ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

I. Ολοκληρώματα της μορφής $\int_a^b \varphi(t)dt$, $\varphi:[a,b]\to\mathbb{C}$ συνεχής

Ορισμός I.1. Έστω $\varphi:[a,b]\to\mathbb{C}$ ($a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$) κ' $u=\mathrm{Re}\varphi$, $v=\mathrm{Im}\varphi$. Εάν u,v συνεχείς, ορίζουμε

$$\int_a^b \varphi(t)dt=\int_a^b u(t)dt+i\int_a^b v(t)dt.$$

Π.χ. $\varphi(t)=t^2+it^3$, $t\in[0,1]$,

$$\int_0^1 \varphi(t)dt=\int_0^1 t^2dt+i\int_0^1 t^3dt$$
$$=1/3+i/4.$$

Πρόταση I.2. Έστω $F:[a,b]\to\mathbb{C}$ διαφορίσιμη με F' συνεχή. Τότε,

$$\int_a^b F'(t)dt=F(b)-F(a)\doteq F(t)\Big|_a^b.$$

Απόδειξη: Αν $F_1=\mathrm{Re}F$, $F_2=\mathrm{Im}F$, τότε

$$\int_a^b F'(t)dt=\int_a^b F_1'(t)dt+i\int_a^b F_2'(t)dt$$
$$=[F_1(b)-F_1(a)]+i[F_2(b)-F_2(a)]$$ κλπ. ☒

Π.χ. $\int_0^{\pi} e^{it}dt = \frac{1}{i}e^{it}\Big|_0^{\pi} =$

$= \frac{1}{i}\left(e^{i\pi}-1\right) = -\frac{2}{i} = 2i.$

Βασικές ιδιότητες:

(i) (Γραμμικότητα). Εάν $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{C}$ συνεχείς κ' $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, τότε

$$\int_a^b [\lambda\varphi(t)+\mu\psi(t)]dt = \lambda\int_a^b \varphi(t)dt + \mu\int_a^b \psi(t)dt$$

(ii) Εάν $a<\gamma<b$, τότε

$$\int_a^b \varphi(t)dt = \int_a^{\gamma}\varphi(t)dt + \int_{\gamma}^b \varphi(t)dt.$$

(iii) $$\int_a^b \overline{\varphi(t)}dt = \overline{\int_a^b \varphi(t)dt}.$$

Επιπλέον, έχουμε την παρακάτω

Πρόταση I.3. Εάν $\varphi:[a,b]\to\mathbb{C}$ συνεχής, τότε

$$\left|\int_a^b \varphi(t)dt\right| \le \int_a^b |\varphi(t)|dt.$$

Απόδειξη (μη τετριμμένη!)

Θέτω $z = \int_a^b \varphi(t)\,dt$.

- Εάν $z=0$, προφανώς ισχύει η αποδεικτέα.
- Έστω $z \neq 0$. Τότε, $\exists\, \theta \in \mathbb{R} \mid$
$$z = |z| e^{i\theta}.$$

Τότε, $|z| = e^{-i\theta} \cdot z = \int_a^b e^{-i\theta} \varphi(t)\,dt$

$$\overset{|z| \in \mathbb{R}}{\Longrightarrow} \quad |z| = \mathrm{Re}\left[\int_a^b e^{-i\theta}\varphi(t)\,dt\right]$$

$$= \int_a^b \mathrm{Re}\left[e^{-i\theta}\varphi(t)\right]dt$$

$$\leq \int_a^b \left|e^{-i\theta}\varphi(t)\right|dt$$

$$= \int_a^b |\varphi(t)|\,dt. \quad \boxtimes$$

II. Μιγαδικό ολοκλήρωμα

<u>Ορισμός II.1.</u> Έστω $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ λεία καμπύλη κ' $f:\gamma^*\to\mathbb{C}$ συνεχής.

<u>Το μιγαδικό ολοκλήρωμα της f πάνω στην γ</u> είναι το

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt.$$

<u>Παραδείγματα:</u>

<u>(i)</u> Έστω $z_0\in\mathbb{C}$, $R>0$ κ'

$\gamma_R(t)=z_0+Re^{it}$, $t\in[0,2\pi]$. Τότε,

$$\int_{\gamma_R}\frac{1}{z-z_0}\,dz=\int_0^{2\pi}\frac{1}{Re^{it}}\,iRe^{it}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi} i = 2\pi i$$

(Καλό είναι να το θυμόμαστε κ' σαν θεωρία!!)

<u>(ii)</u> Έστω γ_R ο κύκλος του παράδ. (i) κ' $n \in \mathbb{Z}$.

Τότε,
$$\int_{\gamma_R} (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases}$$

Πράγματι για $n=-1$, βλ. παράδ. (i).

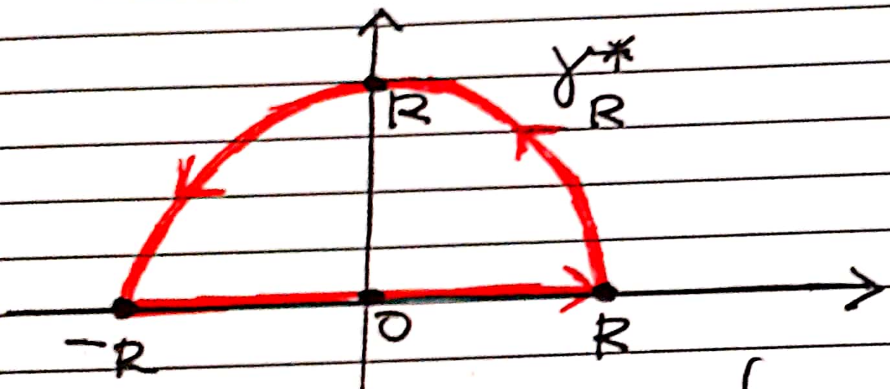
Για $n \neq -1$, έχουμε
$$\int_{\gamma_R} (z-z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} (Re^{it})^n iRe^{it} dt$$
$$= R^{n+1} \int_0^{2\pi} i e^{i(n+1)t} dt$$
$$= \frac{R^{n+1}}{n+1} e^{i(n+1)t} \Big|_0^{2\pi} =$$
$$= \frac{R^{n+1}}{n+1} \left[e^{2(n+1)\pi i} - 1 \right] = \frac{R^{n+1}}{n+1}(1-1)$$
$$= 0.$$

<u>Ορισμός II.2.</u> Έστω γ τμηματικά λεία καμπύλη με $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$ $(n \geq 1)$, όπου $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ διαδοχικές <u>λείες</u> καμπύλες. Εάν $f: \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής,
$$\int_\gamma f(z) dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z) dz.$$

<u>Παράδειγμα:</u> Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{\Gamma_R} |z|\,\bar{z}\,dz$, όπου

$\Gamma_R = \gamma_R + [-R, R]$, $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$ $(R>0)$.

<u>Λύση:</u> Η Γ_R είναι τμηματικά λεία.



Το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_{\gamma_R} |z|\bar{z}\,dz + \int_{-R}^{R} |z|z\,dz =$$

$$= \int_0^{\pi} |Re^{it}|\, Re^{-it}\, iRe^{it}\,dt + \underbrace{\int_{-R}^{R} |t|t\,dt}_{0}$$

$$= \int_0^{\pi} iR^3\,dt = \pi i R^3.$$

(Σημ. η $t \mapsto |t|t$ είναι περιττή!)

<u>Πρόταση II.4.</u> Έστω γ τμηματικά λεία καμπύλη, $f,g:\gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχείς κ' $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$. Τότε,

$$\int_\gamma [\lambda f(z)+\mu g(z)]dz =$$

$$= \lambda \int_\gamma f(z)dz + \mu \int_\gamma g(z)dz.$$

<u>Απόδειξη:</u> Εάν $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ <u>λεία</u>, το ολοκλ. του α' μέλους γράφεται

$$\int_a^b [\lambda f(\gamma(t))+\mu g(\gamma(t))]\gamma'(t)dt =$$

$$= \lambda\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt + \mu\int_a^b g(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

$$= \lambda\int_\gamma f(z)dz + \mu\int_\gamma g(z)dz.$$

Εάν γενικότερα, $\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_n$ $(n\geq 1)$ όπου $\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n$ διαδοχικές <u>λείες</u>, τότε το ολοκλ. του α' μέλους γράφεται

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k}[\lambda f(z)+\mu g(z)]dz =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\lambda \int_{\gamma_k} f(z)dz + \mu \int_{\gamma_k} g(z)dz \right]$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)dz + \mu \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} g(z)dz$$

$$= \lambda \int_{\gamma} f(z)dz + \mu \int_{\gamma} g(z)dz. \quad \boxtimes$$

<u>Πρόταση II.5.</u> Έστω $\gamma, \tilde{\gamma}$ δύο διαδοχικές τμηματικά λείες καμπύλες κ'

$$f : \gamma^* \cup \tilde{\gamma}^* \to \mathbb{C} \text{ συνεχής.}$$

Τότε,

$$\int_{\gamma + \tilde{\gamma}} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz + \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz.$$

Απόδειξη: Έστω

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n, \quad \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2 + \dots + \tilde{\gamma}_m,$$

όπου $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ διαδοχικές λείες,

$\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_m$ " " $(n, m \geq 1)$.

Επειδή $\gamma, \tilde{\gamma}$ διαδοχικές, το πέρας της γ ταυτίζεται με την αρχή της $\tilde{\gamma}$.

Ταυτόχρονα όμως, το πέρας της γ είναι το πέρας της γ_n κ' η αρχή της $\tilde{\gamma}$ ταυτίζεται με την αρχή της $\tilde{\gamma}_1$.

Άρα, οι $\gamma_n, \tilde{\gamma}_1$ είναι διαδοχικές, οπότε κ' οι $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_m$ είναι διαδοχικές κ'

$$\gamma + \tilde{\gamma} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k + \sum_{k=1}^{m} \tilde{\gamma}_k$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma+\tilde{\gamma}} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{m} \int_{\tilde{\gamma}_k} f(z)\,dz$$

$$= \int_{\gamma} f(z)\,dz + \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz. \quad \boxtimes$$

<u>Πρόταση II.6.</u> Έστω γ τμηματικά λεία κ' $f:\gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής. Τότε, $\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_{\gamma} f(z)dz$.

Θα χρειαστούμε το παρακάτω

<u>Λήμμα:</u> Εάν γ_1, γ_2 διαδοχικές καμπύλες, τότε

$$-(\gamma_1+\gamma_2) = (-\gamma_2) + (-\gamma_1).$$

Γενικότερα, αν $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ $(n \geq 1)$ διαδοχικές καμπύλες, τότε

$$-(\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_n) = (-\gamma_n)+\dots+(-\gamma_1).$$

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$. Τότε,

$$(\gamma_1+\gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t-a), & t\in\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \\ \gamma_2(2t-b), & t\in\left[\frac{a+b}{2}, b\right] \end{cases}$$

• $\forall t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, έχουμε $a+b-t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$

$$\Rightarrow \quad -(\gamma_1+\gamma_2)(t) = (\gamma_1+\gamma_2)(a+b-t) =$$

$$= \gamma_2(2(a+b-t)-b) = \gamma_2(2a+b-2t)$$

$$= \gamma_2((a+b)-(2t-a))$$

$$= (-\gamma_2)(2t-a).$$

• Όμοια, $\forall\, t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$,

$$-(\gamma_1+\gamma_2)(t) = (-\gamma_1)(2t-a).$$

Άρα, $\quad -(\gamma_1+\gamma_2) = (-\gamma_2)+(-\gamma_1).$

Η γενίκευση προκύπτει επαγωγικά. $\boxtimes$

<u>Απόδειξη Πρότ. II.6.</u>

Υποθέτουμε αρχικά ότι $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ <u>λεία</u>. Ελέγχεται εύκολα ότι η $(-\gamma)$ είναι επίσης λεία κ'

$$(-\gamma)'(t) = -\gamma'(a+b-t),\quad \forall\, t \in [a,b].$$

Άρα,

$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_a^b f(\gamma(a+b-t))\gamma'(a+b-t)\,dt$$

$$\underset{s=a+b-t}{=} \int_b^a f(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds = -\int_\gamma f(z)\,dz.$$

Γενικά, έστω $\gamma = \gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n$ $(n \geq 1)$

όπου $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ διαδοχικές λείες.

Τότε, $-\gamma = (-\gamma_n) + \cdots + (-\gamma_1)$ (βλ. λήμμα)

$$\Rightarrow \int_{-\gamma} f(z)dz = \int_{-\gamma_n} f(z)dz + \cdots + \int_{-\gamma_1} f(z)dz$$

$$= -\int_{\gamma_n} f(z)dz - \cdots - \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

$$= -\left(\int_{\gamma_1} f + \cdots + \int_{\gamma_n} f\right) = -\int_{\gamma} f. \quad \boxtimes$$

<u>**Πρόταση ΙΙ.7.**</u> (M−L ανισότητα!) Έστω γ τμηματικά λεία καμπύλη και $f: \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής. Έστω $M \geq 0$ ώστε $|f(z)| \leq M, \ \forall z \in \gamma^*$.

Τότε, $\left|\int_{\gamma} f(z)dz\right| \leq M \cdot \|\gamma\|$, όπου $\|\gamma\|$ το μήκος της γ.

<u>**Απόδειξη:**</u> Υποθέτουμε αρχικά ότι γ <u>λεία</u>: $[a,b] \to \mathbb{C}$.

Τότε,

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right|$$

$$\overset{(\text{Πρόταση I.3})}{\leq} \int_a^b |f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)|dt$$

$$= \int_a^b |f(\gamma(t))|\cdot|\gamma'(t)|dt$$

$$\leq M\int_a^b |\gamma'(t)|dt = M\cdot\|\gamma\|.$$

Γενικά, έστω $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$ $(n \geq 1)$, όπου $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ διαδοχικές λείες καμπύλες.

Τότε, $$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} f(z)dz\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n}\left|\int_{\gamma_k} f(z)dz\right| \leq M\sum_{k=1}^{n}\|\gamma_k\|$$

$$= M\cdot\|\gamma\|.$$

$\boxtimes$

Σημαντικό σχόλιο!! Δεν ισχύει γενικά ότι $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)|dz.$

Π.χ. $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$,

$f(z) = 1/z$, $z \in \gamma^*$.

Τότε, $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}}\, i e^{it}\,dt$

$= 2\pi i$

$\Rightarrow \left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = 2\pi$,

επί $\displaystyle\int_\gamma |f(z)|\,dz = \int_\gamma \frac{1}{|z|}\,dz =$

$\displaystyle = \int_\gamma 1\,dz = \int_0^{2\pi} i e^{it}\,dt = e^{it}\Big|_0^{2\pi}$

$= 1 - 1 = 0.$

Άρα, $\displaystyle\int_\gamma |f(z)|\,dz < \left|\int_\gamma f(z)\,dz\right|$!!

Παραδείγματα:

(i) $\left|\int_\gamma e^{\bar{z}\,\mathrm{Im}z}\,dz\right| \leq 2\pi\sqrt{e}$, όπου

$\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Πράγματι: $\forall\, z = x + iy \in \gamma^*$,

$\bar{z}\,\mathrm{Im}z = (x - yi)y = xy - iy^2$

$\Rightarrow |e^{\bar{z}\,\mathrm{Im}z}| = e^{\mathrm{Re}(\bar{z}\,\mathrm{Im}z)} = e^{xy} \leq$

$$\leq e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} = e^{1/2} = \sqrt{e}.$$

[Σημ. $\forall z = x+iy \in \gamma^*$, είναι $|z|=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2+y^2=1$.]

Επομένως,

(ML-ανισότητα) $\Rightarrow \left| \int_\gamma e^{\bar{z}\operatorname{Im} z} dz \right| \leq$

$\leq \sqrt{e}\,\|\gamma\| = 2\pi\sqrt{e}$.

<u>(ii)</u> $\left| \int_\gamma \frac{dz}{4+3z} \right| \leq 2\pi$, όπου $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Πράγματι: $\forall z \in \gamma^*$, $|4+3z| \geq 4 - 3|z| = 1$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{4+3z} \right| \leq 1 \xRightarrow{\text{(ML-ανισ.)}}$$

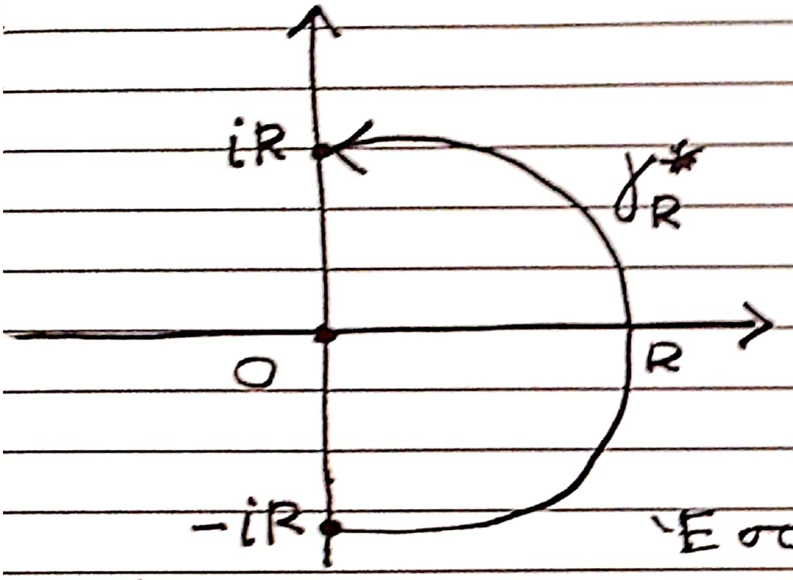
$$\Rightarrow \left| \int_\gamma \frac{1}{4+3z} dz \right| \leq 1 \cdot 2\pi = 2\pi.$$

<u>(iii)</u> Να δ.ο. $\lim\limits_{R \to +\infty} \left| \int_{\gamma_R} \frac{\operatorname{Log} z}{z^2} dz \right| = 0$,

όπου $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ $(R > 0)$.

<u>Πράγματι:</u> Κατ' αρχήν παρατηρούμε

ότι η $z \mapsto \operatorname{Log} z$ είναι συνεχής πάνω στο γ_R^*, διότι το γ_R^* δεν τέμνει τον αρνητικό ημιάξονα $(-\infty, 0]$.



Άρα, ορίζεται το ολοκλ.

$$\int_{\gamma_R} \frac{\operatorname{Log} z}{z^2}\, dz.$$

Έστω $R > 1$.

$\forall z \in \gamma_R^*$, έχουμε $\operatorname{Arg} z \in [-\pi/2, \pi/2]$

$$\Rightarrow |\operatorname{Log} z| = |\ln|z| + i \operatorname{Arg} z|$$
$$\leq \ln R + |\operatorname{Arg} z|$$
$$\leq \ln R + \pi/2$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\operatorname{Log} z}{z^2} \right| \leq \frac{\ln R + \pi/2}{R^2}$$

$$\xRightarrow{(ML\text{-ανισ.})} \forall R > 1, \ \left| \int_{\gamma_R} \frac{\operatorname{Log} z}{z^2}\, dz \right| \leq \pi R \cdot \frac{\ln R + \frac{\pi}{2}}{R^2} =$$

$$= \pi \cdot \frac{\ln R + \pi/2}{R} \xrightarrow{R \to +\infty} 0.$$

Παράγουσα - Ολοκλήρωμα ανεξάρτητο του δρόμου

Ορισμός II.8. Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό κ' $f: U \to \mathbb{C}$. Μια ολόμορφη συνάρτηση $F: U \to \mathbb{C}$ λέγεται παράγουσα της f αν

$$F'(z) = f(z), \ \forall z \in U.$$

Π.χ. • Η e^{z^2} είναι παράγουσα της $2ze^{z^2}$ στο $\mathbb{C}$.

• Η $-1/z$ είναι παράγουσα της $1/z^2$ στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

• Η $\operatorname{Log} z$ είναι παράγουσα της $1/z$ στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Πρόταση II.9: Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο (δηλ. ανοικτό, συνεκτικό), $f: U \to \mathbb{C}$ κ' F, G παράγουσες της f. Τότε,

$$\exists\, c \in \mathbb{C} \,/\, F(z) = G(z) + c, \ \forall z \in U.$$

Απόδειξη: $(F-G)' = 0$ στο U = πεδίο

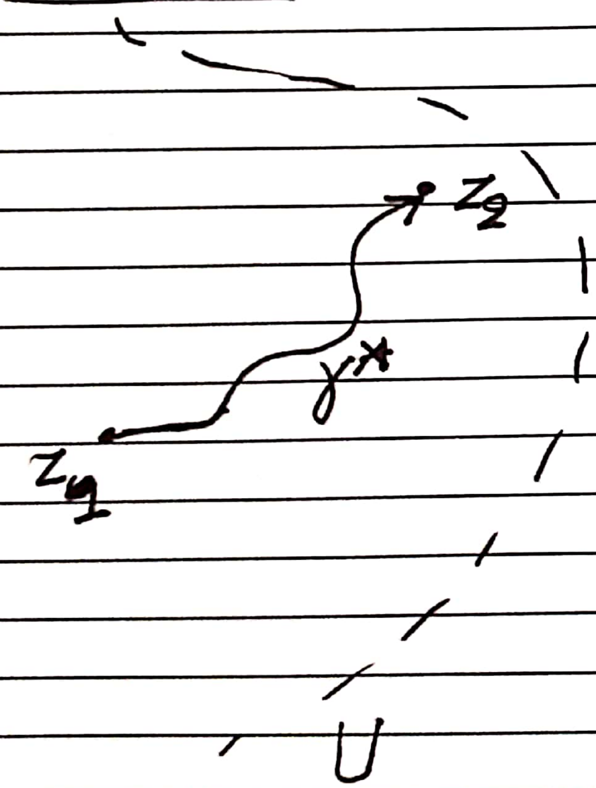
$\Rightarrow F - G =$ σταθερή στο U. $\boxtimes$

<u>Πρόταση ΙΙ.10:</u> Έστω F παράγουσα της f στο ανοικτό $U \subseteq \mathbb{C}$ κ' $z_1, z_2 \in U$. Τότε,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1),$$

για οποιαδήποτε τμηματικά λεία καμπύλη γ με $\gamma^* \subset U$, που έχει αρχή το z_1 κ' πέρας το z_2.

<u>Απόδειξη:</u>



Υποθέτουμε αρχικά ότι $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ <u>λεία</u> με $\gamma(a) = z_1$, $\gamma(b) = z_2$.

Τότε,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

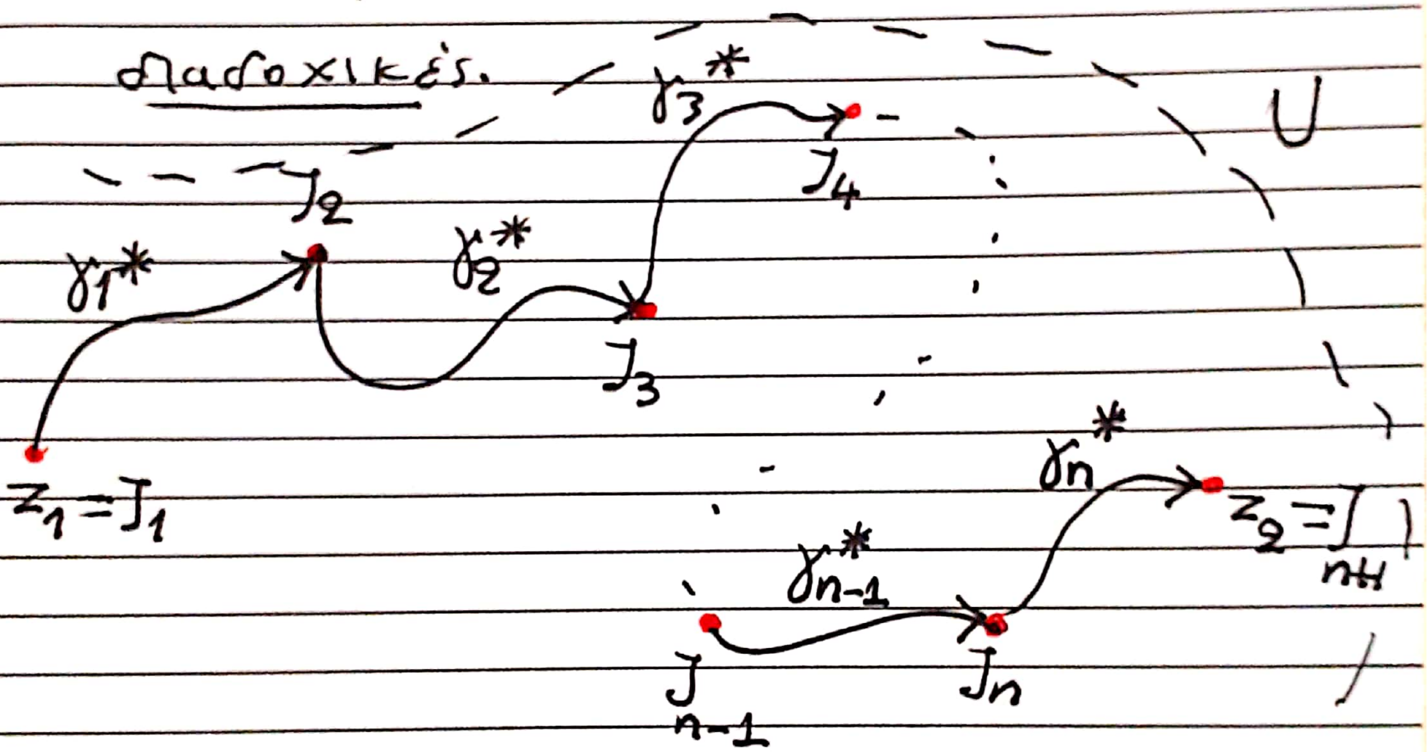
$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\left[F(\gamma(t))\right]dt =$$

$$= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(z_2) - F(z_1).$$

Ας υποθέσουμε γενικά ότι γ τμηματικά λεία καμπύλη με αρχή το z_1 και πέρας το z_2, ώστε

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n \quad (n \geq 2),$$

όπου $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ <u>λείες καμπύλες</u> <u>διαδοχικές</u>.



$\forall\, k \in \{1, 2, \dots, n\}$, θέτουμε

J_k = η αρχή της γ_k,

J_{k+1} = το πέρας της γ_k.

Τότε, $J_1 = z_1$, $J_{n+1} = z_2$.

Έχουμε

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_3} f + \dots + \int_{\gamma_{n-1}} f + \int_{\gamma_n} f =$$

$$= [\cancel{F(J_2)} - F(J_1)] + [\cancel{F(J_3)} - \cancel{F(J_2)}] +$$

$$+ [F(J_4) - \cancel{F(J_3)}] + \dots + [\cancel{F(J_n)} - F(J_{n-1})] +$$

$$+ [F(J_{n+1}) - \cancel{F(J_n)}] =$$

$$= F(J_{n+1}) - F(J_1) = F(z_2) - F(z_1).$$ ⊠

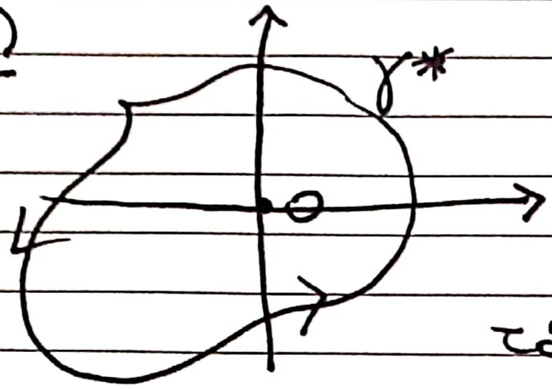
<u>Πόρισμα II.11</u>: Έστω γ <u>κλειστή τμηματικά λεία</u> καμπύλη με $\gamma^* \subset U$, όπου $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό. Εάν $f: U \to \mathbb{C}$ με παράγουσα, τότε $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω F παράγουσα της f στο U. Εάν γ κλειστή τμ. λεία με $\gamma^* \subset U$, τότε η αρχή z_1 και το πέρας z_2 της γ ταυτίζονται

$$\overset{(\text{Πρότ. II.10})}{\Longrightarrow} \int_\gamma f(z)dz = F(z_2) - F(z_1) = 0.$$ ⊠

Παραδείγματα:

(i)



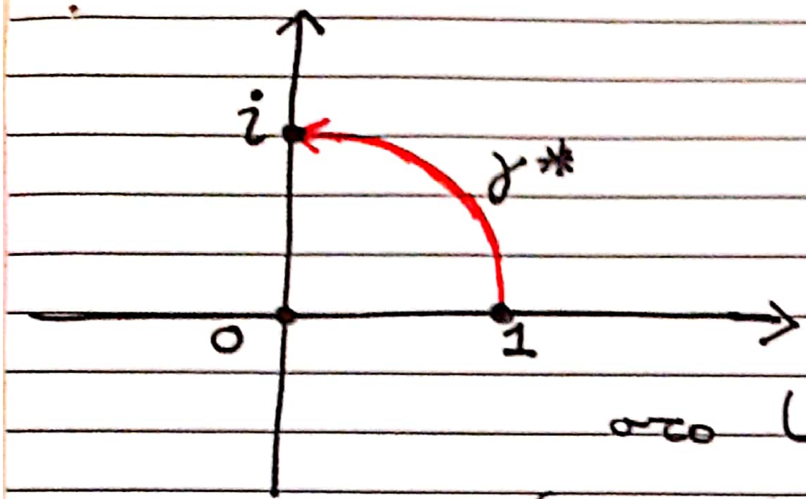
Εάν γ τμημ. λεία κλειστή καμπύλη με $0 \notin$ ίχν γ^*, τότε $\int_\gamma \frac{dz}{z^2} = 0$.

Πράγματι: $\gamma^* \subset U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ = ανοικτό κ' η $\frac{1}{z^2}$ έχει παράγουσα στο U (π.χ. την $-1/z$.)

(ii) $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Έπεται ότι η $1/z$ <u>δεν έχει παράγουσα</u> στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (αλλιώς θα έπρεπε $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 0$). Φυσικά, έχει παράγουσα στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, την $\operatorname{Log} z$.

(iii) Να υπολογιστεί το $\int_\gamma \frac{\operatorname{Log}^3 z}{z}\, dz$, όπου $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, \pi/2]$.



$\gamma^* \subset U = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

Η $z \mapsto \frac{1}{4} \mathrm{Log}^4 z$ είναι ολόμορφη στο U κι'

$$\left(\frac{1}{4} \mathrm{Log}^4 z\right)' = \frac{\mathrm{Log}^3 z}{z}, \quad \forall z \in U$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{\mathrm{Log}^3 z}{z}\, dz = \frac{1}{4}\left(\mathrm{Log}^4 i - \underbrace{\mathrm{Log}^4 1}_{0}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln|i| + i\,\mathrm{Arg}(i)\right]^4 = \frac{1}{4}\left(\frac{i\pi}{2}\right)^4$$

$$= \frac{\pi^4}{64}.$$

(iv) Έστω f ολόμορφη στον ανοικτό δίσκο

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

ώστε

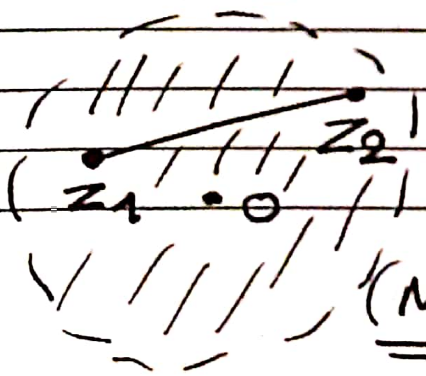
$$|f'(z)| \leq M, \quad \forall z \in D,$$

όπου $M > 0$ σταθερά.

Τότε,

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq M |z_1 - z_2|,$$

$\forall\, z_1, z_2 \in D$. Πράγματι· έστω $z_1, z_2 \in D$.



Τότε, $[z_1, z_2] \subset D$

$$\Rightarrow f(z_2) - f(z_1) = \int_{[z_1, z_2]} f'(z)\, dz$$

$\xRightarrow{\text{(ML-ανισ.)}}$ κ.λ.π.

ΘΕΩΡΗΜΑ CAUCHY–GOURSAT

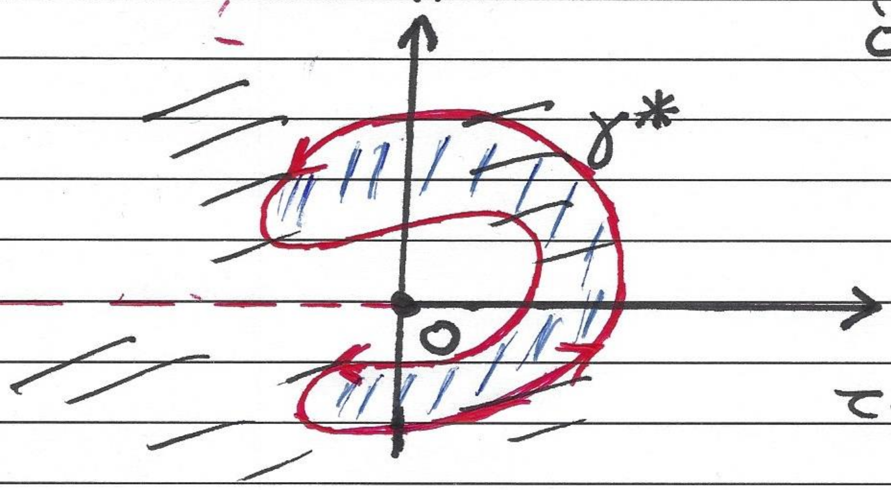
Ορισμός 1: Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο (δηλ. ανοικτό συνεκτικό). Το U λέγεται **απλά συνεκτικό** ανν το εσωτερικό κάθε κλειστής καμπύλης γ με $\gamma^* \subset U$ περιέχεται στο U.

Γεωμετρικά, απλά συνεκτικό πεδίο είναι ένα πεδίο χωρίς "οπές."

Παραδείγματα:

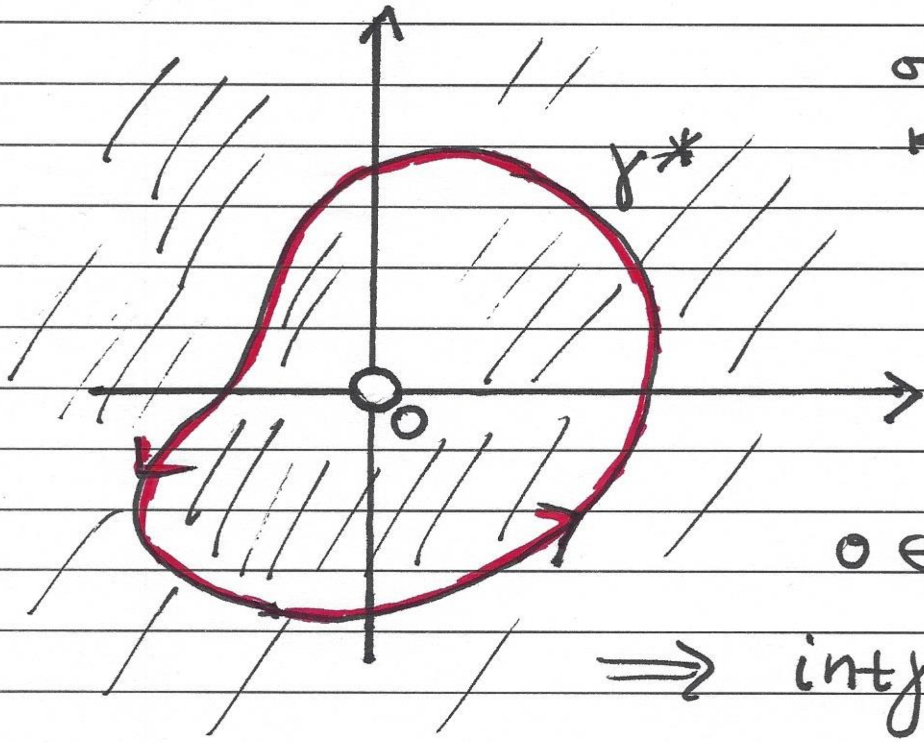
(i) κάθε ανοικτός δίσκος είναι απλά συνεκτικό.

(ii) Το $U = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ είναι απλά συνεκτικό.



Όπως φαίνεται στο σχήμα, εάν γ κλειστή καμπύλη με $\gamma^* \subset U$, τότε $\text{int}\gamma^* \subset U$.

(iii) Το πεδίο $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ δεν είναι απλά συνεκτικό. Πράγματι, στο



σχήμα, η καμπύλη γ είναι κλειστή με $\gamma^* \subset U$ αλλά $0 \in \operatorname{int}\gamma^*$

$\Longrightarrow \operatorname{int}\gamma^* \not\subset U.$

Θεώρημα 1 (Θ. Cauchy – Goursat!!)

Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ απλά συνεκτικό πεδίο και $f \in \mathcal{H}(U)$ (δηλ. $f: U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη).

Εάν γ κλειστή, τμηματικά λεία καμπύλη με $\gamma^* \subset U$, τότε

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Η απόδειξη του Θ. 1 δόθηκε από τον E. Goursat (1883) (εδώ παραλείπεται).

Το 1825, ο L-A. Cauchy έδωσε μια απλή απόδειξη του Θ.1 αλλά με την επιπλέον υπόθεση ότι f' συνεχής!

Εδώ θα δώσουμε την απόδειξη του Θ.1 υποθέτοντας ότι:

- f' συνεχής
- γ λεία

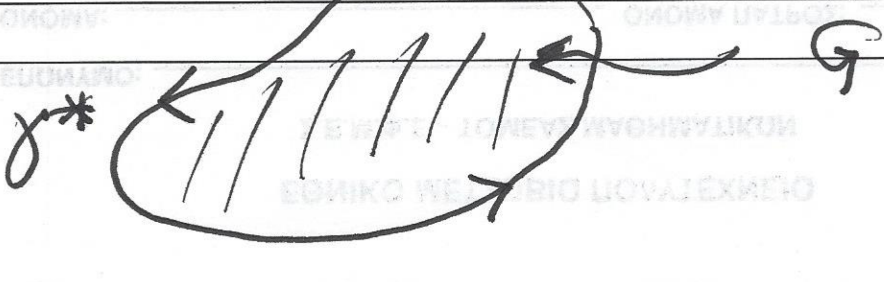
Η απόδειξη βασίζεται στο Θ. Green:

Θεώρημα 2 (Green):

Έστω G απλά συνεκτικό πεδίο $\subseteq \mathbb{R}^2$ με σύνορο μια θετικά προσανατολισμένη τμ. λεία καμπύλη γ κ' $P=P(x,y)$, $Q=Q(x,y) : G \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης στο G.

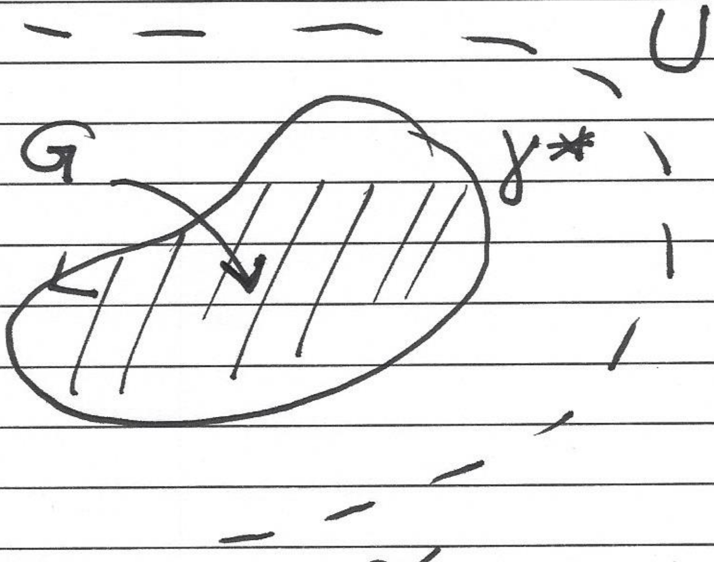
Τότε,

$$\oint_\gamma (P\,dx + Q\,dy) = \iint_G (Q_x - P_y)\,dx\,dy.$$



Απόδειξη Θ.1: Υποθέτουμε ότι

- f' συνεχής στο U
- γ λεία



Έστω $f = u + iv$

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$

με

$\gamma(t) = x(t) + i y(t)$, $t \in [a,b]$.

Τότε, $f' = u_x + i v_x$ στο U

κ' $\boxed{(C\text{-}R)\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \text{ στο } U.}$

Επειδή f' συνεχής, έπεται ότι

$$\boxed{u_x,\ u_y,\ v_x,\ v_y \text{ συνεχείς στο } U.}$$

Επιπλέον, $x(\cdot), y(\cdot) \in C^1[a,b]$ αφού γ λεία. Θα χρησιμοποιήσουμε την "ταύτιση"

$$\gamma(t) \equiv (x(t), y(t)),\quad t \in [a,b].$$

Έχουμε

$\longrightarrow$

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt =$$

$$= \int_a^b \left[u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))\right]\cdot\left[x'(t)+iy'(t)\right]dt$$

$$= \int_a^b \left[u(\gamma(t))x'(t) - v(\gamma(t))y'(t)\right]dt \; +$$

$$+ \, i\int_a^b \left[u(\gamma(t))y'(t) + v(\gamma(t))x'(t)\right]dt$$

$$= \int_a^b \left(u(\gamma(t)), -v(\gamma(t))\right)\bullet\gamma'(t)\,dt \; +$$

$$+ \; i\int_a^b \left(v(\gamma(t)), u(\gamma(t))\right)\bullet\gamma'(t)\,dt$$

(με $(\bullet)$ συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^2$ κ' εφαρμόσαμε την ταύτιση

$$\gamma(t) \equiv (x(t), y(t)),$$

$$\gamma'(t) \equiv (x'(t), y'(t))).$$

Με βάση τα παραπάνω και τον ορισμό του επικαμπυλίου ολοκληρώματος, παίρνουμε

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \oint_\gamma (u\,dx - v\,dy) + \quad + i\oint_\gamma (v\,dx + u\,dy). \qquad (1)$$

Επειδή οι u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο απλά συνεκτικό πεδίο $G = \text{int}\,\gamma^* \subseteq U$ (σημ. ότι U απλά συνεκτικό κ' $\gamma^* \subset U$), μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θ. Green σε κάθε ένα από τα επικαμπύλια ολοκληρώματα του β' μέλους της (1). Έτσι έχουμε

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \iint_G (-v_x - u_y)\,dx\,dy + \quad + i\iint_G (u_x - v_y)\,dx\,dy \overset{(C-R)}{=\!=} 0 + i\cdot 0 = 0.$$

$\boxtimes$

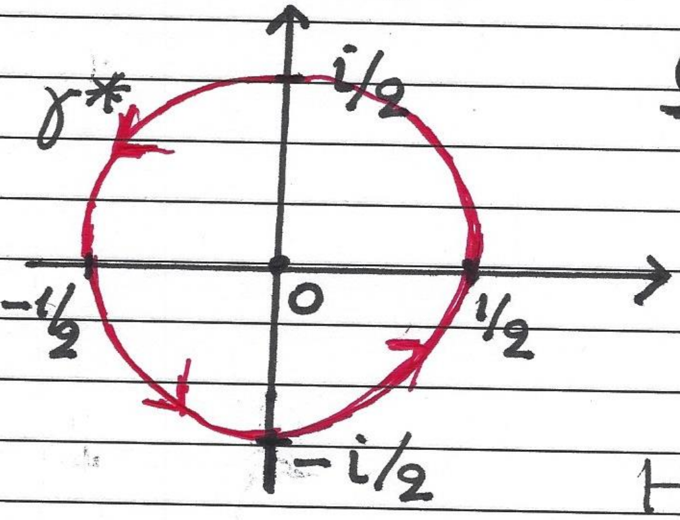
<u>Θεώρημα 3</u> (<u>Ισχυρή εκδοχή Θεωρήματος Cauchy – Goursat</u>):

Έστω γ κλειστή καμπύλη με απλά συνεκτικό εσωτερικό $G = \text{int}\gamma^*$ κ' $f : G \cup \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής με $f|_G \in H(G)$. Τότε,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

[Η απόδειξη παραλείπεται.]

<u>Παραδείγματα</u>:



<u>(α)</u> $\gamma(t) = \frac{1}{2}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $f(z) = \frac{e^z}{1+z^2}$.

Η f είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\} = U$ κ' $\gamma^* \subset U$.

Το $\text{int}\gamma^* = D(0, 1/2)$ είναι απλά συνεκτικό

$$\xRightarrow{\Theta.3} \int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

(β) $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

$f(z) = \sin(e^z) + \bar{z} + |z+1|^2$, $z \in \mathbb{C}$.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = ?$$

f συνεχής στο $\mathbb{C}$ αλλά όχι ολόμορφη (δεν εφαρμόζεται το Θ-Cauchy στην f!!)

Παρ' όλ' αυτά, $\forall z \in \gamma^*$, έχουμε

$$|z| = 1 \Rightarrow \bar{z} = 1/z$$

και

$$f(z) = \sin(e^z) + \frac{1}{z} + |z|^2 + z + \bar{z} + 1$$

$$= \sin(e^z) + \frac{1}{z} + 1 + z + \frac{1}{z} + 1$$

$$= \underbrace{\sin(e^z) + z + 2}_{g(z)} + \frac{2}{z}.$$

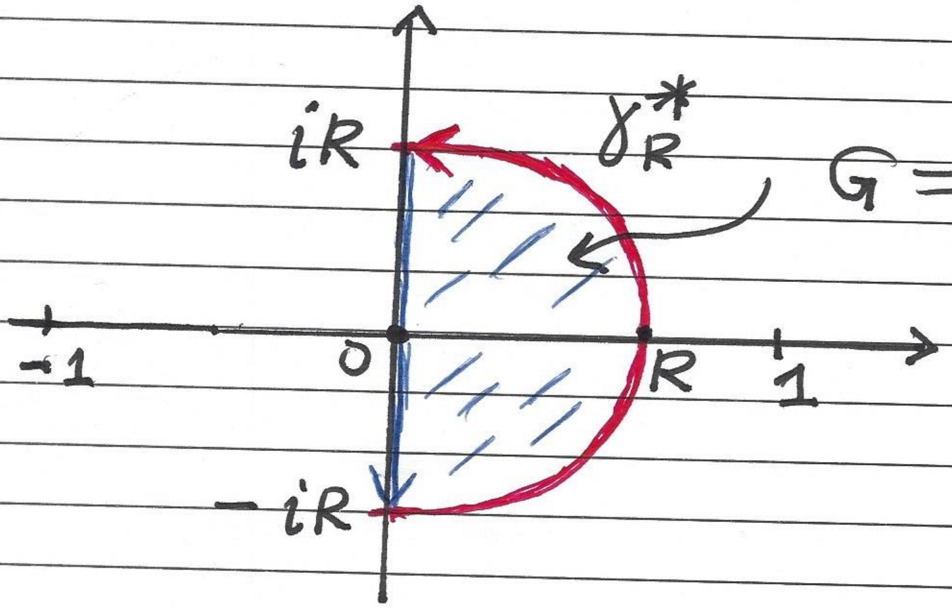
Αλλά, $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \xRightarrow{\Theta.3} \int_\gamma g(z)\,dz = 0$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2 \cdot 2\pi i = 4\pi i.$$

(γ) $\gamma_R(t) = Re^{it}, \ t \in [-\pi/2, \pi/2]$

$f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}$ $\qquad \underline{1 > R > 0}$

$\int_{\gamma_R} f(z)dz = ?$



Θεωρούμε την κλειστή καμπύλη

$$\Gamma_R = \gamma_R + [iR, -iR].$$

Η Γ_R είναι τμηματικά λεία και

το εσωτερικό της $G = \text{int}\,\Gamma_R^*$
είναι απλά συνεκτικό.

Επιπλέον, $\pm 1 \notin G \cup \Gamma_R^*$

$$\overset{\Theta\text{-}3}{\Longrightarrow} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$$

$$\Longrightarrow \int_{\gamma_R} f(z)dz = -\int_{[iR,-iR]} f(z)dz =$$

$$= \int_{[-iR,\, iR]} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(it)\,d(it) =$$

$$= i \int_{-R}^{R} \frac{dt}{-t^2-1} = -2i \int_{0}^{R} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= -2i\, \mathrm{Arctan}\,t \Big|_0^R = -2i\, \mathrm{Arctan}\,R.$$

Ακολουθεί μια εφαρμογή στον υπολογισμό γενικευμένων ολοκληρωμάτων.

ΑΣΚΗΣΗ:

(a) Να δείξετε ότι $\lim_{R\to+\infty} \int_{\sigma_R} e^{iz^2} dz = 0$,

όπου $\sigma_R(t) = R + it$, $t \in [0, R]$.

(β) Να δείξετε ότι

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,dt = \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-2t^2}\,dt \overset{(+)}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

(+) γνωστό από την Αναλ. ΙΙ.

Λύση:

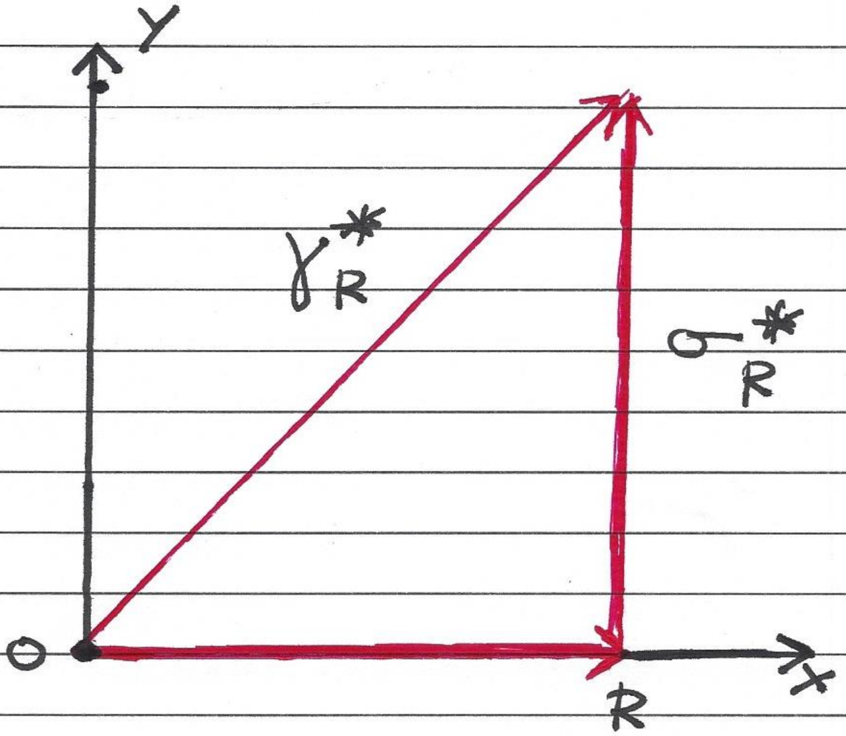
(α) Για $z = \sigma_R(t) = R + it$, $t \in [0, R]$,

έχουμε

$$iz^2 = i(R^2 - t^2 + 2iRt)$$
$$= -2Rt + i(R^2 - t^2)$$
$$\Rightarrow |e^{iz^2}| = e^{Re(iz^2)} = e^{-2Rt}$$
$$\Rightarrow \left|\int_{\sigma_R} e^{iz^2} dz\right| \overset{(+)}{=} \left|\int_0^R e^{i\sigma_R^2(t)}\, i\,dt\right|$$
$$\leq \int_0^R |e^{i\sigma_R^2(t)}|\,dt$$
$$= \int_0^R e^{-2Rt}\,dt = \frac{1-e^{-2R^2}}{2R}$$
$$\xrightarrow{R \to +\infty} 0.$$

(+) [Δεν εξυπηρετεί η ML-ανισότητα!!]

(β)



Θεωρούμε κ' το ευθ. τμήμα

$$\gamma_R(t) = t + it, \quad t \in [0,R]$$

(βλ. σχήμα).

Θέτουμε $\Gamma_R = [0,R] + \sigma_R - \gamma_R$.

Η Γ_R είναι κλειστή, τμηματ. λεία $\overset{Θ.3}{\Longrightarrow}$

$$\int_{\Gamma_R} e^{iz^2}\,dz = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \int_0^R e^{it^2}\,dt + \int_{\sigma_R} e^{iz^2}\,dz = \int_{\gamma_R} e^{iz^2}\,dz \tag{2}$$

Αλλά, για $z = t + it = (1+i)t$,

έχουμε $z^2 = 2it^2 \Rightarrow iz^2 = -2t^2$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} e^{iz^2} dz = \int_0^R e^{-2t^2}(1+i)\,dt$$

$$= \int_0^R e^{-2t^2} dt + i\int_0^R e^{-2t^2} dt$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \int_0^R e^{it^2} dt + \int_{\sigma_R} e^{iz^2} dz =$$

$$= \int_0^R e^{-2t^2} dt + i\int_0^R e^{-2t^2} dt.$$

Παίρνοντας στην τελευταία το όριο καθώς $R \to +\infty$, παίρνουμε (λόγω του ερωτ.-(α)),

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t^2} dt + i\int_0^{+\infty} e^{-2t^2} dt.$$

Επειδή $e^{it^2} = \cos(t^2) + i\sin(t^2)$, προκύπτει η αποδεικτέα. $\boxtimes$

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ Θ. CAUCHY–GOURSAT

Θ. 1. (Αρχή Παραμόρφωσης)

Έστω γ_1, γ_2 θετικά προσανατολισμένες, απλές κλειστές, τμηματικά λείες καμπύλες ώστε

$$\gamma_2^* \subset \operatorname{int}\gamma_1^*$$

και $G = \operatorname{int}\gamma_1^* \cap \operatorname{ext}\gamma_2^*$ το πεδίο μεταξύ των γ_1^*, γ_2^*.

Έστω $f: G \cup \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \longrightarrow \mathbb{C}$, ώστε:

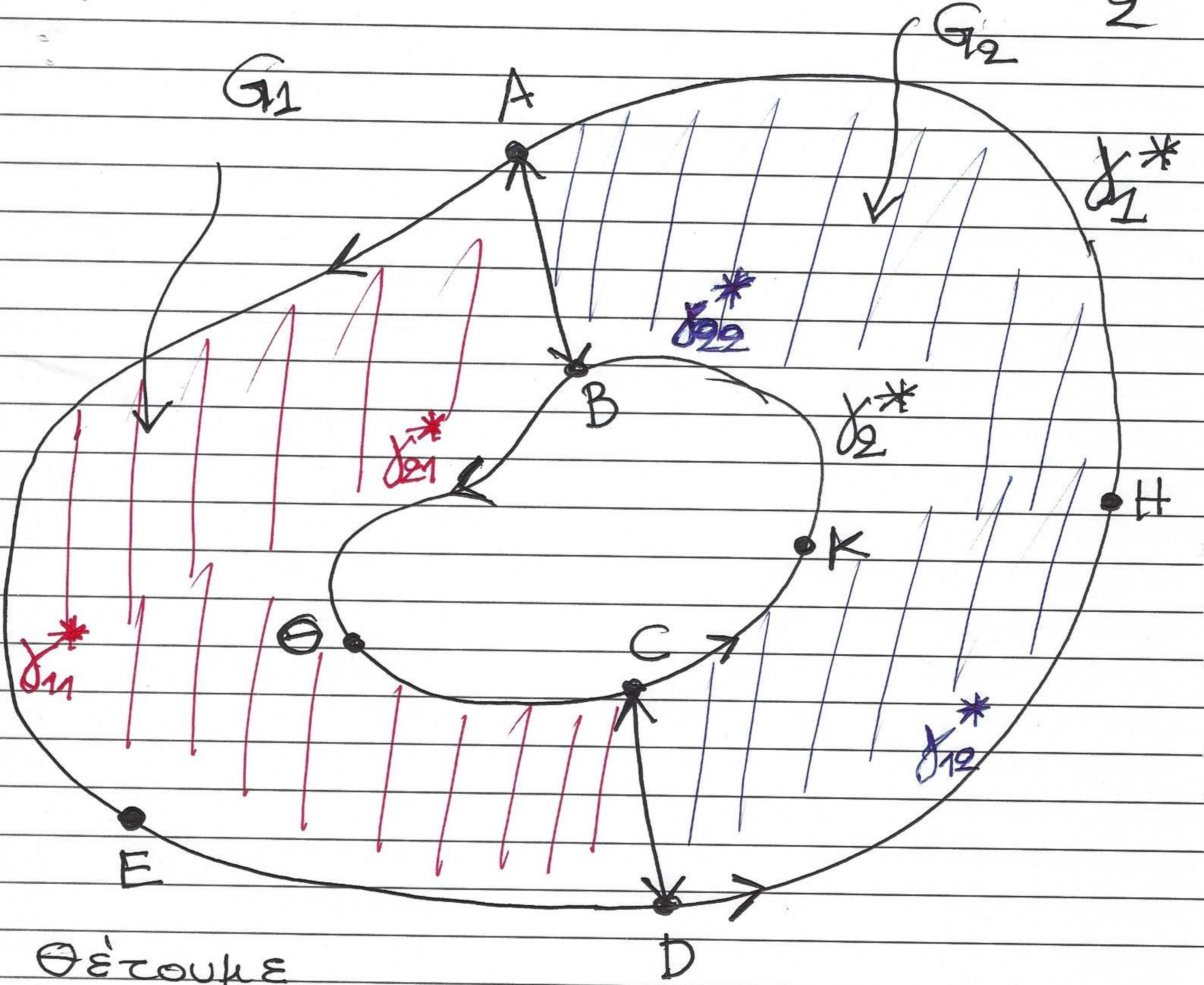
- f ολόμορφη στο G
- f συνεχής στο $\gamma_1^* \cup \gamma_2^*$

Τότε,

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

Απόδειξη:

$\longrightarrow$



Θέτουμε

$$\gamma_{11} = A \xrightarrow{\gamma_1} E \xrightarrow{\gamma_1} D, \quad \gamma_{12} = D \xrightarrow{\gamma_1} H \xrightarrow{\gamma_1} A,$$

$$\gamma_{21} = B \xrightarrow{\gamma_2} \Theta \xrightarrow{\gamma_2} C, \quad \gamma_{22} = C \xrightarrow{\gamma_2} K \xrightarrow{\gamma_2} B.$$

Τότε,

$$\gamma_1 = \gamma_{11} + \gamma_{12}, \quad \gamma_2 = \gamma_{21} + \gamma_{22}.$$

Θέτουμε

$$\Gamma_1 = \gamma_{11} + \overrightarrow{DC} - \gamma_{21} + \overrightarrow{BA}, \quad \Gamma_2 = \gamma_{12} + \overrightarrow{AB} - \gamma_{22} + \overrightarrow{CD}.$$

Τα $G_1 = \text{int}\,\Gamma_1$, $G_2 = \text{int}\,\Gamma_2$ είναι <u>απλώς συνεκτικά πεδία.</u>

Εφαρμόζοντας το Θ. Cauchy–Goursat (ισχυρή εκδοχή) για τις καμπύλες Γ_1, Γ_2 παίρνουμε

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = \int_{\gamma_{11}} f + \int_{\overrightarrow{DC}} f + \int_{-\gamma_{21}} f + \int_{\overrightarrow{BA}} f. \quad (1) \\ 0 = \int_{\gamma_{12}} f + \int_{\overrightarrow{AB}} f + \int_{-\gamma_{22}} f + \int_{\overrightarrow{CD}} f. \quad (2) \end{cases}$$

Είναι $\gamma_{11} + \gamma_{12} = \gamma_1$,

$$(-\gamma_{21}) + (-\gamma_{22}) = -\gamma_2,$$

$$0 = \int_{\overrightarrow{DC}} f + \int_{\overrightarrow{CD}} f = \int_{\overrightarrow{BA}} f + \int_{\overrightarrow{AB}} f.$$

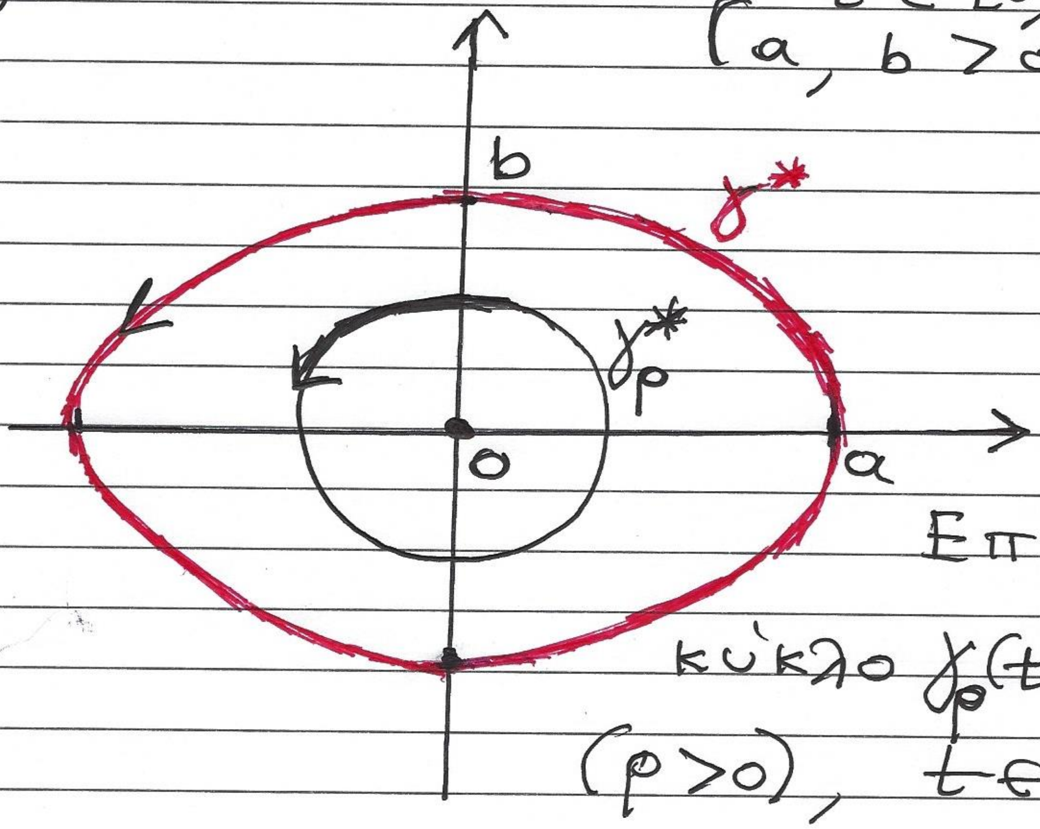
$(1)+(2) \Longrightarrow$

$$0 = \int_{\gamma_1} f + \int_{-\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f$$

$$\Longrightarrow \int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f. \quad \boxtimes$$

<u>Εφαρμογή:</u>

$\int_\gamma \frac{dz}{z} = ?$, $\gamma(t) = a\cos t + i(b\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ $(a, b > 0)$.



Επιλέγουμε κύκλο $\gamma_\rho(t) = \rho e^{it}$ $(\rho > 0)$, $t \in [0, 2\pi]$

με $\gamma_\rho^* \subset \operatorname{int} \gamma^*$.

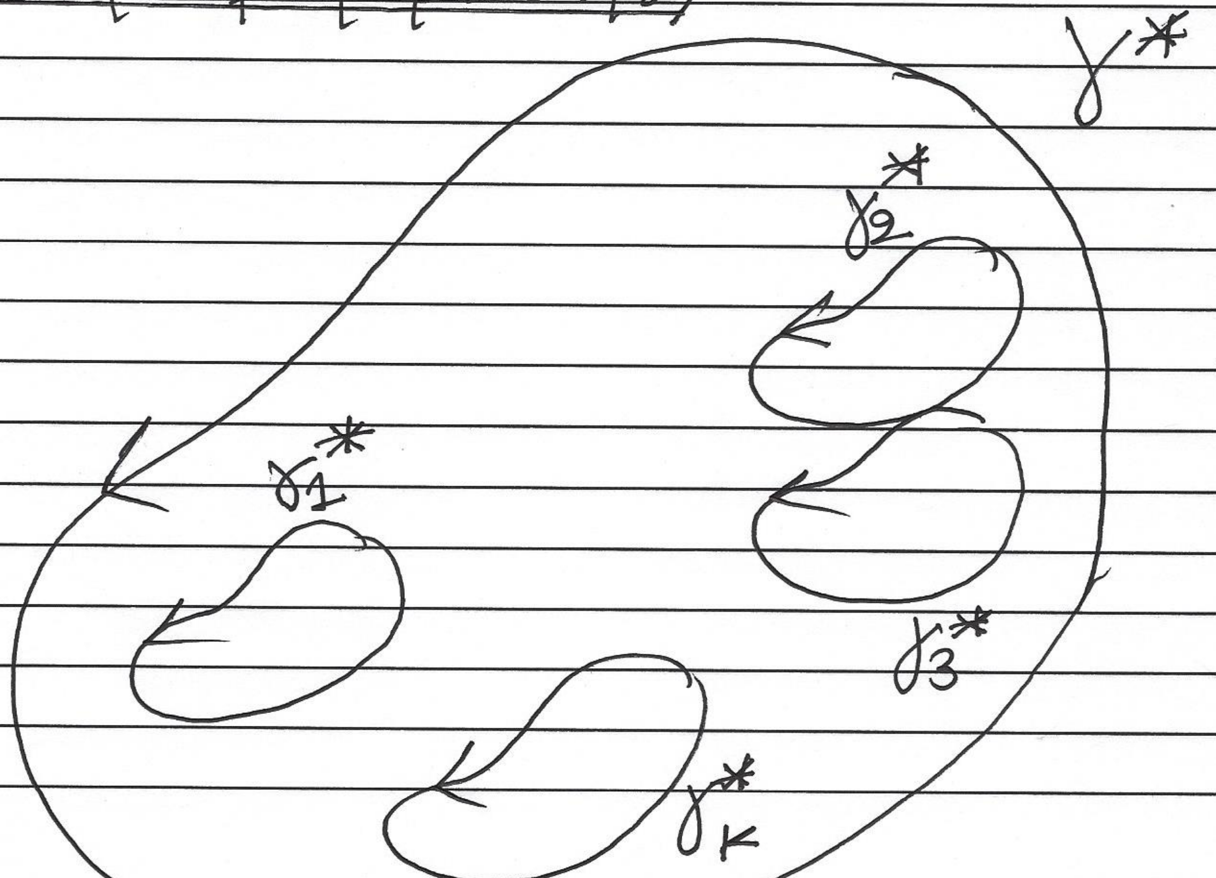
Η $f(z) = 1/z$ είναι ολόμορφη στο πεδίο που βρίσκεται μεταξύ των γ^*, γ_ρ^* κ' συνεχής στο $\gamma^* \cup \gamma_\rho^*$.

<u>Αρχή Παραμόρφωσης</u> $\Longrightarrow$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it}}{\rho e^{it}}\,dt$$

$$= 2\pi i.$$

<u>Θ.2. (Γενικευμένη Αρχή Παραμόρφωσης)</u>



Έστω $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ $(k \geq 1)$
θετικά προσανατολισμένες,
απλές, κλειστές, τμηματικά λείες καμπύλες, ώστε

- $\operatorname{int}\gamma^* \supset \gamma_j^*$, $1 \leq j \leq k$
- $\operatorname{int}\gamma_i^* \cap \operatorname{int}\gamma_j^* = \emptyset$,

$\forall\, i \neq j$, $1 \leq i, j \leq k$.

Θεωρούμε συνάρτηση f που είναι

$\longrightarrow$ συνεχής στο $\gamma^* \cup \left(\bigcup_{j=1}^{k} \gamma_j^* \right)$

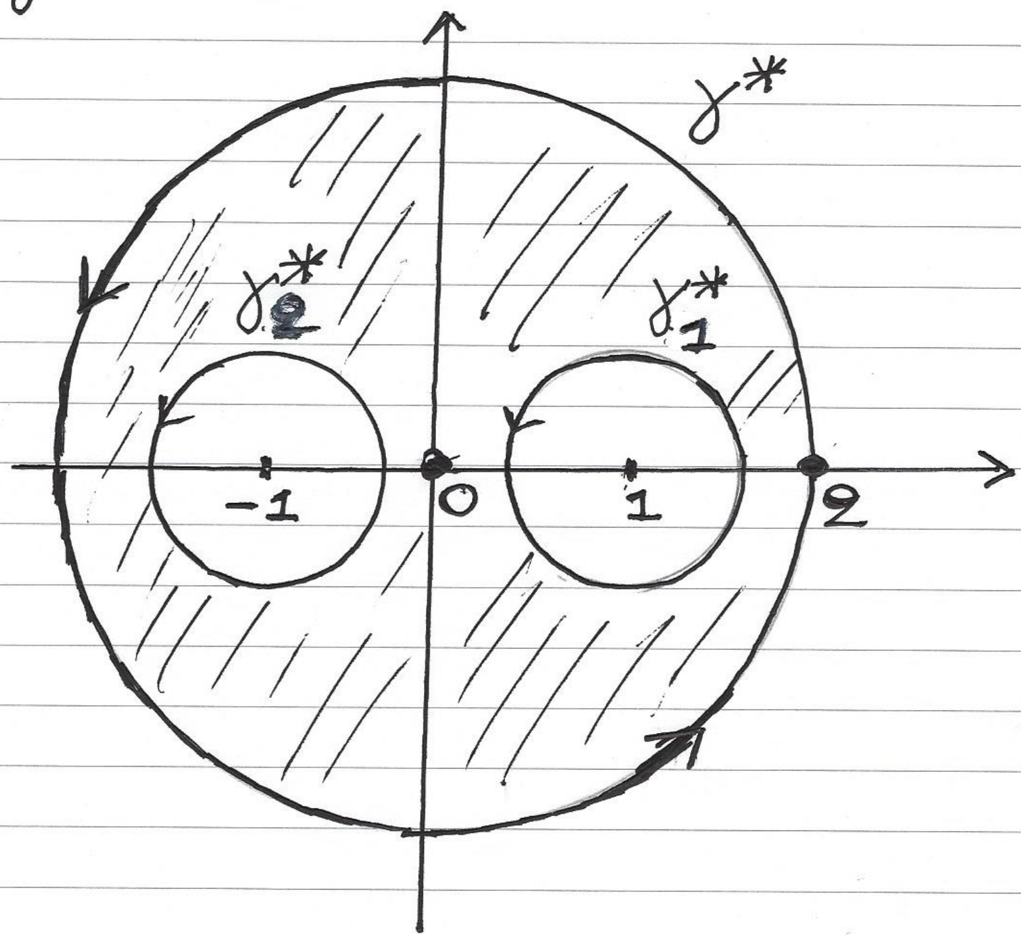
$\longrightarrow$ ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των $\gamma^*, \gamma_1^*, \gamma_2^*, \dots, \gamma_k^*$.

Τότε,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz.$$

Εφαρμογή:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2-1} = ?, \quad \gamma(t) = 2e^{it}, \; t \in [0, 2\pi].$$



Θεωρούμε δύο κύκλους γ_1, γ_2 με κέντρα $1, -1$ αντίστοιχα ώστε

$$\gamma_1^* \cap \gamma_2^* = \emptyset, \quad \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \subset \operatorname{int}\gamma^*.$$

Η $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$ είναι ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των $\gamma^*, \gamma_1^*, \gamma_2^*$ και συνεχής στο $\gamma^* \cup \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$.

Γενικευμένη Αρχή Παραμόρφωσης $\Rightarrow$

$$\Longrightarrow \int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Έχουμε $f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)$,

οπότε

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \frac{1}{2}\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{2}\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z+1},$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \frac{1}{2}\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{2}\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z+1}.$$

Οι συναρτήσεις $z \mapsto \frac{1}{z+1}$, $z \mapsto \frac{1}{z-1}$ είναι ολόμορφες στα $\mathrm{int}\,\gamma_1^*$, $\mathrm{int}\,\gamma_2^*$ αντίστοιχα $\xRightarrow{\text{Θ-Cauchy}}$

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z+1} = \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z-1} = 0,$$

ενώ $\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-1} = \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z+1} = 2\pi i$

$$\Longrightarrow \int_{\gamma} f(z)dz = \pi i - \pi i = 0.$$

Συμβολισμός:

$\mathcal{C} = \{\gamma \mid \gamma$ απλή, κλειστή, τμ. λεία καμπύλη$\}$

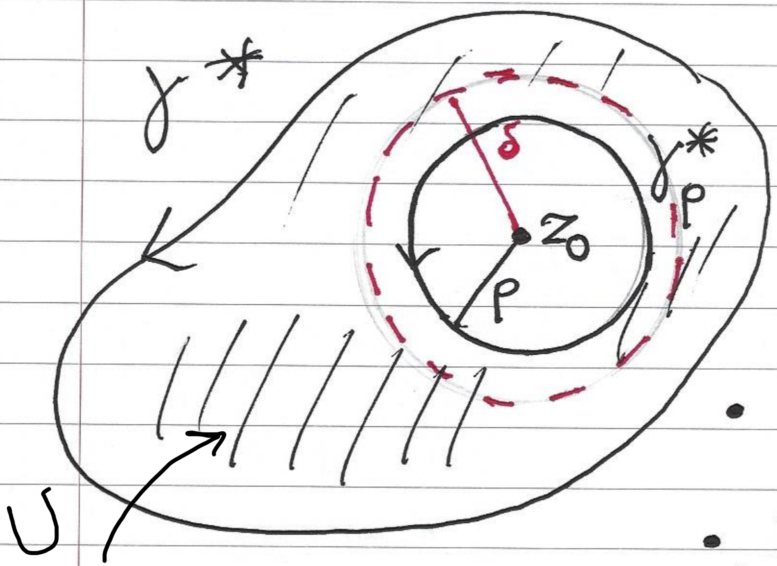
$\mathcal{C}^+ = \{\gamma \in \mathcal{C} \mid \gamma$ θετικά προσανατολισμένη$\}$

Θ.3 (ολοκληρωτικός τύπος Cauchy)

Έστω $\gamma \in \mathcal{C}^+$ με εσωτερικό $\operatorname{int}\gamma^* = U$, $f \in \mathcal{H}(U)$ κ' f συνεχής στο γ^*. Εάν $z_0 \in U$, τότε

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = f(z_0).$$

Απόδειξη:



Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή f συνεχής στο $z_0 \in U$, $\exists\, \delta > 0 \mid$

- $D(z_0, \delta) \subset U$
- $\forall z \in D(z_0, \delta)$, $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon/2\pi$

(3)

Επιλέγουμε $\rho \in (0, \delta)$ ώστε $\gamma_\rho^* \subset U$, όπου $\gamma_\rho^* = z_0 + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Η συνάρτηση $z \mapsto \dfrac{f(z)}{z - z_0}$ είναι ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των

$$\gamma^*, \gamma_\rho^* \xrightarrow[\text{Παραμόρφ.}]{\text{Αρχή}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz =$$

$$= \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz +$$

$$+ f(z_0)\int_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z-z_0} = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz +$$

$$+ 2\pi i f(z_0)$$

$$\Longrightarrow \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - 2\pi i f(z_0) = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz \quad (4)$$

$$\forall z \in \gamma_\rho^*,\ |z - z_0| = \rho < \delta \overset{(3)}{\Longrightarrow} |f(z) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

$$\Longrightarrow \left| \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi\rho}$$

$$\overset{\text{ML-ανισ.}}{\Longrightarrow} \left| \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz \right| \leq 2\pi\rho \frac{\varepsilon}{2\pi\rho}$$

$$= \varepsilon$$

$$\overset{(4)}{\Longrightarrow} \left| \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - 2\pi i f(z_0) \right| \leq \varepsilon .$$

Η τελευταία ισχύει $\forall \varepsilon > 0$

$$\Longrightarrow \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0) . \boxtimes$$

<u>Χαρακτηριστικές ασκήσεις</u>

(1) $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2-1}\,dz = ?$, $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

<u>Λύση:</u> Θεωρούμε κύκλους $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}^+$ κέντρων $1, -1$ αντίστοιχα με

$\gamma_1^*, \gamma_2^* \subset \operatorname{int}\gamma^*$, $\gamma_1^* \cap \gamma_2^* = \emptyset$.

(βλ. σχήμα σελ. 7).

Η συνάρτηση $z \mapsto f(z) = \dfrac{e^z}{z^2-1}$

είναι ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των

$$\gamma^*, \gamma_1^*, \gamma_2^*$$

$$\xrightarrow[\text{Αρχή Παραμ.}]{\text{Γενίκευμ.}} \quad \int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

Έχουμε

• $$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_1} \frac{e^z}{(z+1)(z-1)}dz = \int_{\gamma_1} \frac{\frac{e^z}{z+1}}{z-1}dz$$

$$\overset{\text{Ολοκλ.}}{\underset{\text{Τ-Cauchy}}{=}} \quad 2\pi i \left. \frac{e^z}{z+1} \right|_{z=1} = \pi i e.$$

Σημ. ότι $-1 \notin \text{int}\gamma_1^*$, οπότε

η $z \mapsto \frac{e^z}{z+1}$ είναι ολόμορφη

στο $\text{int}\gamma_1^*$.

Επιπλέον, $1 \in \text{int}\gamma_1^*$.

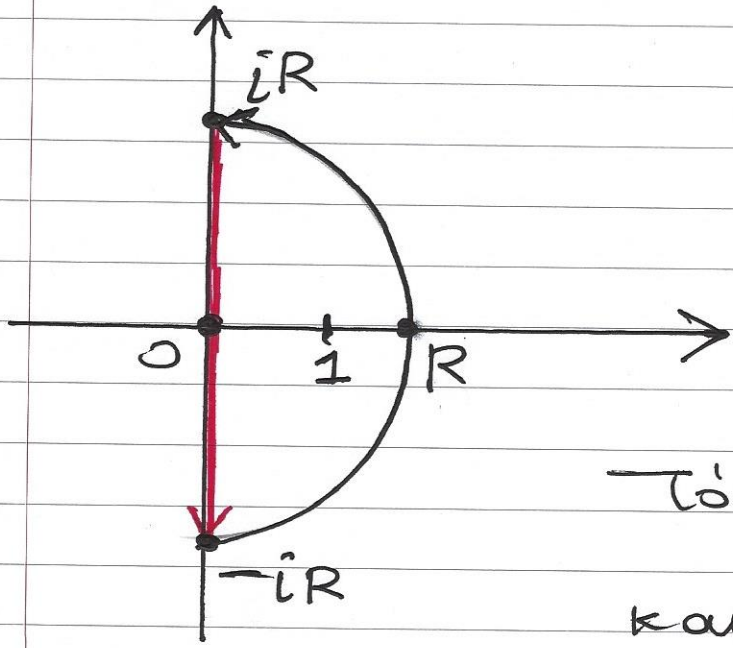
• $\displaystyle\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} \frac{\frac{e^z}{z-1}}{z+1}\,dz =$

$$\overset{\text{Θ.Τ.}}{\underset{\text{Cauchy}}{=}} 2\pi i \left.\frac{e^z}{z-1}\right|_{z=-1} = -\pi i/e.$$

Σημ.- ότι $1 \notin \operatorname{int}\gamma_2^*$, οπότε η $z \mapsto \frac{e^z}{z-1}$ είναι ολόμορφη στο $\operatorname{int}\gamma_2^*$. Επιπλέον, $-1 \in \operatorname{int}\gamma_2^*$.

---

(2) $\displaystyle\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2-1} = ?$, $\gamma_R(t) = Re^{it}$ $(R>1)$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$



Λύση

Θεωρούμε την καμπύλη

$\Gamma_R = \gamma_R + [iR, -iR]$.

Τότε, $\Gamma_R \in \mathcal{C}^+$

και $1 \in \operatorname{int}\Gamma_R^*$.

Η συνάρτηση $z \mapsto \frac{1}{z+1}$ είναι ολόμορφη στο $\text{int}\,\Gamma_R^*$ $\xRightarrow[\text{Cauchy}]{\text{O.T.}}$

$$\int_{\Gamma_R} \frac{\frac{1}{z+1}}{z-1}\,dz = 2\pi i \left.\frac{1}{z+1}\right|_{z=1}$$
$$= \pi i$$

$$\Longrightarrow \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^2-1} = \pi i.$$

Ταυτόχρονα,

$$\int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^2-1} = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2-1} + \int_{[iR,-iR]} \frac{dz}{z^2-1}$$

$$\Longrightarrow \pi i = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2-1} - \int_{[-iR,iR]} \frac{dz}{z^2-1}.$$

Αλλά, $$\int_{[-iR,iR]} \frac{dz}{z^2-1} = \int_{-R}^{R} \frac{d(it)}{(it)^2-1} =$$

$$= -i\int_{-R}^{R} \frac{dt}{t^2+1} = -2i\,\text{Arctan}\,R$$

$$\Longrightarrow \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2-1} = \pi i - 2i\,\mathrm{Arctan}\,R.$$

---

(3) <u>(α)</u> Να δείξετε ότι

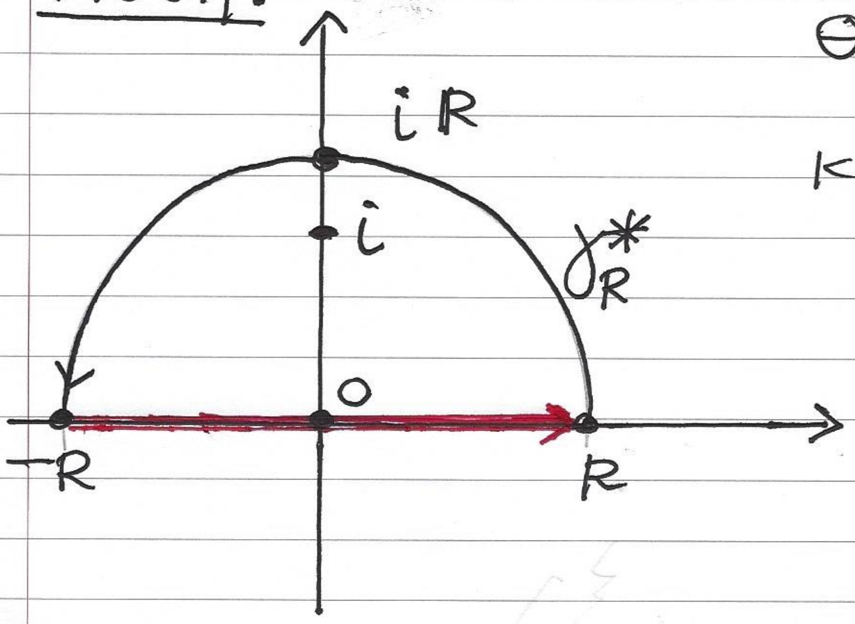
$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz = 0,$$

όπου $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$.

<u>(β)</u> Να υπολογίσετε το

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\,dt.$$

<u>Λύση:</u> Έστω $R > 1$.



Θεωρούμε την καμπύλη $\Gamma_R = \gamma_R + [-R, R]$.

Τότε, $\Gamma_R \in \mathcal{C}^+$ και $i \in \mathrm{int}\,\Gamma_R$

$$\xrightarrow[\text{Cauchy}]{\text{O.T.}} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz = \int_{\Gamma_R} \frac{\frac{e^{iz}}{z+i}}{z-i}\,dz$$

$$= 2\pi i \left.\frac{e^{iz}}{z+i}\right|_{z=i} = \pi/e.$$

Ταυτόχρονα,

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz = \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz + \int_{-R}^{R} \frac{e^{it}}{1+t^2}\,dt \tag{5}$$

Αλλά, $\forall z \in \gamma_R^*$ με $z = x+iy$, έχουμε

$$y \geq 0 \Rightarrow iz = -y + ix$$

$$\Rightarrow |e^{iz}| = e^{-y} \leq 1$$

$$\Rightarrow \left|\frac{e^{iz}}{1+z^2}\right| \leq \frac{1}{|1+z^2|}$$

και $|z^2+1| \geq |z|^2 - 1 = R^2 - 1$

$$\xrightarrow[(R>1)]{} \left|\frac{e^{iz}}{1+z^2}\right| \leq \frac{1}{R^2-1}$$

ML-ανισ. $\Rightarrow$ $\left|\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz\right| \leq \cancel{2}\pi R \frac{1}{R^2-1} \xrightarrow{R\to+\infty} 0.$

Παίρνοντας το όριο καθώς $R\to+\infty$ στην (5) κι' επειδή $\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz = \pi/e$, παίρνουμε

$$\pi/e = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}}{1+t^2}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}dt + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{1+t^2}dt$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}dt = \pi/e.$$

(4) $\int_\gamma \bar{z}\cos z\, dz = ?$, $\gamma(t)=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$

<u>Λύση</u>: $\forall z\in\gamma^*$, $|z|=1 \Rightarrow \bar{z}=1/z$

$\Rightarrow \int_\gamma \bar{z}\cos z\,dz = \int_\gamma \frac{\cos z}{z}dz \overset{\text{O.T. Cauchy}}{=\!=}$

$= 2\pi i \cos z\big|_{z=0} = 2\pi i$

(5) Έστω $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ και $f \in \mathcal{H}(U)$, όπου $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό με $\gamma^* \subset U$. Να δείξετε ότι

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\overline{f(z)}\,dz = 2\pi i\overline{f(0)}.$$

<u>Λύση:</u> $$\int_\gamma \frac{1}{z}\overline{f(z)}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}}\overline{f(e^{it})}\, i e^{it}\,dt$$

$$= i\int_0^{2\pi} \overline{f(e^{it})}\,dt = i\,\overline{\int_0^{2\pi} f(e^{it})\,dt}.$$

Αλλά, $$\int_0^{2\pi} f(e^{it})\,dt = \frac{1}{i}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{e^{it}}\, i e^{it}\,dt$$

$$= \frac{1}{i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z}\,dz \overset{\text{O.T. Cauchy}}{=\!=} \frac{1}{i}\,2\pi i\, f(0) = 2\pi f(0)$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{1}{z}\overline{f(z)}\,dz = 2\pi i\overline{f(0)}.$$

(6) Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό με

$$D[0,2]=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|\le 2\}\subseteq U$$

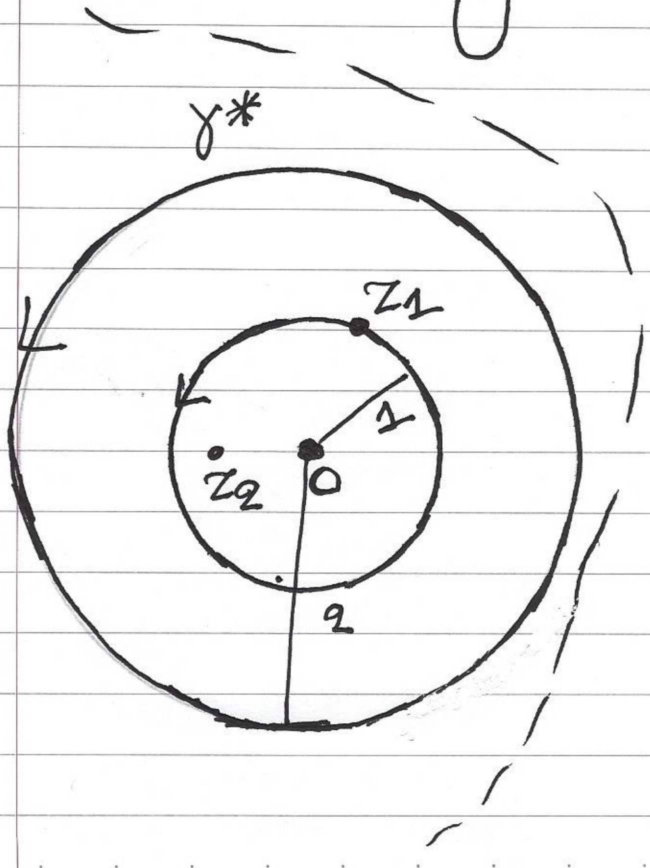
και $f\in\mathcal{H}(U)$, τέτοια ώστε

$$|f(z)|\le 1, \text{ για } |z|=2.$$

Να δείξετε ότι $\forall\, z_1,z_2\in D[0,1]$,

$$|f(z_1)-f(z_2)|\le 2|z_1-z_2|.$$

Λύση:



Έστω $\gamma(t)=2e^{it}$, $t\in[0,2\pi]_{\mathbb{R}}$,

$z_1,z_2\in D[0,1]$.

Τότε, $z_1,z_2\in \operatorname{int}\gamma^*$.

$\xRightarrow[\text{Cauchy}]{\text{Ο.Τ.}}$

$$f(z_1)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_1}\,dz$$

$$f(z_2)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_2}\,dz$$

$$\Rightarrow f(z_1)-f(z_2)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\left(\frac{1}{z-z_1}-\frac{1}{z-z_2}\right)dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\frac{\cancel{z}-z_2-\cancel{z}+z_1}{(z-z_1)\cdot(z-z_2)}\,dz$$

$$=\frac{z_1-z_2}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_1)\cdot(z-z_2)}\,dz.$$

Αλλά, $\forall z\in\gamma^*$, $|z|=2 \xRightarrow{(\text{υπόθεση})}$

$\Rightarrow |f(z)|\leq 1$ και

$|z-z_1|\geq |z|-|z_1|=2-|z_1|\geq 1,$

$|z-z_2|\geq - - - - \geq 1$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}\right|\leq \frac{1}{1\cdot 1}=1$$

$$\xRightarrow{(\text{ML-ανισ.})} \left|\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}\,dz\right|\leq 4\pi$$

κλπ