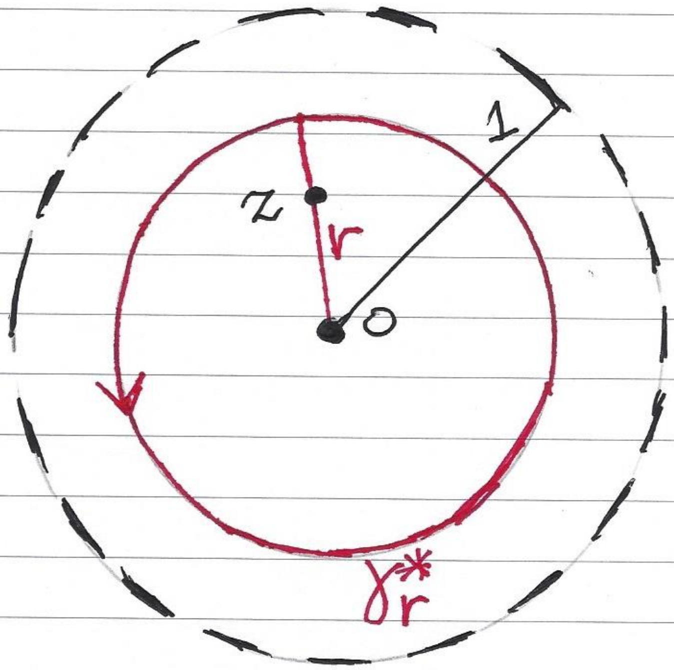
$\forall z \in D(0,1)$.

<u>Λύση</u>: Έστω $z\in D(0,1)$. Επιλέγουμε $r>0$ με $|z|<r<1$ κ' θέτουμε

$$\gamma_r(t) = re^{it}, \quad t\in[0,2\pi].$$

Τότε, $z \in \operatorname{int}\gamma_r^*$ και

$$\gamma_r^* \subset D(0,1).$$



Από τους ολοκλ. τύπους Cauchy παίρνουμε

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-z}\,dw,$$

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw.$$

$\forall\, w\in\gamma_r^*$, $\quad |f(w)|<1$ και

$$|w-z|\geq |w|-|z|=r-|z|$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{f(w)}{w-z}\right|<\dfrac{1}{r-|z|}, \\ \left|\dfrac{f(w)}{(w-z)^2}\right|\leq\dfrac{1}{(r-|z|)^2} \end{cases}$$

ML-ανισ.

$$\Longrightarrow \begin{cases} |f(z)|\leq\dfrac{1}{2\pi}\,2\pi r\,\dfrac{1}{r-|z|}=\dfrac{r}{r-|z|}, \\ |f'(z)|\leq\dfrac{r}{(r-|z|)^2}. \end{cases}$$

Οι παραπάνω ανισότητες ισχύουν $\forall r$ τ.ω. με $|z| < r < 1$.

Παίρνοντας το όριο καθώς $r \to 1$, προκύπτει ότι

$$|f(z)| \le \frac{1}{1-|z|}, \quad |f'(z)| \le \frac{1}{(1-|z|)^2}$$

(5) Να βρείτε τη σειρά Taylor της συνάρτησης $f(z) = \dfrac{z^2+z}{(z-1)^2}$, γύρω από το σημείο $z_0 = -1$.

<u>Λύση:</u> Θέτω $w = z - z_0 = z+1$

$\Longrightarrow \quad z = w - 1$, οπότε

$$f(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^2} = \frac{(w-1)w}{(w-2)^2}$$

$$= \frac{w^2 - w}{w^2 - 4w + 4} =$$

$$= \frac{w^2 - 4w + 4 + 3w - 4}{w^2 - 4w + 4}$$

$$= 1 + \frac{3w-4}{(w-2)^2} = 1 + \frac{3(w-2)+2}{(w-2)^2}$$

$$= 1 + \frac{3}{w-2} + \frac{2}{(w-2)^2}.$$

Έχουμε

$$\frac{1}{w-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{w}{2}} \quad \underline{\underline{\text{για } \left|\frac{w}{2}\right|<1}}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{2^{n+1}},$$

$$\frac{1}{(w-2)^2} = -\left(\frac{1}{w-2}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,w^{n-1}}{2^{n+1}}$$

για $\left|\frac{w}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |z+1| < 2,$

οπότε

$$f(z) = 1 - 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+1}} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z+1)^{n-1}}{2^{n+1}}$$

$$= 1 - 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z+1)^{n-1}}{2^n}$$

$$= 1 - 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(z+1)^n}{2^{n+1}}$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-2)(z+1)^n}{2^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{2^{n+1}} (z+1)^n,$$

για $|z+1| < 2$.

(6) Να δείξετε ότι $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z| e^{|z|}.$$

<u>Λύση:</u> $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$e^z - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \implies$$

$$\implies |e^z - 1| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|} - 1$$

και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = |z| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{n-1}}{n!} =$$

$$= |z| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{(n+1)!} \leq |z| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$$

$$= |z| e^{|z|}.$$

Άρα, $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z| e^{|z|}.$$

(7) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-i)^n}{n \cdot 3^n}.$$

Λύση: Έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-i)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (i-2)^n}{n \cdot 3^n} =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{i-2}{3}\right)^n.$$

Είναι $|i-2|^2 = 1 + 4 = 5 < 9$

$$\Longrightarrow \left|\frac{i-2}{3}\right| < 1, \text{ οπότε}$$

το παραπάνω άθροισμα ισούται με

$$-\operatorname{Log}\left(1+\frac{i-2}{3}\right)=-\operatorname{Log}\left(\frac{i+1}{3}\right)$$

$$=-\operatorname{Log}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}e^{i\pi/4}\right)$$

$$=-\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)-i\frac{\pi}{4}.$$

(8) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} n r^n \cos(n\theta), \text{ για } 0<r<1,\ \theta\in\mathbb{R}.$$

Λύση: Για $|z|<1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z\sum_{n=1}^{\infty}(z^n)' =$$

$$= z\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right)' = z\left(\frac{1}{1-z}-1\right)'$$

$$= \frac{z}{(1-z)^2}.$$ Για $z=re^{i\theta}$,

έχουμε $|z|=r<1$, οπότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} n r^n e^{in\theta} = \frac{re^{i\theta}}{(1-re^{i\theta})^2}=$$

$$= \frac{re^{i\theta}(1-re^{-i\theta})^2}{|1-re^{i\theta}|^4}$$

$$= \frac{r}{|1-re^{i\theta}|^4} e^{i\theta}(1+r^2e^{-2i\theta}-2re^{-i\theta})$$

$$= \frac{r}{|1-re^{i\theta}|^4}(e^{i\theta}+r^2e^{-i\theta}-2r)$$

$$= \frac{r}{|1-re^{i\theta}|^4}\Big[(1+r^2)\cos\theta-2r+ \\ + i(1-r^2)\sin\theta\Big]$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} nr^n\cos(n\theta) =$$

$$= \frac{r\left[(1+r^2)\cos\theta-2r\right]}{|1-re^{i\theta}|^4}.$$

$$= \frac{r\left[(1+r^2)\cos\theta-2r\right]}{\left[(1-r\cos\theta)^2+r^2\sin^2\theta\right]^2}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ LIOUVILLE

Θεώρημα 1 (Liouville) Έστω f ακέραια συνάρτηση, δηλ. f ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και φραγμένη, δηλ. $\exists M>0$ ώστε

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Τότε, f σταθερή.

Απόδειξη: Έστω $n \geq 1$, $R>0$,

$$\gamma_R(t) = Re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Από ολοκλ. τύπους Cauchy για παραγώγους παίρνουμε

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz.$$

Αλλά, $\forall z \in \gamma_R^*$, $\left|\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right| \leq \frac{M}{R^{n+1}}$

$\xRightarrow{\text{(ML-ανισ.)}}$ $|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{2\pi}\, 2\pi R \frac{M}{R^{n+1}} = \frac{n!M}{R^n}.$

Η τελευταία ισχύει $\forall R>0$ κ' $\frac{n!M}{R^n} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0.$

$\Longrightarrow f^{(n)}(0) = 0, \quad \forall n \geq 1$

$\xRightarrow{\text{Θ. Taylor}}$ $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$

$$= f(0). \quad \boxtimes$$

<u>Σχόλιο:</u> Δεν υπάρχει ανάλογο του Θ. Liouville για διαφορίσιμες πραγματικές συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Π.χ.

$$f(x) = \sin x, \; x \in \mathbb{R}, \; |f(x)| \leq 1, \; \forall x \in \mathbb{R}$$

αλλά f μη σταθερή.

Ασκήσεις:

(1) Έστω $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια ώστε η $u = \mathrm{Re} f$ να είναι φραγμένη άνω. Τότε, f σταθερή.

<u>Λύση:</u> Έστω $M > 0$ ώστε

$$\mathrm{Re} f(z) \leq M, \; \forall z \in \mathbb{C}.$$

Θέτω $g = e^{f}$. Τότε, g ακέραια και

$$\forall z \in \mathbb{C}, \; |g(z)| = e^{\mathrm{Re} f(z)} \leq e^{M}.$$

$\xrightarrow{\text{Θ. Liouville}}$ $g =$ σταθερά

$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}, \; 0 = g'(z) = f'(z) e^{f(z)} \Rightarrow f'(z) = 0$

$\Rightarrow f =$ σταθερή.

(2) Έστω $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια μη σταθερή & $a \in \mathbb{C}$. Τότε, $\forall \varepsilon > 0, \; \exists z \in \mathbb{C} \,|\, |f(z) - a| < \varepsilon$.

<u>Λύση:</u> Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει. Τότε,

$$\exists \varepsilon > 0 \,|\, \forall z \in \mathbb{C}, \; |f(z) - a| \geq \varepsilon.$$

Θέτουμε
$$g(z)=\frac{1}{f(z)-a},\quad z\in\mathbb{C}.$$
Τότε, g ακέραια και $|g(z)|\le 1/\varepsilon$, $\forall z\in\mathbb{C}$

$\Rightarrow g=$ σταθερή $\Rightarrow \dots f=$ σταθερή (ΑΤΟΠΟ)

(3) Έστω $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ακέραια ώστε
$$f(z)\neq 0,\ \forall z\in\mathbb{C} \text{ και } \lim_{|z|\to\infty}|f(z)|=\ell>0.$$
Να δ.ο. f σταθερή.

<u>Λύση:</u> $\exists R>0 \mid \forall z\in\mathbb{C}$ με $|z|>R$, ισχύει
$$|f(z)|>\ell/2$$
$$\Rightarrow \frac{1}{|f(z)|}<2/\ell.$$
Θέτουμε $g=1/f \Rightarrow g$ ακέραια.

Επειδή g <u>συνεχής</u> στο <u>κλειστό</u> και <u>φραγμένο</u> σύνολο $D[0,R]=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|\le R\}$, $\exists M>0 \mid$
$$\forall |z|\le R,\quad |g(z)|\le M.$$
Τελικά, $\forall z\in\mathbb{C}$,
$$|g(z)|\le \max\{M, 2/\ell\}$$
$\overset{(\Theta.\ \text{Liouville})}{\Longrightarrow} g=$ σταθερή $\Rightarrow f=$ σταθερή.

(1)

Θ. Laurent

Προπαρασκευαστικά λήμματα

Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$, $r>0$, $\gamma_r(t)=z_0+re^{it}$, $t\in[0,2\pi]$

κ'

$$f:\gamma_r^* \to \mathbb{C} \text{ συνεχής.}$$

Θέτουμε

$$\varphi_k(w)=\frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}},\ w\in\gamma_r^*,\quad k\in\mathbb{Z}$$

κ'

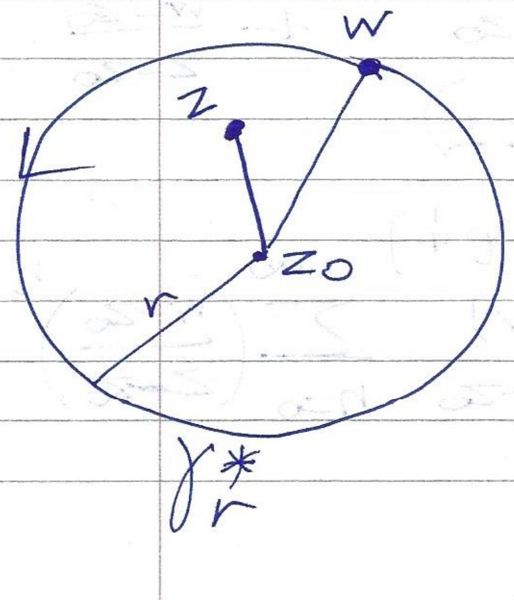
$$a_k=\int_{\gamma_r}\varphi_k(w)dw,\qquad k\in\mathbb{Z}.$$

<u>Λήμμα 1:</u> Εάν $z\in\mathbb{C}$ με $|z-z_0|<r$, τότε

$$\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-z}dw=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k.$$

<u>Απόδειξη:</u>

$$\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-z}dw=\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)-(z-z_0)}dw=$$



$$=\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}dw.$$

Αλλά, $\forall w\in\gamma_r^*$,

$$\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right|=\frac{|z-z_0|}{r}<1,$$

οπότε η γεωμετρική σειρά

δίνει

$$\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k.$$

Άρα,

$$\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-z}\,dw = \int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k dw$$

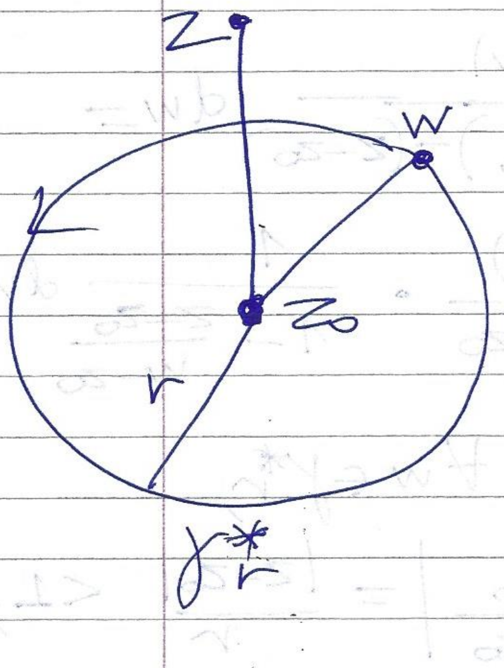
$$\overset{**}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw\right](z-z_0)^k. \quad \boxtimes$$

**Βλ. Πρότ. ΙΙΙ.3, αρχείο ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ-ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

Λήμμα 2: Εάν $|z-z_0|>r$, τότε

$$\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-z}\,dw = -\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z-z_0)^k.$$

Απόδειξη: $\forall w \in \gamma_r^*$,



$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{(w-z_0)-(z-z_0)}$$

$$= -\frac{f(w)}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}}$$

$\left(\left|\frac{w-z_0}{z-z_0}\right|<1\right)$

(γεωμ. σειρά)

$$= -\frac{f(w)}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n$$

$=$

③

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}, \quad w \in \gamma_r^*.$$

Στο παραπάνω άθροισμα θέτω $k=-n-1$, οπότε $n=-(k+1)$ και

$$\frac{f(w)}{w-z} = -\sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{f(w)(w-z_0)^{-(k+1)}}{(z-z_0)^{-k}} =$$

$$= -\sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} (z-z_0)^k,$$

$\forall w \in \gamma_r^*$.

Άρα, $$\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \overset{**}{=} -\sum_{k=-\infty}^{-1} \left[\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw\right](z-z_0)^k$$ $\boxtimes$

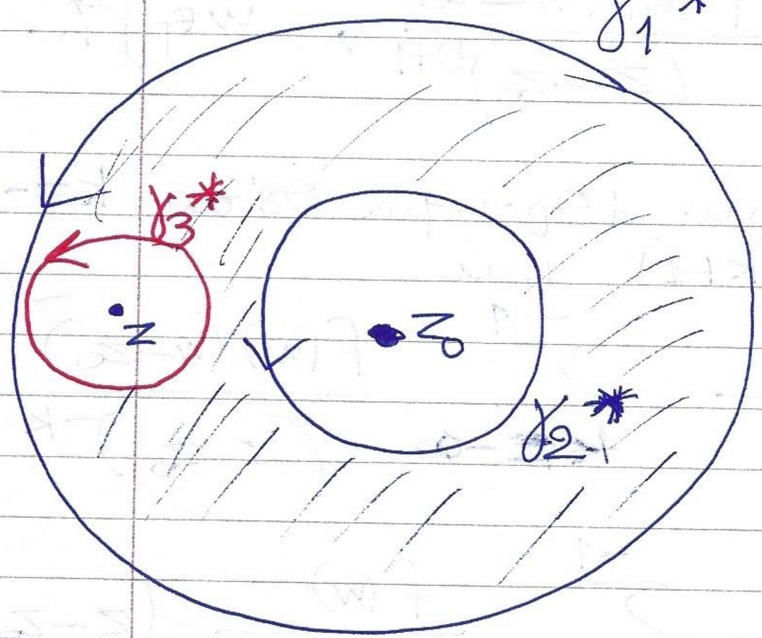
** Βλ.Πρότ.III.3, Μιγαδικές Σειρές-Δυναμοσειρές

<u>Λήμμα 3:</u> Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$ κ' γ_1, γ_2 δύο θετικά προσανατολισμένοι κύκλοι κοινού κέντρου z_0 με $\gamma_2^* \subset \text{int}\gamma_1^*$ κ' f συνάρτηση ολόμορφη στο $\text{int}\gamma_1^* \setminus \{z_0\}$ κ' συνεχής στο γ_1^*. Εάν $z \in \text{int}\gamma_1^* \cap \text{ext}\gamma_2^*$, τότε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{\gamma_1} \varphi_k(w)\,dw\right](z-z_0)^k +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{-1}\left[\int_{\gamma_2} \varphi_k(w)\,dw\right](z-z_0)^k.$$

Απόδειξη:



Επιλέγω θετικά προσαν. κύκλο γ_3 κέντρου z με

$\gamma_3^* \subset \operatorname{int}\gamma_1^* \cap \operatorname{ext}\gamma_2^*$.

Επειδή η f είναι ολόμορφη στο εσωτερικό του γ_3, από Ο.Τ. Cauchy παίρνω

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_3} \frac{f(w)}{w-z}\,dw. \qquad (1)$$

Η συνάρτηση $w \longmapsto \frac{f(w)}{w-z}$ είναι ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των $\gamma_1^*, \gamma_2^*, \gamma_3^*$, οπότε από την Γενικ-Αρχή Παραμόρφ. παίρνουμε

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw + \int_{\gamma_3} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad 2\pi i f(z) = \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$\xrightarrow[1,2]{\text{Λήμματα}}$ αποδεικτέα. $\boxtimes$

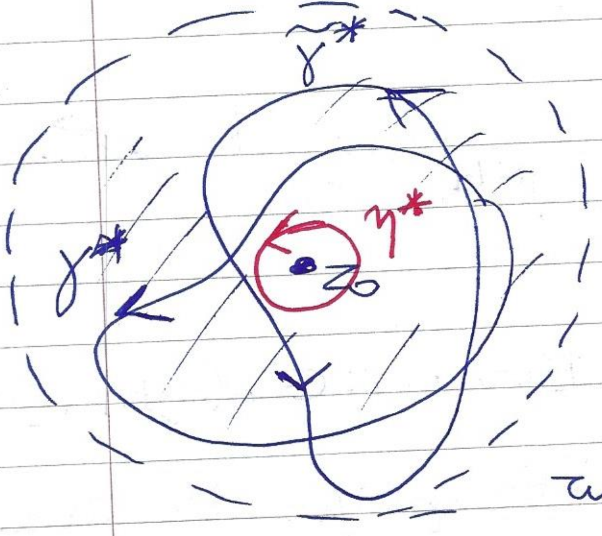
<u>Λήμμα 4:</u> Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < R \leq \infty$ κ'

φ ολόμορφη στο $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$. Έστω $\gamma, \tilde{\gamma}$ θετικά προσανατολ. κλειστές καμπύλες ώστε

$z_0 \in int\gamma^* \cap int\tilde{\gamma}^*$, $\gamma \cup \tilde{\gamma}^* \subset D(z_0, R)$.

Τότε, $\int_\gamma \varphi(w)dw = \int_{\tilde{\gamma}} \varphi(w)dw$.

<u>Απόδειξη:</u>



Επιλέγω θετικά προσαν. κύκλο η κέντρου z_0 με

$\eta \subset int\gamma^* \cap int\tilde{\gamma}^*$.

Η φ είναι ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των γ^*, η^* (αντ. μεταξύ των $\tilde{\gamma}^*, \eta^*$) $\xrightarrow[\text{Παραμ.}]{\text{Αρχή}}$

$$\Rightarrow \int_\gamma \varphi(w)dw = \int_\eta \varphi(w)dw = \int_{\tilde{\gamma}} \varphi(w)dw. \qquad \boxtimes$$

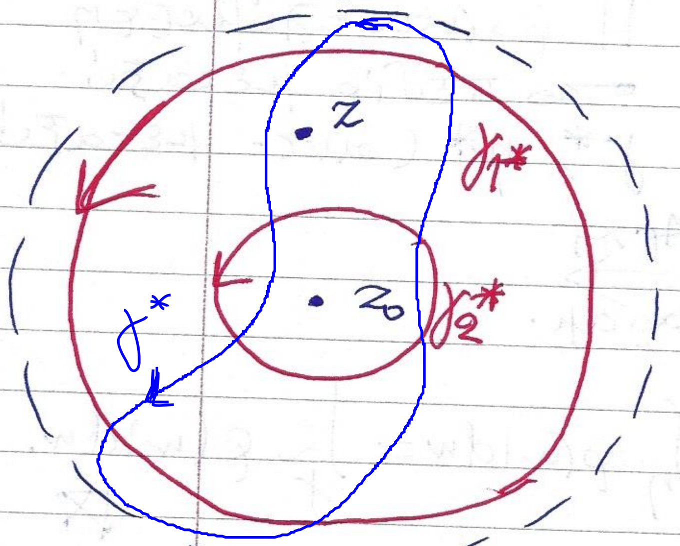
ΘΕΩΡΗΜΑ LAURENT Έστω f ολόμορφη στον "τρυπημένο" δίσκο $D(z_0,R)\setminus\{z_0\}$ ($z_0 \in \mathbb{C}$, $0<R\leq\infty$).
Τότε, $\exists!\,(a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C} \,|$

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k, \quad 0<|z-z_0|<R$$

Επιπλέον, αν γ τυχαία θετικά προσαν. κλειστή καμπύλη με
$z_0 \in \operatorname{int}\gamma^*$, $\gamma^* \subset D(z_0,R)$,
τότε

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Απόδειξη:



Έστω $z \in D(z_0,R)\setminus\{z_0\}$.

Θεωρούμε δύο θετικά προσαν. κύκλους γ_1, γ_2 κοινού κέντρου z_0 με

$$z\in \operatorname{int}\gamma_1^* \cap \operatorname{ext}\gamma_2^*$$

και

$$\gamma_2^* \subset \operatorname{int}\gamma_1^*, \quad \gamma_1^* \subset D(z_0,R).$$

<u>Λήμμα 3</u> $\Longrightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{\gamma_1} \varphi_k(w)\,dw\right](z-z_0)^k +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{-1} \left[\int_{\gamma_2} \varphi_k(w)\,dw\right](z-z_0)^k,$$

όπου $\varphi_k(w) = \dfrac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}$, $w \in D(z_0,R)\setminus\{z_0\}$,

$k \in \mathbb{Z}$.

Έστω γ <u>τυχαία</u> θετικά προσανατ. κλειστή καμπύλη με

$z_0 \in \operatorname{int}\gamma^*$, $\gamma^* \subset D(z_0,R)$.

Επειδή η φ_k είναι ολόμορφη στον $D(z_0,R)\setminus\{z_0\}$,

Λήμμα 4 $\Longrightarrow$ $\int_{\gamma_1} \varphi_k = \int_{\gamma_2} \varphi_k = \int_{\gamma} \varphi_k$,

$k \in \mathbb{Z}$

$$\Longrightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{\gamma} \varphi_k(w)\,dw\right](z-z_0)^k.$$

$\boxtimes$