(*) δηλ. $\forall z_0 \in U, \exists r>0 \mid D(z_0,r) \subset U$, όπου $D(z_0,r) = \{ z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < r \}$.

ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΟΤΗΤΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ορισμός 1: Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό,(*) $f: U \to \mathbb{C}$ κ' $z_0 \in U$. Θα λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη (ή παραγωγίσιμη) στο z_0 ανν υπάρχει το όριο

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \qquad (1)$$

κ' είναι μιγαδικός αριθμός.

Σ' αυτή την περίπτωση, το παραπάνω όριο λέγεται παράγωγος της f στο z_0 κ' συμβολ. με

$$f'(z_0).$$

ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ:

f διαφορίσιμη στο z_0 ανν

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

<u>Σχόλιο:</u> Στην (2), η έκφραση $f(z_0+h)$

ορίζεται, για $|h|$ αρκετά "μικρό".

Πράγματι: εφ' όσον U ανοικτό κ' $z_0 \in U$, $\exists\, r>0 \mid D(z_0,r) \subseteq U$,

όπου $D(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C} \mid |z-z_0|<r\}$.

Για $|h|<r$, έχουμε $|(z_0+h)-z_0|=|h|<r$

$\Rightarrow z_0+h \in D(z_0,r) \subseteq U$

$\Rightarrow$ το $f(z_0+h)$ ορίζεται.

<u>Παραδείγματα:</u>

<u>(i)</u> $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=z^n$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$.

Εάν $z_0\in\mathbb{C}$, τότε, $\forall\, z\neq z_0$,

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{z^n-z_0^n}{z-z_0}=$$

$$=\frac{(z-z_0)\cdot(z^{n-1}+z^{n-2}\cdot z_0+\cdots+z_0^{n-1})}{z-z_0}$$

$$=\underbrace{z^{n-1}+z^{n-2}\cdot z_0+\cdots+z_0^{n-1}}_{n \text{ πλήθους όροι}}.$$

Άρα,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} =$$

$$= \underbrace{z_0^{n-1} + z_0^{n-1} + \cdots + z_0^{n-1}}_{n \text{ πλήθους}} = n z_0^{n-1}.$$

Επομένως, f διαφορ. στο z_0 με

$$f'(z_0) = n z_0^{n-1}.$$

(ii) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$, $z \in \mathbb{C}$.

Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$. $\forall h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \frac{\overline{z_0+h} - \overline{z_0}}{h}$$

$$= \frac{\overline{z_0} + \overline{h} - \overline{z_0}}{h} = \frac{\overline{h}}{h}$$

$$\frac{\overline{h}}{h} = \begin{cases} 1, & h \in \mathbb{R} \\ -1, & h \text{ φανταστικός} \end{cases}$$

Άρα, $\displaystyle\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{\overline{h}}{h} = 1$, $\displaystyle\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \text{ φαντ.}}} \frac{\overline{h}}{h} = -1$

$1 \neq -1 \Rightarrow$ δεν υπάρχει το $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\overline{h}}{h}$,

$\Rightarrow$ η f **δεν** είναι διαφορ. στο z_0.

Δηλ. η $z \mapsto \bar{z}$ <u>δεν είναι πουθενά διαφορίσιμη</u>, ενώ είναι <u>παντού συνεχής</u>.

Σημ. ότι είναι εξαιρετικά περίπλοκο να ορίσει κανείς συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που δεν είναι πουθενά διαφορ. (υπάρχει ένα παράδειγμα του Weierstrass!).

<u>(iii)</u> $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = |z|^2$, $z \in \mathbb{C}$.

Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$. $\forall h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \frac{|z_0+h|^2 - |z_0|^2}{h} =$$

$$= \frac{\cancel{|z_0|^2} + |h|^2 + z_0\bar{h} + \underline{\bar{z_0}h} - \cancel{|z_0|^2}}{h}$$

$$= \frac{|h|^2}{h} + z_0\frac{\bar{h}}{h} + \bar{z_0}$$

$$= \bar{h} + \bar{z_0} + z_0\frac{\bar{h}}{h} \quad (\text{σημ. } |h|^2 = h \cdot \bar{h}).$$

Εάν $z_0 \neq 0$, το $\lim\limits_{h \to 0} z_0 \frac{\bar{h}}{h}$ <u>δεν υπάρχει</u> (βλ. (ii)).

Επομένως, για $z_0 \neq 0$, το

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

δεν υπάρχει,

ενώ για $z_0 = 0$, το όριο ισούται με 0.

Άρα, f διαφορίσιμη μόνο στο $z_0 = 0$,

με $f'(0) = 0$.

Πρόταση 1: Εάν f διαφορίσιμη στο z_0, τότε f συνεχής στο z_0.
(Αποδεικνύεται εύκολα).

Πρόταση 2: Έστω U ανοικτό $\subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in U$

κ' $f, g : U \to \mathbb{C}$ διαφορίσιμες στο z_0.

Τότε:

(i) $f+g$, $f \cdot g$ διαφορ. στο z_0 με

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$$

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) g(z_0) + f(z_0) g'(z_0).$$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, η $\lambda \cdot f$ είναι διαφορ. στο z_0 με

$$(\lambda f)'(z_0) = \lambda f'(z_0).$$

(iii) εάν $g(z_0) \neq 0$, η f/g είναι διαφορ. στο z_0 με

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{[g(z_0)]^2}.$$

Η απόδειξη προκύπτει εύκολα από τον Ορισμό 1.

Πρόταση 3: (Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης)

Έστω $U, W \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτά, $f: U \to \mathbb{C}$, $g: W \to \mathbb{C}$, $z_0 \in U$, ώστε

- $f(U) \subseteq W$
- f διαφορ. στο z_0
- g διαφορ. στο $f(z_0)$.

$$U \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} \mathbb{C}$$

Τότε, $g \circ f$ διαφορ. στο z_0 με

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) f'(z_0).$$

<u>Απόδειξη:</u> Υπενθυμίζουμε το παρακάτω:

"(i) Έστω $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in A$. Τότε, f συνεχής στο z_0 <u>ανν</u> $\forall$ ακολουθία $(z_n) \subseteq A$ με $z_n \to z_0$, $\exists$ υπακολουθία (z_{k_n}) με $f(z_{k_n}) \to f(z_0)$"

(Βλ. αρχείο με τίτλο ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥ)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $G: U \to \mathbb{C}$ με

$$G(z) = \begin{cases} \dfrac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)}, & \text{αν } f(z) \neq f(z_0) \\ g'(f(z_0)), & \text{αν } f(z) = f(z_0). \end{cases}$$

<u>Ισχυρισμός:</u> G συνεχής στο z_0.

<u>Απόδ. Ισχυρισμού.</u> Έστω $(z_n) \subseteq U$ με $z_n \to z_0$.

Επειδή f <u>συνεχής</u> στο z_0, ισχύει

$$f(z_n) \to f(z_0).$$

<u>1η περίπτωση</u>: $f(z_n)=f(z_0)$, για άπειρα n. Τότε, $\exists\, k_1<k_2<k_3<\dots$ γνήσια αύξουσα ακολουθία φυσικών |

$$f(z_{k_n})=f(z_0),\quad n\geq 1.$$

Τότε, $G(z_{k_n})=g'(f(z_0))$, $n\geq 1$

$$\Rightarrow \quad G(z_{k_n}) \xrightarrow{n} g'(f(z_0))=G(z_0).$$

<u>2η περίπτωση</u>: $f(z_n)=f(z_0)$, μόνο για πεπερασμένα n. Τότε, $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ | $\forall n\geq n_0$, $f(z_n)\neq f(z_0)$

$$\Rightarrow \quad G(z_n)=\frac{g(f(z_n))-g(f(z_0))}{f(z_n)-f(z_0)}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} g'(f(z_0)),$$ <u>διότι g διαφορ. στο $f(z_0)$</u>.

Άρα $G(z_n)\to G(z_0)$.

Σε κάθε περίπτωση, υπάρχει υπακολ. (z_{k_n}) με $G(z_{k_n}) \to G(z_0)$ κ'

άρα G συνεχής στο z_0.
Ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Από τον ορισμό της G προκύπτει ότι

$$g(f(z)) - g(f(z_0)) =$$
$$= G(z)\cdot[f(z)-f(z_0)], \quad \underline{\forall z \in U} \ (!)$$

Οπότε, $\forall z \in U\setminus\{z_0\}$,

$$\frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z-z_0} =$$
$$= G(z)\cdot \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.$$

- G συνεχής στο $z_0 \Rightarrow \lim_{z\to z_0} G(z) = G(z_0)$,
- f διαφορ. στο $z_0 \Longrightarrow \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} =$

$$= f'(z_0)$$

Άρα, $\lim_{z\to z_0} \frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{z-z_0} = G(z_0)f'(z_0)$
$$= g'(f(z_0))f'(z_0).$$

$\boxtimes$

Ορισμός 2: Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό κ' $f : U \to \mathbb{C}$. Η f λέγεται ολόμορφη ή αναλυτική στο U αν η f είναι διαφορ. σε κάθε $z_0 \in U$.

Αν $f : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, ορίζεται η παράγωγος συνάρτηση f': $U \ni z \longmapsto f'(z) \in \mathbb{C}$

Συμβολισμός:

$$\mathcal{H}(U) = \{ f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ ολόμορφη} \}$$

Από την Πρόταση 2 προκύπτει ότι $\forall f, g \in \mathcal{H}(U)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, ισχύει:

$$f + g \in \mathcal{H}(U), \quad f \cdot g \in \mathcal{H}(U), \quad \lambda \cdot f \in \mathcal{H}(U),$$

$$f/g \in \mathcal{H}(U'), \text{ όπου}$$

$$U' = U \setminus \{ z \in U \mid g(z) = 0 \}.$$

Σημ. ότι U' ανοικτό, λόγω συνέχειας της g.

Επιπλέον, αν $U, W \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτά κ' $f \in \mathcal{H}(U)$, $g \in \mathcal{H}(W)$ με $f(U) \subseteq W$, τότε $g \circ f \in \mathcal{H}(U)$ (βλ. Πρότ. 3).

Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $f = u + iv : U \to \mathbb{C}$ κ' $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$.

Γνωρίζουμε ότι f συνεχής στο z_0 ανν οι $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ είναι συνεχείς στο (x_0, y_0).

Ισχύει άραγε κάτι ανάλογο για την διαφορισιμότητα;

Δηλ. ισχύει ότι f διαφορ. στο z_0 ανν u, v διαφορίσιμες στο (x_0, y_0)?

Όχι. π.χ. $f(z) = \bar{z}$, $u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$. Οι $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες αλλά f πουθενά διαφορ.!!

Επομένως, <u>δεν αρκεί</u> η διαφορισιμότητα των u, v στο (x_0, y_0) για να μας δώσει την διαφορισιμότητα της f στο $z_0 = x_0 + i y_0$.

<u>Χρειάζεται κάτι παραπάνω:</u>
<u>οι συνθήκες Cauchy–Riemann</u>
<u>στο (x_0, y_0).</u>

<u>Πρόταση 4:</u> Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $z_0 = x_0 + i y_0 \in U$ κ' $f : U \to \mathbb{C}$ διαφορ. στο z_0 με $f = u + iv$. <u>Τότε</u>, υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι

$$u_x(P_0),\ u_y(P_0),\ v_x(P_0),\ v_y(P_0),$$

$(P_0 \equiv (x_0, y_0))$ κ'

$$\left.\begin{cases} u_x(P_0) = v_y(P_0) \\ u_y(P_0) = -v_x(P_0) \end{cases}\right\} \text{Συνθήκες Cauchy Riemann (C–R)}$$

Επιπλέον, $f'(z_0) = u_x(P_0) + i v_x(P_0)$.

<u>Απόδειξη:</u> Υπενθυμίζουμε το παρακάτω:

« Έστω $F: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + i y_0$ σημείο συσσώρευσης του A κ' $L \in \mathbb{C}$. Τότε,

$$\lim_{z \to z_0} F(z) = L \Leftrightarrow \left[\lim_{(x,y) \to P_0} \operatorname{Re} F(x,y) = \operatorname{Re} L \text{ κ' } \lim_{(x,y) \to P_0} \operatorname{Im} F(x,y) = \operatorname{Im} L \right],$$

$P_0 \equiv (x_0, y_0)$. »

Έστω $h = h_1 + i h_2 \neq 0$ $(h_1, h_2 \in \mathbb{R})$ με $z_0 + h \in U$.

Έχουμε
$$z_0 = x_0 + i y_0,$$
$$z_0 + h = (x_0 + h_1) + i (y_0 + h_2),$$
$$f(z_0) = u(x_0, y_0) + i v(x_0, y_0) = u(P_0) + i v(P_0),$$
$$f(z_0 + h) = u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) + i v(x_0 + h_1, y_0 + h_2).$$

Θέτουμε

$$\lambda_h(z_0)=\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}.$$

Τότε, $\lim\limits_{h\to 0}\lambda_h(z_0)=f'(z_0)$.

<u>Ειδικότερα:</u>

- $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}\\ h_2=0}}\lambda_h(z_0)=f'(z_0)\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{h_1\to 0}\left[\frac{u(x_0+h_1,y_0)-u(x_0,y_0)}{h_1}+\right.$$

$$\left.+\,i\,\frac{v(x_0+h_1,y_0)-v(x_0,y_0)}{h_1}\right]=f'(z_0)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{h_1\to 0}\dfrac{u(x_0+h_1,y_0)-u(x_0,y_0)}{h_1}=\mathrm{Re}f'(z_0)\\[2ex] \lim\limits_{h_1\to 0}\dfrac{v(x_0+h_1,y_0)-v(x_0,y_0)}{h_1}=\mathrm{Im}f'(z_0).\end{cases}$$

$\Rightarrow \exists$ οι $u_x(P_0)$, $v_x(P_0)$, $P_0=(x_0,y_0)$ με

$$\boxed{u_x(P_0)=\mathrm{Re}f'(z_0),\ v_x(P_0)=\mathrm{Im}f'(z_0).}\quad (3)$$

• $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\ \text{φανταστ.}\\ (h_1=0)}} \partial_h(z_0) = f'(z_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{h_2\to 0}\left[\frac{u(x_0,y_0+h_2)-u(x_0,y_0)}{ih_2} + \right.$$

$$\left. + \cancel{i}\ \frac{v(x_0,y_0+h_2)-v(x_0,y_0)}{\cancel{i}h_2}\right] = f'(z_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{h_2\to 0}\left[\frac{v(x_0,y_0+h_2)-v(x_0,y_0)}{h_2} - \right.$$

$$\left. - i\ \frac{u(x_0,y_0+h_2)-u(x_0,y_0)}{h_2}\right] = f'(z_0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{h_2\to 0} \dfrac{v(x_0,y_0+h_2)-v(x_0,y_0)}{h_2} = \operatorname{Re} f'(z_0) \\ -\lim\limits_{h_2\to 0} \dfrac{u(x_0,y_0+h_2)-u(x_0,y_0)}{h_2} = \operatorname{Im} f'(z_0) \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists$ οι $u_y(P_0), v_y(P_0)$ $(P_0 = (x_0, y_0))$

με

$$\boxed{u_y(P_0) = -\operatorname{Im} f'(z_0),\ v_y(P_0) = \operatorname{Re} f'(z_0)} \quad (4)$$

$(3), (4) \Rightarrow \boxed{u_x(P_0) = v_y(P_0),\ u_y(P_0) = -v_x(P_0)}$

Επιπλέον, $f'(z_0) = \operatorname{Re} f'(z_0) + i \operatorname{Im} f'(z_0)$

$$\overset{(3)}{=} u_x(P_0) + i v_x(P_0). \quad \boxtimes$$

<u>Σχόλιο:</u> <u>Το αντίστροφο της Πρότασης 4 δεν ισχύει γενικά!!</u>

<u>Παράδειγμα:</u> $f = u + iv$,

$$u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$v(x,y) = u(x,-y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

$\forall x \neq 0$, $\dfrac{u(x,0) - u(0,0)}{x - 0} = \dfrac{x^3/x^2}{x} = 1 \xrightarrow{x \to 0} 1$

$$\Rightarrow \boxed{u_x(0,0) = 1}$$

$$\frac{v(x,0)-v(0,0)}{x-0} = 1 \xrightarrow{x\to 0} 1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_x(0,0)=1}$$

$\forall y \neq 0,$
$$\frac{u(0,y)-u(0,0)}{y-0} = \frac{-y^3/y^2}{y} = -1 \xrightarrow{y\to 0} -1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{u_y(0,0)=-1}$$

$$\frac{v(0,y)-v(0,0)}{y-0} = \frac{u(0,-y)}{y} = \frac{y^3/y^2}{y} =$$
$$= 1 \xrightarrow{y\to 0} 1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_y(0,0)=1}$$

Άρα, $\underline{u_x(0,0)=v_y(0,0)}$, $\underline{u_y(0,0)=-v_x(0,0)}$,
οπότε ικανοποιούνται οι (C-R) στο $(0,0)$.

$\forall z=x+iy \neq 0$, έχουμε

$$\lambda_0(z) = \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \frac{u(x,y)+iv(x,y)}{x+iy}$$
$$= \frac{u(x,y)+iu(x,-y)}{x+iy}$$

- $$\lim_{\substack{z\to 0\\ z=x\in\mathbb{R}}} \lambda_0(z) = \lim_{x\to 0} \frac{u(x,0)+iu(x,0)}{x}$$
$$= \underline{1+i}$$

- $$\lim_{\substack{z\to 0\\ z=x+ix\\ x\in\mathbb{R}}} \lambda_0(z) = \lim_{x\to 0} \frac{u(x,x)+iu(x,-x)}{x+ix}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{0+i\,\frac{2x^3}{2x^2}}{x(1+i)}$$

$$= \frac{i}{1+i}$$

$1+i \neq \frac{i}{1+i} \rightarrow$ η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $z_0=0$.

Παρ' όλ' αυτά, ισχύει το παρακάτω

Θεώρημα 5 (Θ. Cauchy-Riemann)

Έστω $U\subseteq\mathbb{C}$ ανοικτό, $f=u+iv: U\to\mathbb{C}$ κ' $z_0=x_0+iy_0\in U$. Υποθέτουμε ότι:

(i) ικανοποιούνται οι συνθήκες C-R στο $P_0=(x_0,y_0)$, δηλ.
$u_x(P_0)=v_y(P_0)$, $u_y(P_0)=-v_x(P_0)$.

(ii) u, v διαφορίσιμες στο P_0.

Τότε, f διαφορίσιμη στο z_0 κ'

$$f'(z_0)=u_x(P_0)+iv_x(P_0).$$

Απόδειξη (παραλείπεται)

<u>Σχόλιο:</u> Στο Θ.5, η υπόθεση (ii) στην πράξη συνήθως αντικαθίσταται από την <u>ισχυρότερη</u>:

<u>(ii)′</u>: <u>∃ οι u_x, u_y, v_x, v_y σε περιοχή</u> V <u>του P_0 κ' είναι συνεχείς στο V.</u>

Γνωρίζουμε από την Ανάλ. ΙΙ ότι
$$\underline{(ii)' \Rightarrow (ii)}.$$

Το Θ.5 εφαρμόζεται άμεσα στην εκθετική συνάρτηση.

<u>Πρόταση 6</u>: Η $z \mapsto e^z$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ κ' $(e^z)' = e^z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

<u>Απόδειξη</u>: $f(z) = e^z$, $z \in \mathbb{C}$.

Τότε, $f = u + iv$, όπου
$$u(x,y) = e^x \cos y, \quad v(x,y) = e^x \sin y,$$
$(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Οι u, v είναι <u>διαφορίσιμες στο $\mathbb{R}^2$</u> κ'
$$u_x = u, \quad u_y = -v, \quad v_x = v, \quad v_y = u$$
$$\Rightarrow \quad \underline{u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \text{ στο } \mathbb{R}^2} \quad \underline{\underline{(C\text{-}R)}}$$
$\overset{\Theta.5}{\Rightarrow}$ f ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ κ'

$\forall\, z = x+iy \in \mathbb{C}$,

$$f'(z) = u_x + i v_x = u + iv = f(z). \quad \boxtimes$$

<u>Πρόταση 7</u>: Η συνάρτηση $w \mapsto \mathrm{Log}\, w$ είναι ολόμορφη στο $A = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ κ'

$$(\mathrm{Log}\, w)' = \frac{1}{w}, \ \forall w \in A.$$

<u>Απόδειξη</u>: Η συνάρτηση Log είναι συνεχής (μόνο) στα σημεία $w \in A$ (βλ. αρχείο ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥ).

Έστω $w_0 \in A$. Για $w \neq w_0$, $w \neq 0$, θέτουμε

$z = \mathrm{Log}\, w$, $z_0 = \mathrm{Log}\, w_0$, οπότε

$$w = e^z, \quad w_0 = e^{z_0}$$

κ'

$$\frac{\mathrm{Log}\, w - \mathrm{Log}\, w_0}{w - w_0} = \frac{z - z_0}{e^z - e^{z_0}}.$$

Επειδή η Log είναι συνεχής στο w_0, έχουμε ότι $z \to z_0$, καθώς $w \to w_0$.

Άρα, $\displaystyle\lim_{w \to w_0} \frac{\mathrm{Log}\, w - \mathrm{Log}\, w_0}{w - w_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{e^z - e^{z_0}} =$

$$= \lim_{z\to z_0} \frac{1}{\frac{e^z - e^{z_0}}{z-z_0}} = \frac{1}{(e^z)'|_{z=z_0}} = \frac{1}{e^{z_0}} = \frac{1}{w_0}. \quad \boxtimes$$

Επειδή
$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \quad z\in\mathbb{C},$$
παίρνουμε εύκολα (δόξμ Πρότ. 6) ότι

$$\underline{(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z, \quad z \in \mathbb{C}.}$$

Π.χ. $[\sin(z^3)]' = 3z^2\cos(z^3), \quad z\in\mathbb{C},$

$$[\cos(e^z)]' = -e^z\sin(e^z), \quad z\in\mathbb{C}.$$

Συχνά ο έλεγχος των Cauchy-Riemann απαιτεί περίπλοκους υπολογισμούς. Υπάρχει εναλλακτική μέθοδος.

Έστω $f = u+iv : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (U ανοικτό).

$\forall\, z = x+iy \in U$, $x = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $y = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$,

οπότε η f μπορεί να θεωρηθεί κ' ως συνάρτηση των $z, \bar{z}$.

Ισχύει η παρακάτω:

<u>Πρόταση 8</u>: Έστω $z_0 \in U$, $z_0 = x_0 + iy_0$.

Υποθέτουμε ότι u, v διαφορίσιμες στο z_0. Τότε,

$$\left[f \text{ διαφορ. στο } z_0 \right] \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0.$$

Σ' αυτή την περίπτωση,

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$$

<u>Απόδειξη</u>: Θέτουμε

$$\varphi(z,\bar{z}) = u\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right), \; \psi(z,\bar{z}) = v\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)$$

$$, x = \frac{1}{2}(z+\bar{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = u_x \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + u_y \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(u_x - \frac{1}{i} u_y\right)$$

$$= \frac{1}{2}(u_x + i u_y),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} = \cdots = \frac{1}{2}(v_x + i v_y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left[(u_x + i u_y) + i(v_x + i v_y)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(u_x - v_y) + i(u_y + v_x)\right]$$

$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0 \Leftrightarrow$ ισχύουν οι C-R στο (x_0, y_0)

Επειδή u, v διαφορ. στο (x_0, y_0),
από το Θ.5 προκύπτει η ισοδυναμία
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)=0 \Leftrightarrow f \text{ διαφορ. στο } z_0.$$
Επιπλέον, με παρόμοιο τρόπο παίρνουμε
$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left[(u_x+v_y)+i(v_x-u_y)\right]$$
οπότε αν $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)=0$, έχουμε
$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)=\frac{1}{2}\left(2u_x(P_0)+i\,2v_x(P_0)\right)$$
$$=u_x(P_0)+iv_x(P_0)$$
$$=f'(z_0),\quad P_0=(x_0,y_0).$$

$\boxtimes$

<u>Εφαρμογή</u>: Να βρείτε σε ποιά $z_0 \in \mathbb{C}$ η $\sin(\bar{z})$ είναι διαφορίσιμη κ' να υπολογίσετε την παράγωγο σε αυτά τα σημεία.

<u>Λύση</u>: $$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left[\sin(\bar{z})\right]=0 \Leftrightarrow \cos(\bar{z})=0$$
$$\Leftrightarrow z=z_k=k\pi+\frac{\pi}{2},\quad k\in\mathbb{Z}$$
Η παράγωγος είναι $\left.\frac{\partial}{\partial z}\left[\sin(\bar{z})\right]\right|_{z=z_k}=0, k\in\mathbb{Z}$.

<u>Μια χαρακτηριστική άσκηση:</u>

Να βρεθεί η ολόμορφη συνάρτηση $f = u + iv : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ώστε

$u = x^2 - y^2 + e^{-y}\sin x - e^{y}\cos x$, $f(0) = -1$.

<u>Λύση:</u> Από συνθήκες C-R έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} v_y = u_x \\ v_x = -u_y \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} \underline{v_y = 2x + e^{-y}\cos x + e^{y}\sin x} & (1) \\ \underline{v_x = 2y + e^{-y}\sin x + e^{y}\cos x} & (2) \end{array}$$

Ολοκληρώνοντας την (1) ως προς y έχουμε

$$\underline{v = 2xy - e^{-y}\cos x + e^{y}\sin x + c(x)} \qquad (3)$$

$$(3) \Rightarrow v_x = 2y + e^{-y}\sin x + e^{y}\cos x + c'(x)$$

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} v_x = v_x + c'(x) \Rightarrow c'(x) = 0$$

$$\Rightarrow c(x) = c \in \mathbb{R}$$

Τώρα η (3) γράφεται

$$v = 2xy - e^{-y}\cos x + e^{y}\sin x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

όμως, $-1 = f(0) = u(0,0) + i\,v(0,0)$

$$= -1 + i(c-1)$$

$$\Rightarrow c - 1 = 0 \Rightarrow c = 1.$$ Άρα,

$\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = (x^2 - y^2 + e^{-y}\sin x - e^{y}\cos x) +$$
$$+ i(2xy - e^{-y}\cos x + e^{y}\sin x + 1).$$

<u>Σχόλιο</u>: Ολοκληρώνοντας την (1) ως προς y, η <u>σταθερά ολοκλήρωσης εν γένει εξαρτάται από το x</u>, γι' αυτό παίρνουμε την (3) με "$c(x)$" κι όχι "c". Στη συνέχεια προκύπτει ότι $c(x) = c =$ = σταθερά αλλά αυτό είναι συμπτωματικό.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΛΟΜΟΡΦΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Προαπαιτούμενα

Ορισμός 1.1. Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα, $\varphi: I \to \mathbb{C}$ κ' $t_0 \in I$.

Η φ λέγεται διαφορίσιμη στο t_0 ανν οι συναρτήσεις $u = \mathrm{Re} f$, $v = \mathrm{Im} f$ είναι παραγωγίσιμες στο t_0.

Σ' αυτή την περίπτωση γράφουμε

$$\varphi'(t_0) = u'(t_0) + i v'(t_0).$$

Οι διαφορίσιμες συναρτήσεις της μορφής $\varphi(t) = u(t) + iv(t)$, $t \in I$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα) έχουν όλες τις ιδιότητες που έχουν οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις πάνω σε διαστήματα, εκτός από το Θ. Rolle

<u>π.χ.</u> $\varphi(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

$\varphi(0) = \varphi(2\pi) = 1$ αλλά $\varphi'(t) = ie^{it} \neq 0$ $\forall t \in (0, 2\pi)$.

<u>Παρατήρηση 1.2.</u> Εάν $\varphi(t) = u(t) + iv(t)$, $t \in I$, διαφορίσιμη στο I με $\varphi'(t) = 0$, $\forall t \in I$, τότε $\varphi =$ σταθερή στο I.

Πράγματι σ' αυτή την περίπτωση,
$u'(t) = v'(t) = 0$, $t \in I \Rightarrow u, v$ σταθερές στο I.

<u>Πρόταση 1.3.</u> Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $f: U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη κ' $\varphi: I \to U$ διαφορ. ($I \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό). Τότε,

$$\frac{d}{dt}[f(\varphi(t))] = f'(\varphi(t))\varphi'(t), \quad t \in I.$$

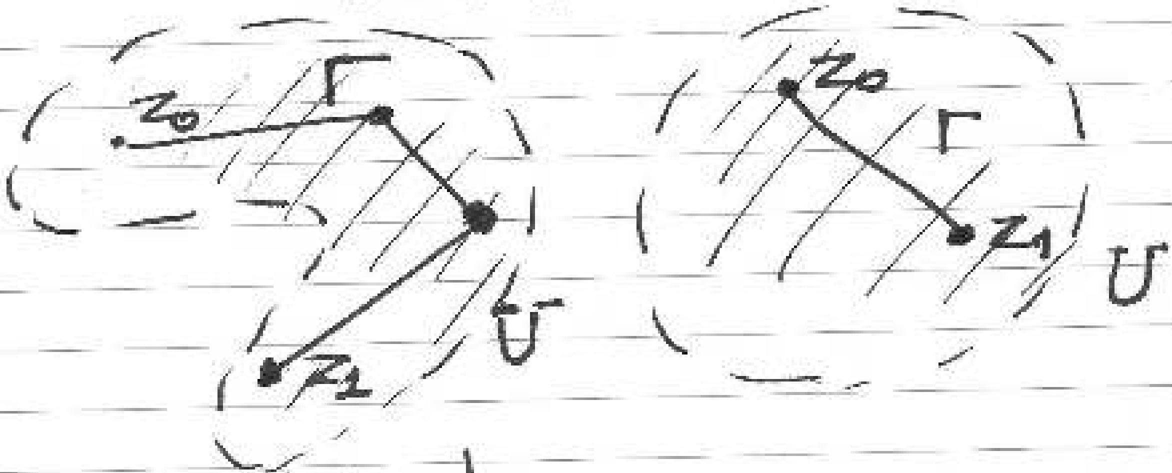
Έστω $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$. Το ευθ. τμήμα με αρχή το z_0 κ' πέρας το z_1 είναι το

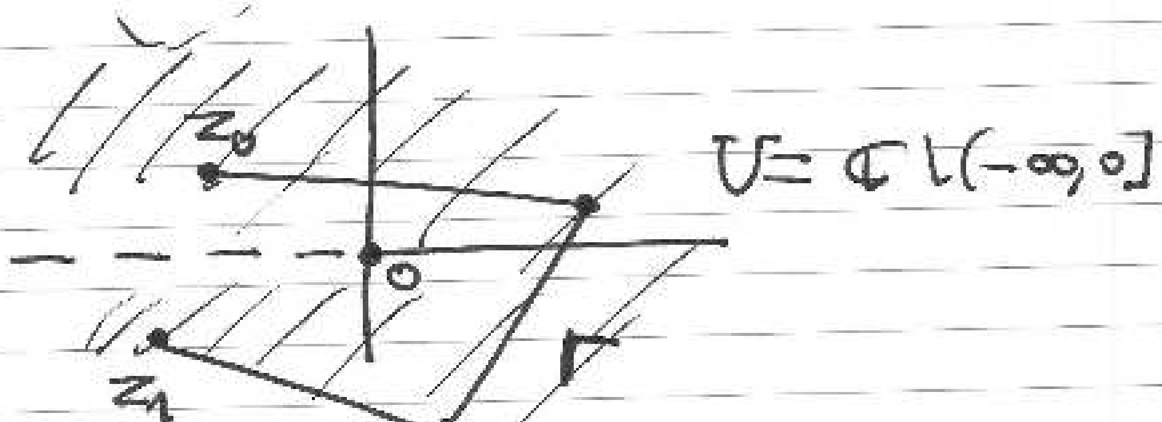
$$[z_0, z_1] = \{(1-t)z_0 + tz_1 \mid t \in [0,1]\}$$

Ορισμός 1.4. Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό.

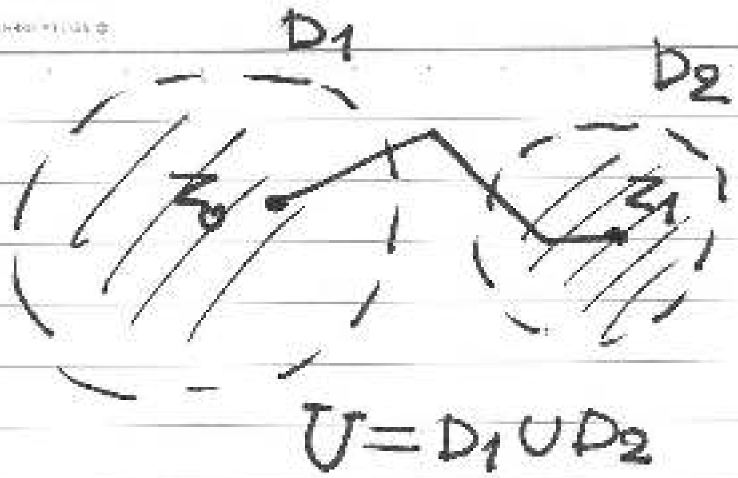
Το U λέγεται συνεκτικό αν $\forall z_0, z_1 \in U$ $\exists$ τεθλασμένη γραμμή $\Gamma \subset U$ που συνδέει τα z_0, z_1.

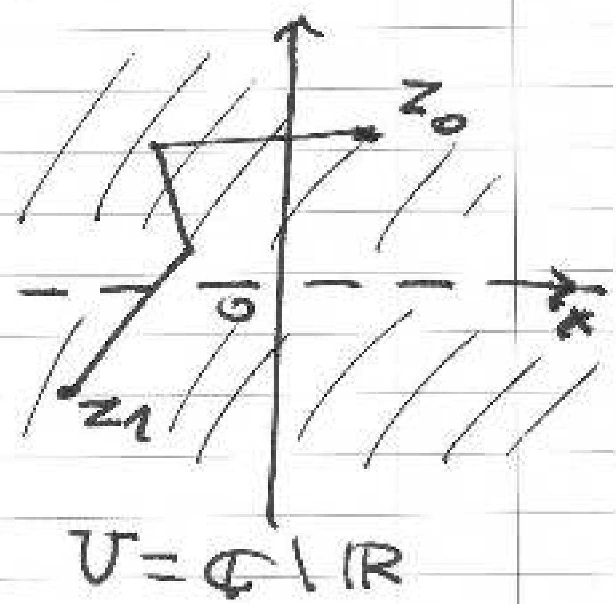
Π.χ. τα παρακάτω σύνολα είναι συνεκτικά.





Τα παρακάτω σύνολα δεν είναι συνεκτικά.





Και στις δύο περιπτώσεις, κάθε τεθλασμένη γραμμή που συνδέει τα $z_0, z_1 \in U$ έχει σημεία της εκτός του U.

<u>Σχόλιο</u>: Τα συνεκτικά ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι τα ανοικτά διαστήματα. Η έννοια του συνεκτικού συνόλου στο $\mathbb{C}$ επεκτείνει την έννοια του διαστήματος.

<u>Πρόταση 1.5.</u>: Έστω U <u>ανοικτό</u>, <u>συνεκτικό</u> $\subseteq \mathbb{C}$ κ' $f \in \mathcal{H}(U)$ με $f'(z) = 0$, $\forall z \in U$. Τότε, f σταθερή στο U.

Απόδειξη:

Ισχυρισμός: Εάν $z_0, z_1 \in U$ με $[z_0, z_1] \subset U$, τότε η f είναι σταθερή στο $[z_0, z_1]$.

[Πράγματι· $\forall t \in (0,1)$,

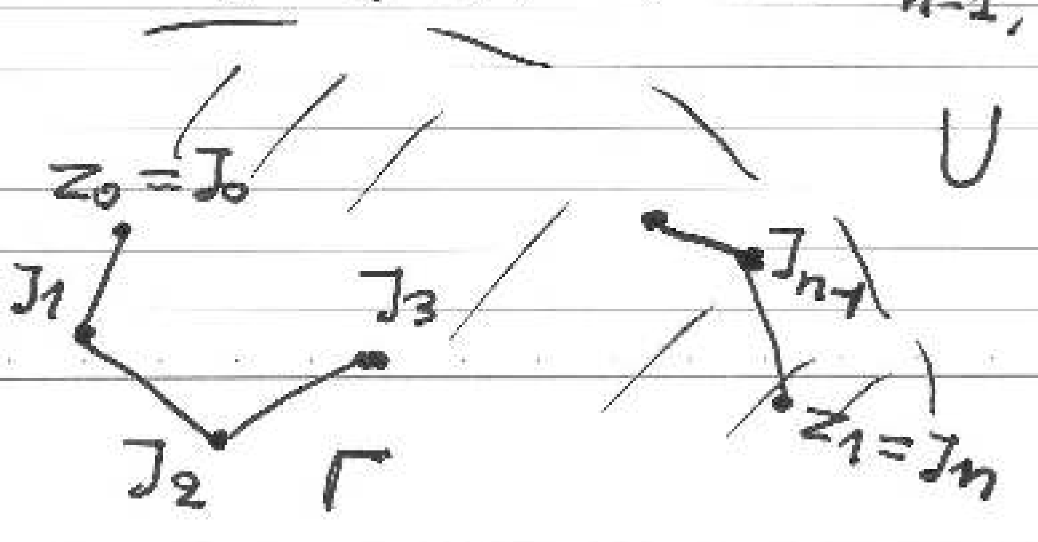
$$\frac{d}{dt}\left[f((1-t)z_0 + tz_1)\right] =$$

$$= f'((1-t)z_0 + tz_1) \cdot \frac{d}{dt}\left[(1-t)z_0 + tz_1\right]$$

$= f'((1-t)z_0 + tz_1) \cdot (z_1 - z_0) = 0$, αφού $f' = 0$, στο U.]

Έστω τώρα $z_0, z_1 \in U$. Εφόσον U συνεκτικό, $\exists$ τεθλασμένη γραμμή $\Gamma \subset U$ με κορυφές

$J_0 = z_0, J_1, J_2, \cdots, J_{n-1}, J_n = z_1$ $(n \geq 2)$



Λόγω του ισχυρισμού, η f είναι σταθερή στα διαστήματα
$[z_0, J_1], [J_1, J_2], \dots, [J_{n-2}, J_{n-1}]$,
$[J_{n-1}, z_1]$.

Άρα,
$$f(z_0) = f(J_1),\ f(J_1) = f(J_2), \dots,$$
$$f(J_{n-2}) = f(J_{n-1}),\ f(J_{n-1}) = f(z_1)$$
$$\Longrightarrow f(z_0) = f(z_1),\ \forall z_0, z_1 \in U.$$

Επομένως, f σταθερή. $\boxtimes$

<u>Σχόλιο:</u> Η συνεκτικότητα του U στην Πρόταση 1.5 <u>δεν μπορεί να παραλειφθεί γενικά.</u>

<u>Π.χ.</u> $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 2\}$,
$U = D_1 \cup D_2$.

Το U είναι ανοικτό, <u>μη</u> συνεκτικό.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : U \to \mathbb{C}$ με
$$f(z) = \begin{cases} 1, & z \in D_1 \\ 0, & z \in D_2 \end{cases}.$$ Τότε,

$f \in \mathcal{H}(U)$, $f' = 0$ στο U κ' f μη σταθερή.

<u>Ορισμός 1-6.</u> <u>Πεδίο</u> στο $\mathbb{C}$, είναι ένα ανοικτό, συνεκτικό σύνολο $\subseteq \mathbb{C}$.

<u>Πρόταση 1.7:</u> Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο κ' $f \in \mathcal{H}(U)$. Ισχύουν τα παρακάτω:

<u>(i)</u> Εάν $\mathrm{Re} f$ ή $\mathrm{Im} f$ σταθερή, τότε f σταθερή.

<u>(ii)</u> Εάν $\overline{f} \in \mathcal{H}(U)$, τότε f σταθερή.

<u>(iii)</u> Εάν $|f|$ σταθερή, τότε f σταθερή.

<u>Απόδειξη:</u> <u>(i)</u> $u = \mathrm{Re} f$, $v = \mathrm{Im} f$.

Ας υποθέσουμε ότι $u =$ σταθερή. Τότε, $u_x = u_y = 0$, στο U. Από συνθήκες (C-R) παίρνουμε $v_x = -u_y = 0$, στο U

$\Rightarrow f' = u_x + i v_x = 0$, στο U

$\xRightarrow{(\text{Πρότ. } 1.5)}$ f σταθερή. [Όμοια, αν v σταθερή.]

<u>(ii)</u> $\overline{f} = u - iv$, $u = \mathrm{Re} f$, $v = \mathrm{Im} f$

(C-R) για την f: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$

(C-R) " " $\overline{f}$: $u_x = -v_y$, $u_y = v_x$.

Έπεται ότι $u_x = v_x = 0 \Rightarrow f' = 0$, στο U

$\xRightarrow{(\text{Πρότ. } 1.5)}$ $f =$ σταθερή.

(iii) Έστω $|f| = c =$ σταθερή $\in [0, +\infty)$.

- αν $c = 0$, τότε $f = 0$, στο U.
- Έστω ότι $c \neq 0$. Τότε, $\forall z \in U$,

$$|f(z)|^2 = c^2 \Rightarrow f(z)\cdot\overline{f(z)} = c^2$$

$$\Rightarrow \overline{f(z)} = \frac{c^2}{f(z)}, \forall z \in U \Rightarrow \overline{f} \in \mathcal{H}(U)$$

$$\overset{(ii)}{\Rightarrow} f \text{ σταθερή.}$$

$\boxtimes$

Άσκηση 1: Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο και $f \in \mathcal{H}(U)$.

(i) Αν $e^f =$ σταθερή, τότε $f =$ σταθερή.
(ii) Αν $f(z)\cdot f'(z) = 0$, $\forall z \in U$, τότε $f =$ σταθερή.

Απόδειξη: (i) $(e^f)' = 0 \Rightarrow f' e^f = 0$ στο U $\Rightarrow f' = 0$, στο U $\Rightarrow f =$ σταθερή.

(ii) Θέτω $g = f^2$. Τότε, $g' = 2f\cdot f' = 0$

$\Rightarrow g =$ σταθερή στο U, έστω $g = c \in \mathbb{C}$.

Τότε,
$$|f|^2 = |g| = |c| \Rightarrow |f| = \sqrt{|c|}$$

$$\Rightarrow |f| = \text{σταθερή} \xrightarrow{(\text{Πρότ. } 1.7)} f = \text{σταθερή.}$$

$\boxtimes$

<u>Άσκηση 2:</u> Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο κ' $f, g \in \mathcal{H}(U)$ ώστε $f(z) + \overline{g(z)} \in \mathbb{R}$, $\forall z \in U$.

Να δ.ο. $\exists\, c \in \mathbb{R} \mid f(z) = c + g(z)$, $\forall z \in U$.

<u>Απόδειξη:</u> Θέτω $h = f - g$.

Τότε, $\forall z \in U$, $f(z) + \overline{g(z)} = \overline{f(z) + \overline{g(z)}} =$

$= \overline{f(z)} + \overline{\overline{g(z)}} = \overline{f(z)} + g(z)$

$\Rightarrow h(z) = \overline{h(z)}$, $\forall z \in U \Rightarrow h, \overline{h} \in \mathcal{H}(U)$

$\xRightarrow{\text{Πρότ. 1.5}}$ $h = c =$ σταθερή. Αλλά, $\overline{c} = c$

$\Rightarrow c \in \mathbb{R}$. ☒

<u>Άσκηση 3:</u> Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο κ'

$f : U \to \mathbb{C}$ μια συνάρτηση ώστε

$f^3 \in \mathcal{H}(U)$, $\overline{f}^2 \in \mathcal{H}(U)$.

Να δ.ο. f σταθερή.

<u>Απόδειξη:</u> $f^6 = (f^3)^2 \in \mathcal{H}(U)$,

$\overline{f^6} = (\overline{f}^2)^3 \in \mathcal{H}(U) \xRightarrow{\text{(Πρότ. 1.5)}} f^6 =$ σταθερή.

Τότε, $|f|^6 = |f^6| =$ σταθερή

$\Rightarrow |f| =$ σταθερή

$\Rightarrow |f| = c \geq 0$.

Τότε, $|f^3| = c^3$, $|\bar{f}^2| = |\bar{f}|^2 = |f|^2 = c^2$

$\xRightarrow{(\text{Πρότ. } 1.7)}$ $f^3 = c_1 \in \mathbb{C}$, $f^2 = c_2 \in \mathbb{C}$.$^{(+)}$

$\Rightarrow$ $c_1 = c_2 \cdot f(z)$, $\forall z \in U$.

- Αν $c_2 = 0$, τότε $f = 0$, στο U.

- Αν $c_2 \neq 0$, τότε $f(z) = c_1/c_2$, $\forall z \in U$.

Άρα, $f =$ σταθερή σε κάθε περίπτωση.

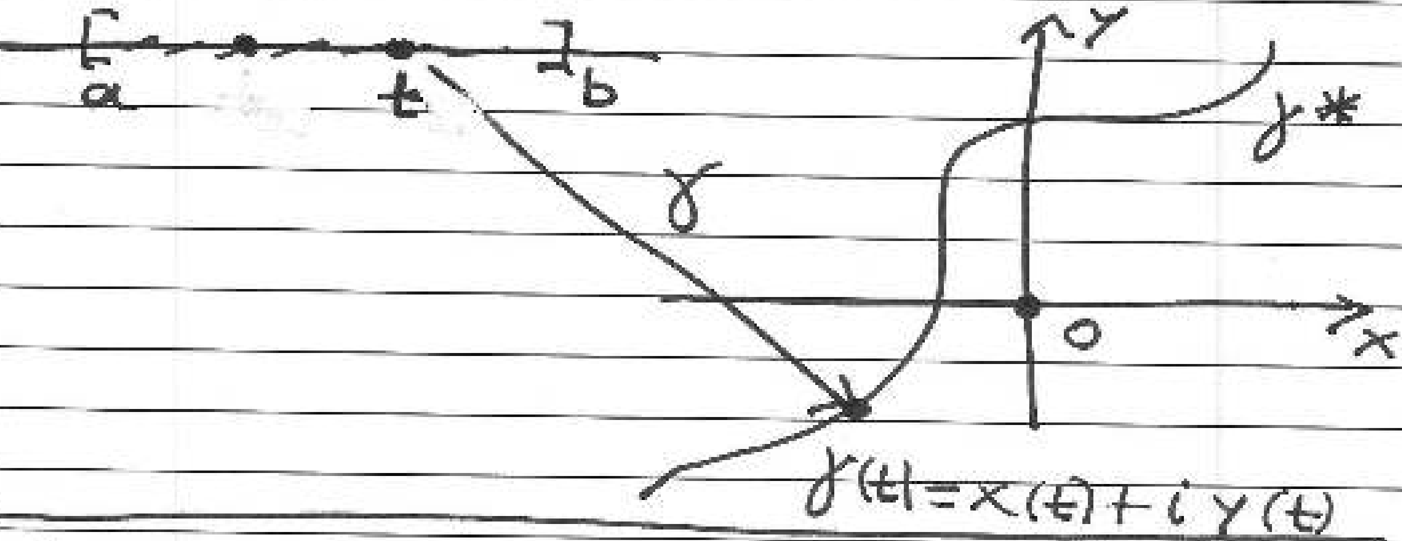
(+) Είναι $\bar{f}^2 \in \mathcal{H}(U)$ κ' $|\bar{f}^2| =$ σταθερή

$\xRightarrow{\text{Πρότ. } 1.7}$ $\bar{f}^2 =$ σταθερή

$\Rightarrow$ $f^2 =$ σταθερή.

Στοιχεία καμπυλών στο μιγαδικό επίπεδο

Ορισμός 1. Καμπύλη στο $\mathbb{C}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.



$\forall\, t \in [a,b]$, $\gamma(t) = x(t) + i y(t)$, όπου

$$x(t) = \operatorname{Re}\gamma(t), \quad y(t) = \operatorname{Im}\gamma(t).$$

Έτσι, ορίζονται δύο συναρτήσεις

$$x, y : [a,b] \to \mathbb{R}$$

με $\gamma(t) = x(t) + i y(t)$, $\forall\, t \in [a,b]$.

Το σύνολο $\gamma^* = \gamma([a,b]) = \{\gamma(t) \mid t \in [a,b]\}$ λέγεται ίχνος της γ.

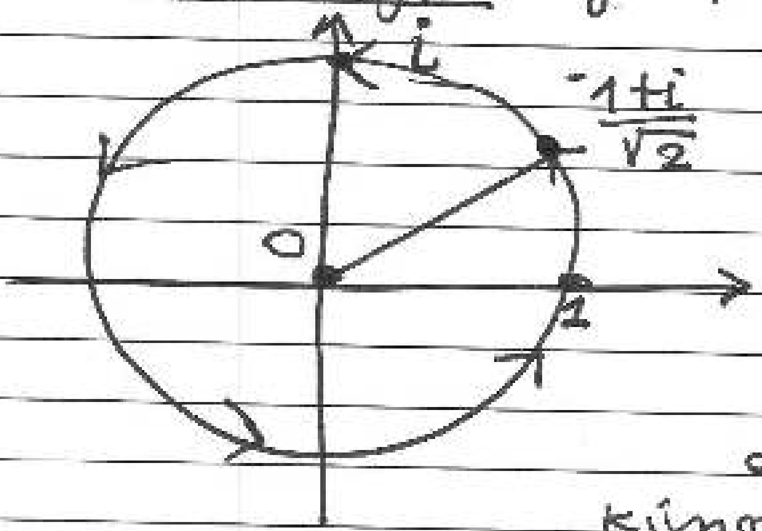
Το $\gamma(a)$ καλείται <u>αρχή</u> κ' το $\gamma(b)$ <u>πέρας</u> της καμπύλης γ.

Στα σημεία του γ^* ορίζεται μια φυσιολογική διάταξη:

" Το σημείο $\gamma(t_1)$ προηγείται του $\gamma(t_2)$ ανν $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in [a,b]$."

Με αυτόν τον τρόπο καθορίζουμε τη <u>φορά διαγραφής</u> του γ^*.

<u>Παράδειγμα:</u> $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.



γ^* = ο μοναδιαίος κύκλος κέντρου 0

με φορά διαγραφής <u>θετική</u>, δηλ.

αντίθετα από τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Πράγματι, $0 < \pi/4 < \pi/2$, οπότε

- το $\gamma(0) \equiv (1,0)$ "προηγείται" του $\gamma(\pi/4) \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
- το $\gamma(\pi/4) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ "προηγείται" του

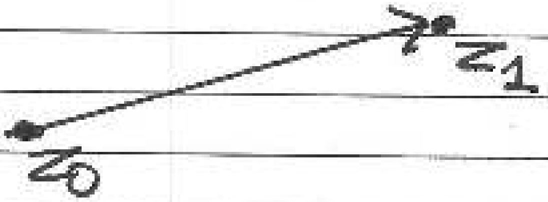
$$\gamma(\pi/2) \equiv (0,1).$$

Συχνά "ταυτίζουμε" μια καμπύλη με το ίχνος της. [Παρ' όλ' αυτά οι δύο έννοιες είναι διαφορετικές.]

<u>Παραδείγματα:</u>

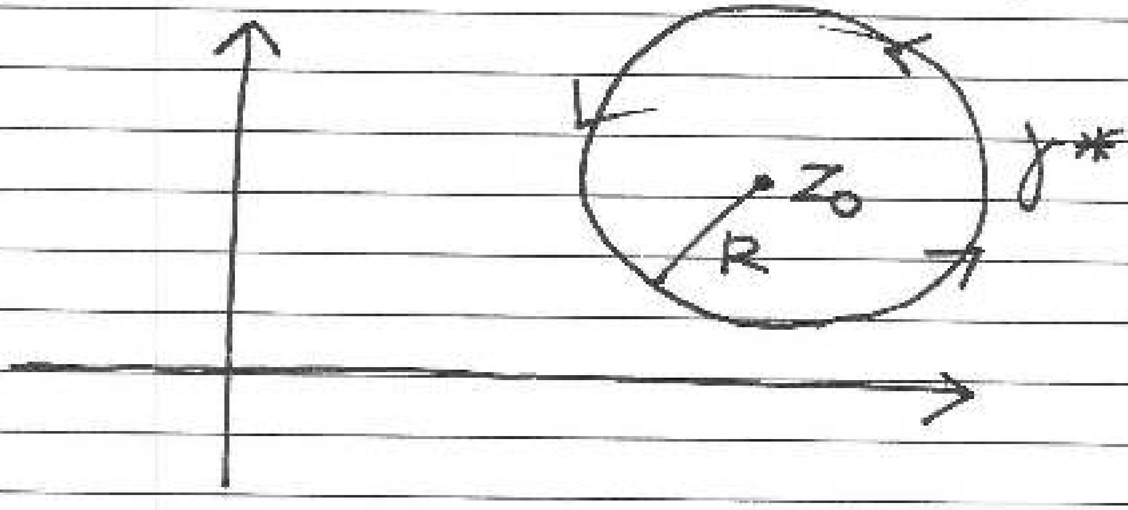
(i) Έστω $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ κ' $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$ με $\gamma(t)=(1-t)z_0+tz_1$, $t\in[0,1]$.

$\gamma^* = [z_0, z_1]$ = το προσανατολισμένο ευθ. τμήμα με αρχή το z_0 κ' πέρας το z_1.



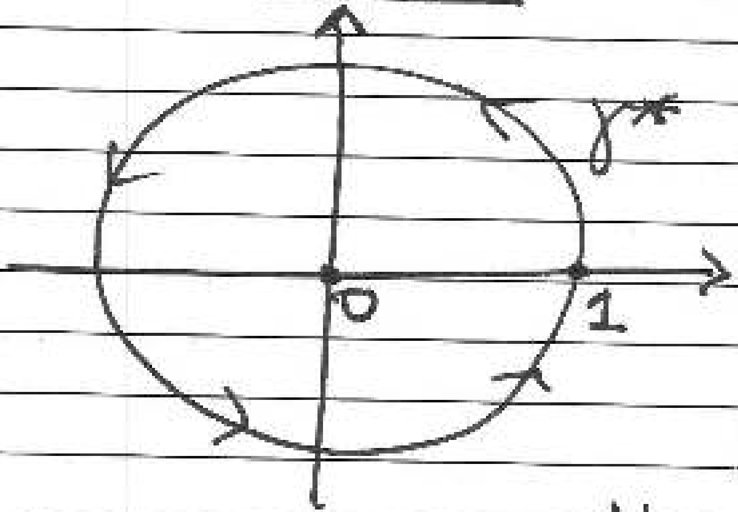
(ii) Έστω $z_0\in\mathbb{C}$, $R>0$ κ' $\gamma_R:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ με $\gamma_R(t)=z_0+Re^{it}$.

γ^* = ο κύκλος με κέντρο z_0 κ' ακτίνα R, με θετική φορά διαγραφής



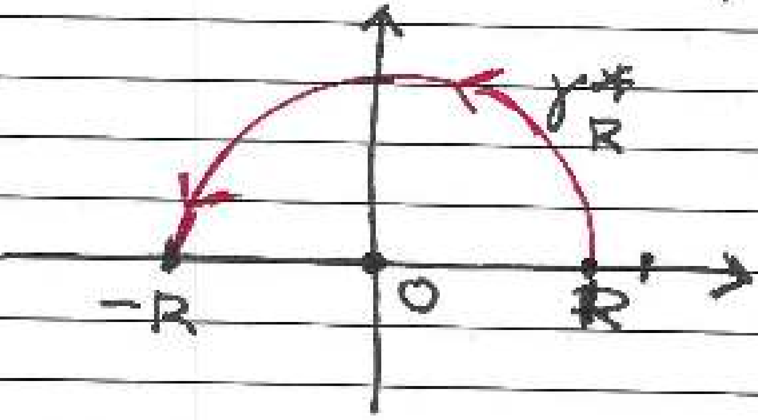
(iii) $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 4\pi]$.

$\gamma^* =$ ο μοναδιαίος κύκλος που διαγράφεται 2 φορές κατά την θετική φορά



(iv) $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$ $(R > 0)$.

$\gamma^*_R =$ το άνω ημικύκλιο κέντρου 0 κ' ακτίνας R με θετική φορά διαγραφής.



<u>Ορισμός 2.</u> Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ καμπύλη.

Η γ λέγεται

- <u>κλειστή</u>, αν $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- <u>απλή</u>, αν η $\gamma|_{[a,b)}$ είναι 1-1 (δηλ. το γ^* "δεν τέμνει τον εαυτό του")

<u>Παραδείγματα:</u>

(i) $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ $(R > 0,\ z_0 \in \mathbb{C})$.

Η γ είναι απλή, κλειστή.

(ii) $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 4\pi]$

Η γ είναι κλειστή, όχι απλή

(iii) $\gamma : [-\pi/2, 2\pi] \to \mathbb{C}$

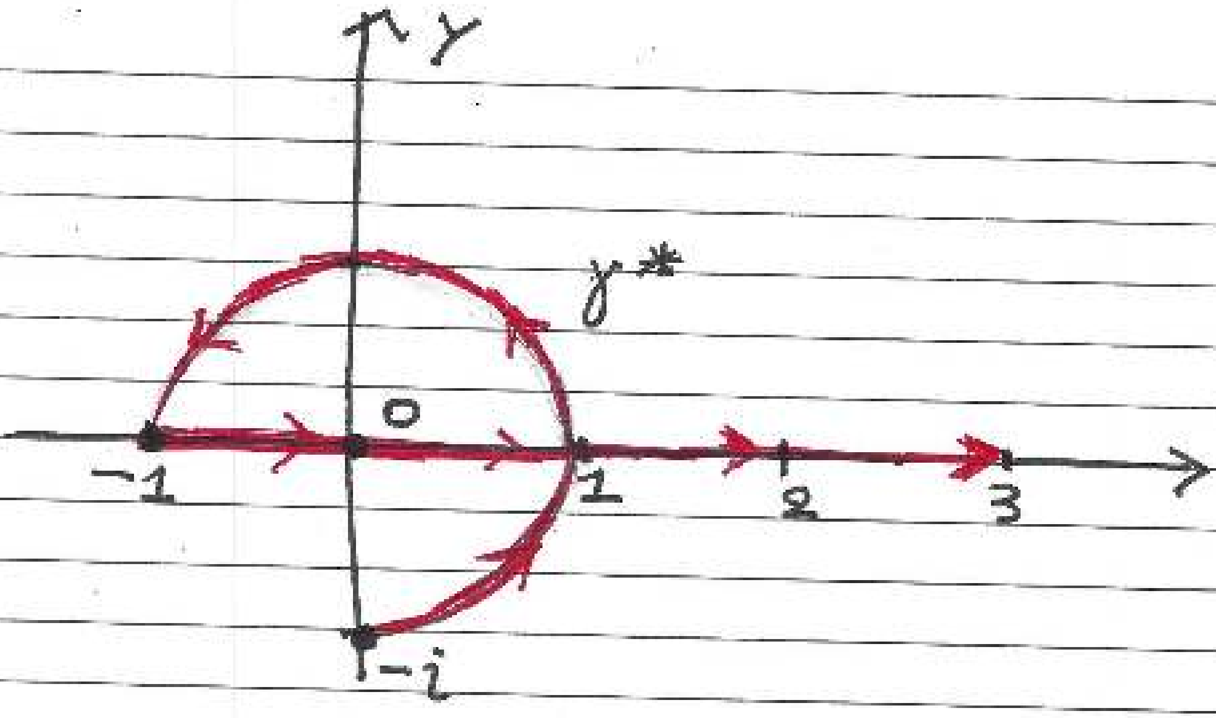
$$\gamma(t) = \begin{cases} e^{it}, & t \in [-\pi/2, \pi] \\ \frac{4t}{\pi} - 5, & t \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

$\gamma(-\pi/2) = -i$, $\gamma(0) = \gamma(3\pi/2) = 1$,

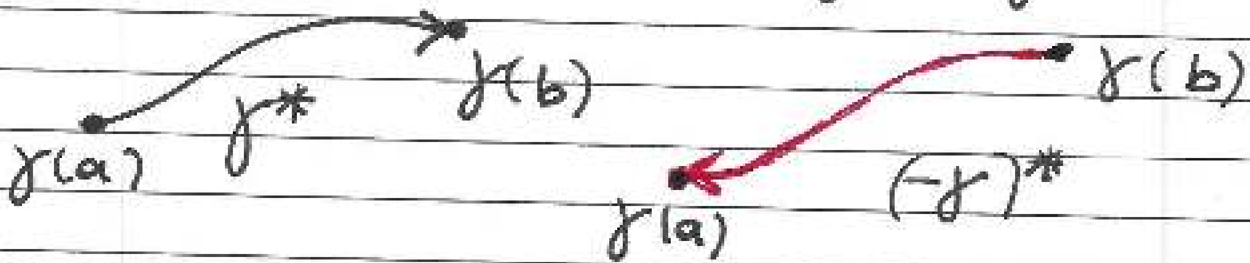
$\gamma(2\pi) = 3$

Άρα, γ ούτε κλειστή ούτε απλή.

(Βλ. σχήμα παρακάτω)



<u>**Ορισμός 3**</u> – Έστω $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ καμπύλη. Η <u>αντίθετη της γ</u>, είναι η καμπύλη $(-\gamma):[a,b]\to\mathbb{C}$ με $(-\gamma)(t)=\gamma(a+b-t)$.



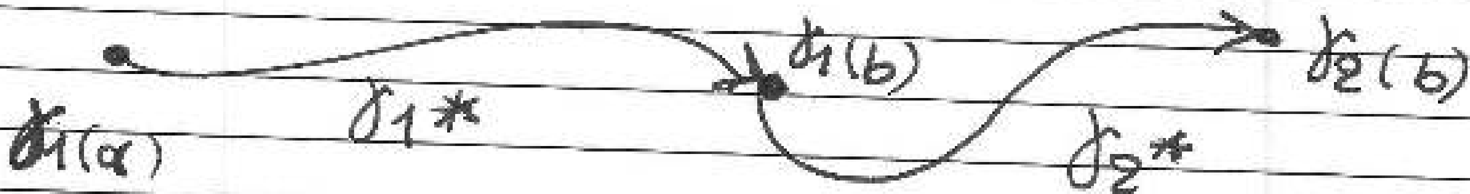
Τα ίχνη των γ, $(-\gamma)$ έχουν αντίθετες φορές διαγραφής.

<u>Ορισμός 4.</u> — Έστω $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$ δύο <u>διαδοχικές καμπύλες</u>, δηλ. $\gamma_1(b) = \gamma_2(a)$.

<u>Άθροισμα</u> των γ_1, γ_2 είναι η καμπύλη $(\gamma_1+\gamma_2) : [a,b] \to \mathbb{C}$ με

$$(\gamma_1+\gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t-a), & t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \\ \gamma_2(2t-b), & t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]. \end{cases}$$

Ισχύει $(\gamma_1+\gamma_2)^* = \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$

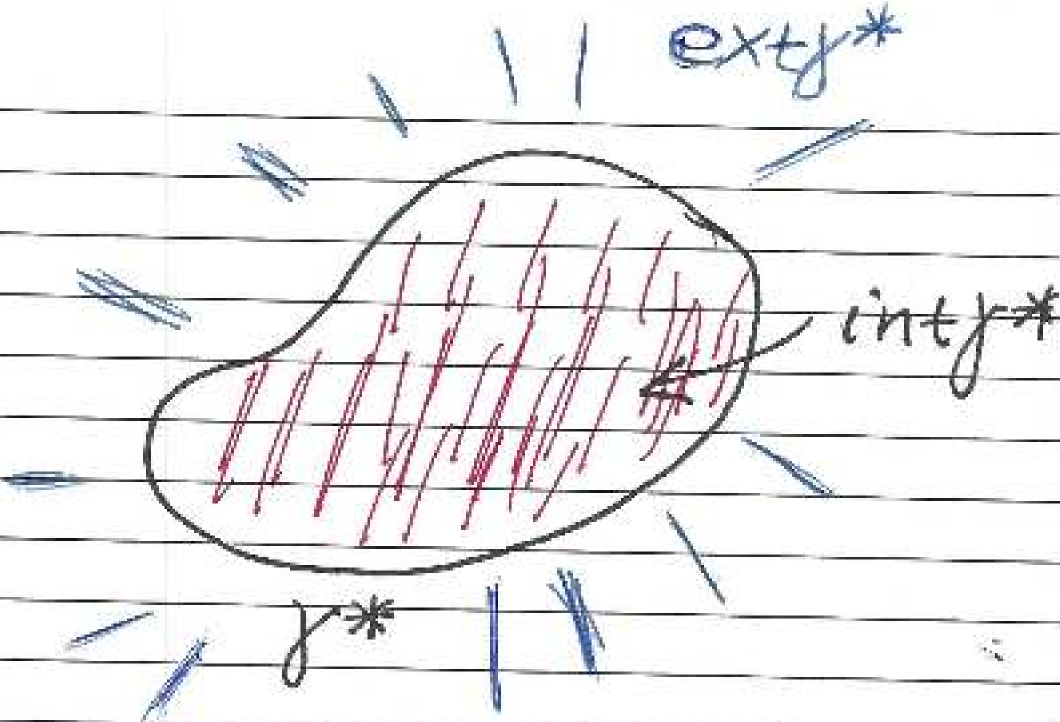


<u>Θεώρημα 5 (Jordan)</u>

Έστω γ απλή, κλειστή καμπύλη. Τότε, το $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ χωρίζεται σε δύο πεδία:

— ένα φραγμένο πεδίο που λέγεται <u>εσωτερικό της γ</u> ($\mathrm{int}\,\gamma^*$)

— ένα μη φραγμένο πεδίο που λέγεται <u>εξωτερικό της γ</u> ($\mathrm{ext}\,\gamma^*$)

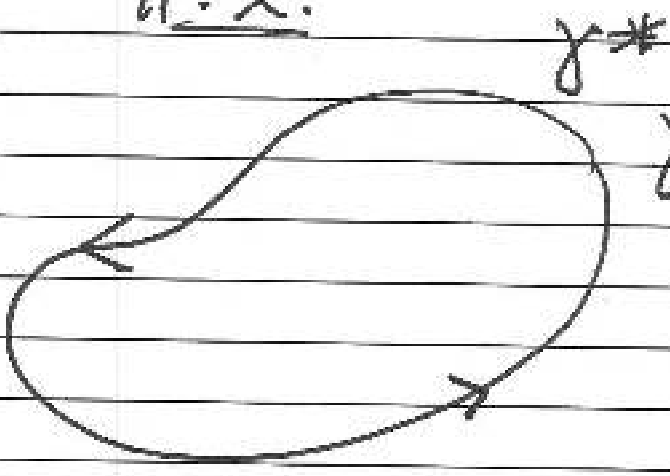


Το παραπάνω Θεώρημα του Jordan φαίνεται διαισθητικά προφανές αλλά η απόδειξή του είναι δύσκολη!!

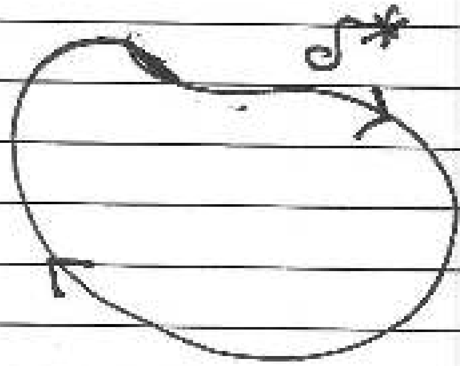
Ορισμός 6. Μια απλή, κλειστή καμπύλη γ λέγεται θετικά προσανατολισμένη αν ένας παρατηρητής που κινείται πάνω στο γ^* αφήνει πάντα στα αριστερά του το εσωτερικό της γ.

Μια καμπύλη (απλή, κλειστή) που δεν είναι θετικά προσανατολισμένη λέγεται αρνητικά προσανατολισμένη.

Π.χ.



γ: θετικά προσανατολισμένη



δ: αρνητικά προσανατολισμένη

Προφανώς, η $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ με
$\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ $(z_0 \in \mathbb{C},\ R>0)$,

είναι θετικά προσανατολισμένη.

<u>Ορισμός 7.</u> Έστω $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$

καμπύλη με $x(t) = \mathrm{Re}\,\gamma(t)$, $y(t) = \mathrm{Im}\,\gamma(t)$, $t \in [a, b]$, δηλ.

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t),\ t \in [a, b].$$

Η γ λέγεται <u>λεία</u> αν:

(i) οι $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμες

(ii) $\gamma'(t) \neq 0$, $\forall\, t \in (a, b)$

όπου $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

<u>Σχόλιο:</u> Η συνθήκη (ii) του ορισμού απαιτεί σε κάθε σημείο του γ^* το διάνυσμα της ταχύτητας να είναι $\neq 0$ ώστε να ορίζεται καλώς η εφαπτομένη.

<u>Παραδείγματα:</u>

(i) $\gamma_R(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ ($z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$).

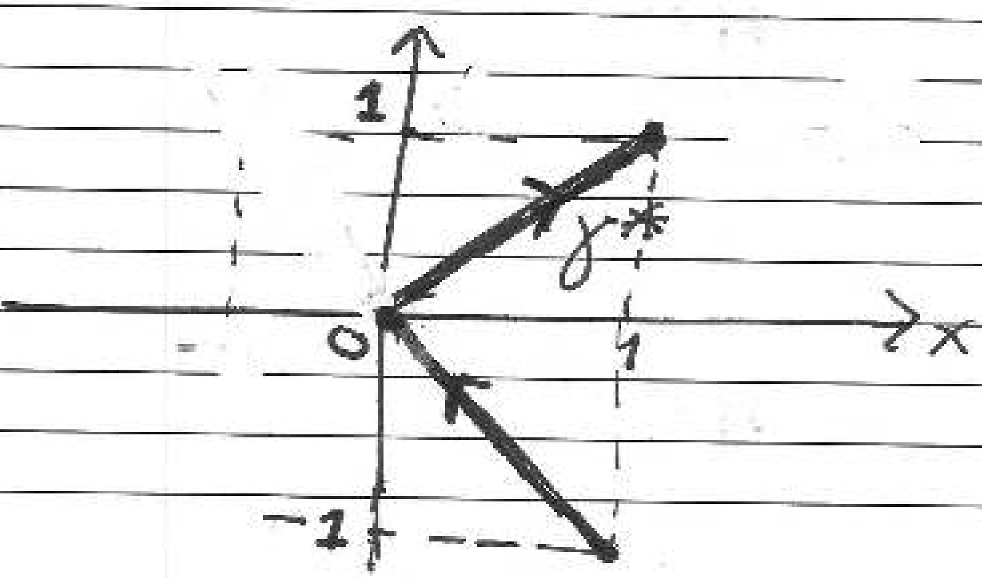
Η γ_R είναι λεία.

(ii) $$\gamma(t) = \begin{cases} t^2 + t^2 i, & t \in [0,1] \\ t^2(1-i), & t \in [-1,0] \end{cases}$$

$$x(t) = t^2, \quad y(t) = \begin{cases} t^2, & t \in [0,1] \\ -t^2, & t \in [-1,0]. \end{cases}$$

Οι $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμες στο $[-1, 1]$ αλλά

$$\gamma'(0) = x'(0) + i y'(0) = 0$$
$\Rightarrow$ η γ <u>δεν</u> είναι λεία.

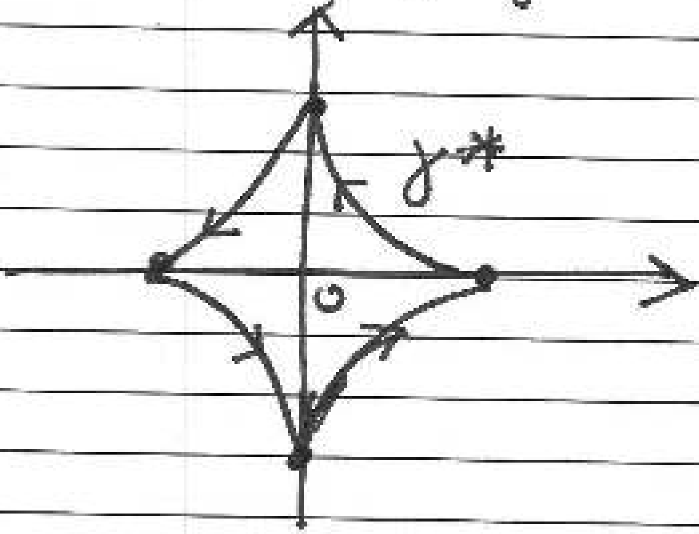


Σημ. ότι στο σημείο 0 υπάρχει "γωνία"!

(iii) $\gamma(t)=\cos^3 t + i\sin^3 t,\ t\in[0,2\pi]$.

$\gamma'(t)=0,\ \forall\, t\in\{0,\pi/2,\pi,3\pi/2\}$

$\Longrightarrow$ η γ δεν είναι λεία.



Ορισμός 8. Μια καμπύλη που είναι το άθροισμα διαδοχικών λείων καμπυλών ονομάζεται **τμηματικά λεία**.

Οι καμπύλες των παραδειγμάτων (ii) (iii) (βλ. παραπάνω) είναι τμηματικά λείες.

Ορισμός 9. Έστω $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ λεία καμπύλη. **Μήκος της γ (συμβ. $\|\gamma\|$)** είναι ο αριθμός

$$\|\gamma\|=\int_a^b|\gamma'(t)|\,dt.$$

Παράδειγμα: $\gamma_R(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ ($z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$).

$$\|\gamma_R\| = \int_0^{2\pi} |\gamma_R'(t)| dt = \int_0^{2\pi} |Rie^{it}| dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} R\,dt = 2\pi R.$$

Ορισμός 10α. Εάν γ τμηματικά λεία καμπύλη με $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$, όπου $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ διαδοχικές λείες καμπύλες ($n \geq 1$), τότε το μήκος της γ είναι ο αριθμός $\|\gamma\| = \sum_{k=1}^{n} \|\gamma_k\|$.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ι. Ολοκλήρωμα της μορφής

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt, \quad \varphi : [a,b] \to \mathbb{C} \text{ συνεχής}$$

Ορισμός Ι.1. Έστω $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$) κ' $u = \mathrm{Re}\varphi$, $v = \mathrm{Im}\varphi$. Εάν u, v συνεχείς, ορίζουμε

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt.$$

Π.χ. $\varphi(t) = t^2 + it^3$, $t \in [0,1]$,

$$\int_0^1 \varphi(t)\,dt = \int_0^1 t^2\,dt + i\int_0^1 t^3\,dt$$

$$= 1/3 + i/4.$$

Πρόταση Ι.2. Έστω $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ διαφορίσιμη με F' συνεχή. Τότε,

$$\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a) \doteq F(t)\Big|_a^b.$$

Απόδειξη: Αν $F_1 = \mathrm{Re}F$, $F_2 = \mathrm{Im}F$, τότε

$$\int_a^b F'(t)\,dt = \int_a^b F_1'(t)\,dt + i\int_a^b F_2'(t)\,dt$$

$$= [F_1(b) - F_1(a)] + i[F_2(b) - F_2(a)] \text{ κλπ.}$$

$\boxtimes$

Π.χ. $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{it}dt = \frac{1}{i} e^{it}\Big|_0^{\pi} =$

$\displaystyle= \frac{1}{i}\left(e^{i\pi}-1\right) = -\frac{2}{i} = 2i.$

Βασικές ιδιότητες:

(i) (Γραμμικότητα). Εάν $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{C}$ συνεχείς κ' $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, τότε

$$\int_a^b [\lambda\varphi(t)+\mu\psi(t)]dt = \lambda\int_a^b \varphi(t)dt + \mu\int_a^b \psi(t)dt$$

(ii) Εάν $a<\gamma<b$, τότε

$$\int_a^b \varphi(t)dt = \int_a^{\gamma} \varphi(t)dt + \int_{\gamma}^b \varphi(t)dt.$$

(iii) $$\int_a^b \overline{\varphi(t)}dt = \overline{\int_a^b \varphi(t)dt}.$$

Επιπλέον, έχουμε την παρακάτω

Πρόταση I.3. Εάν $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ συνεχής, τότε

$$\left|\int_a^b \varphi(t)dt\right| \le \int_a^b |\varphi(t)|dt.$$

<u>Απόδειξη (μη τετριμμένη!)</u>

Θέτω $z = \int_a^b \varphi(t)\,dt$.

- Εάν $z=0$, προφανώς ισχύει η αποδεικτέα.
- Έστω $z \neq 0$. Τότε, $\exists\, \theta \in \mathbb{R} \mid$
$$z = |z| e^{i\theta}.$$

Τότε, $|z| = e^{-i\theta} \cdot z = \int_a^b e^{-i\theta} \varphi(t)\,dt$

$$\overset{|z| \in \mathbb{R}}{\Longrightarrow} \quad |z| = Re\left[\int_a^b e^{-i\theta} \varphi(t)\,dt\right]$$

$$= \int_a^b Re\left[e^{-i\theta} \varphi(t)\right] dt$$

$$\leq \int_a^b \left|e^{-i\theta} \varphi(t)\right| dt$$

$$= \int_a^b |\varphi(t)|\,dt. \quad \boxtimes$$

ΙΙ. Μιγαδικό ολοκλήρωμα

Ορισμός ΙΙ.1. Έστω $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ λεία καμπύλη κ' $f:\gamma^*\to\mathbb{C}$ συνεχής.

Το μιγαδικό ολοκλήρωμα της f πάνω στην γ είναι το

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt.$$

Παραδείγματα:

(i) Έστω $z_0\in\mathbb{C}$, $R>0$ κ'

$\gamma_R(t)=z_0+Re^{it}$, $t\in[0,2\pi]$. Τότε,

$$\int_{\gamma_R}\frac{1}{z-z_0}dz = \int_0^{2\pi}\frac{1}{Re^{it}}iRe^{it}dt$$

$$= \int_0^{2\pi} i = 2\pi i$$

(Καλό είναι να το θυμόμαστε κ' σαν θεωρία!!)

(ii) Έστω γ_R ο κύκλος του παράδ. (i) κ' $n \in \mathbb{Z}$.

Τότε,
$$\int_{\gamma_R} (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases}$$

Πράγματι για $n=-1$, βλ. παράδ. (i).

Για $n \neq -1$, έχουμε

$$\int_{\gamma_R} (z-z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} (Re^{it})^n iRe^{it} dt$$

$$= R^{n+1} \int_0^{2\pi} i e^{i(n+1)t} dt$$

$$= \frac{R^{n+1}}{n+1} e^{i(n+1)t} \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{R^{n+1}}{n+1} \left[e^{2(n+1)\pi i} - 1 \right] = \frac{R^{n+1}}{n+1}(1-1)$$
$$= 0.$$

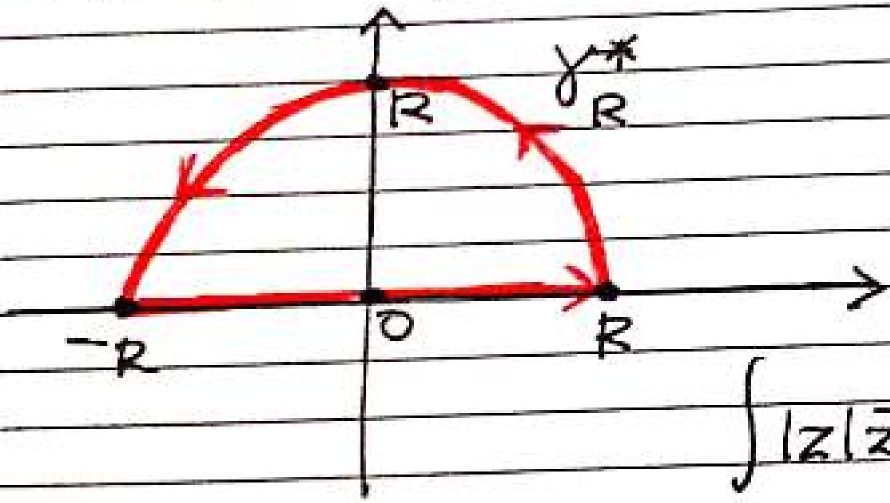
Ορισμός ΙΙ.2. Έστω γ τμηματικά λεία καμπύλη με $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$ $(n \geq 1)$, όπου $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ διαδοχικές λείες καμπύλες. Εάν $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής,

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z)dz.$$

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{\Gamma_R} |z|\,\bar{z}\,dz$, όπου

$\Gamma_R = \gamma_R + [-R, R]$, $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$ $(R > 0)$.

Λύση: Η Γ_R είναι τμηματικά λεία.



Το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_{\gamma_R} |z|\,\bar{z}\,dz + \int_{-R}^{R} |z|\,z\,dz =$$

$$= \int_0^{\pi} |Re^{it}|\, Re^{-it}\, iRe^{it}\,dt + \underbrace{\int_{-R}^{R} |t|\,t\,dt}_{0}$$

$$= \int_0^{\pi} iR^3\,dt = \pi i R^3.$$

(Σημ. η $t \mapsto |t|\,t$ είναι περιττή!)

<u>Πρόταση II.4.</u> Έστω γ τμηματικά λεία καμπύλη, $f, g : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχείς κ' $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Τότε,

$$\int_\gamma [\lambda f(z) + \mu g(z)]dz =$$

$$= \lambda \int_\gamma f(z)dz + \mu \int_\gamma g(z)dz.$$

<u>Απόδειξη:</u> Εάν $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ <u>λεία</u>, το ολοκλ. του α' μέλους γράφεται

$$\int_a^b [\lambda f(\gamma(t)) + \mu g(\gamma(t))]\gamma'(t)dt =$$

$$= \lambda \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt + \mu \int_a^b g(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

$$= \lambda \int_\gamma f(z)dz + \mu \int_\gamma g(z)dz.$$

Εάν γενικότερα, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$ $(n \geq 1)$ όπου $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ διαδοχικές <u>λείες</u>, τότε το ολοκλ. του α' μέλους γράφεται

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} [\lambda f(z) + \mu g(z)]dz =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\lambda \int_{\gamma_k} f(z)dz + \mu \int_{\gamma_k} g(z)dz \right]$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)dz + \mu \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} g(z)dz$$

$$= \lambda \int_{\gamma} f(z)dz + \mu \int_{\gamma} g(z)dz. \quad \boxtimes$$

<u>Πρόταση II.5.</u> Έστω $\gamma, \tilde{\gamma}$ δύο διαδοχικές τμηματικά λείες καμπύλες κ' $f : \gamma^* \cup \tilde{\gamma}^* \to \mathbb{C}$ συνεχής.

Τότε,

$$\int_{\gamma+\tilde{\gamma}} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz + \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz.$$

Απόδειξη: Έστω

$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$, $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2 + \dots + \tilde{\gamma}_m$,

όπου $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ διαδοχικές λείες,

$\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_m$ « « $(n, m \geq 1)$.

Επειδή $\gamma, \tilde{\gamma}$ διαδοχικές, το πέρας της γ ταυτίζεται με την αρχή της $\tilde{\gamma}$.

Ταυτόχρονα όμως, το πέρας της γ είναι το πέρας της γ_n κ' η αρχή της $\tilde{\gamma}$ ταυτίζεται με την αρχή της $\tilde{\gamma}_1$.

Άρα, οι $\gamma_n, \tilde{\gamma}_1$ είναι διαδοχικές, οπότε κ' οι $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_m$ είναι διαδοχικές κ'

$$\gamma + \tilde{\gamma} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k + \sum_{k=1}^{m} \tilde{\gamma}_k$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma+\tilde{\gamma}} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)dz + \sum_{k=1}^{m} \int_{\tilde{\gamma}_k} f(z)dz$$

$$= \int_{\gamma} f(z)dz + \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz. \quad \boxtimes$$

<u>Πρόταση II.6.</u> Έστω γ τμηματικά λεία κ' $f:\gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής. Τότε, $\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_{\gamma} f(z)dz$.

Θα χρειαστούμε το παρακάτω

<u>Λήμμα:</u> Εάν γ_1, γ_2 διαδοχικές καμπύλες, τότε

$$-(\gamma_1+\gamma_2) = (-\gamma_2) + (-\gamma_1).$$

Γενικότερα, αν $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ $(n \geq 1)$ διαδοχικές καμπύλες, τότε

$$-(\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n) = (-\gamma_n)+\cdots+(-\gamma_1).$$

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$. Τότε,

$$(\gamma_1+\gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t-a), & t \in [a, \frac{a+b}{2}] \\ \gamma_2(2t-b), & t \in [\frac{a+b}{2}, b] \end{cases}$$

• $\forall t \in [a, \frac{a+b}{2}]$, έχουμε $a+b-t \in [\frac{a+b}{2}, b]$

$$\Rightarrow -(\gamma_1+\gamma_2)(t) = (\gamma_1+\gamma_2)(a+b-t) =$$

$$= \gamma_2(2(a+b-t)-b) = \gamma_2(2a+b-2t)$$

$$= \gamma_2((a+b)-(2t-a))$$

$$= (-\gamma_2)(2t-a).$$

• όμοια, $\forall t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$,

$$-(\gamma_1+\gamma_2)(t) = (-\gamma_1)(2t-a).$$

Άρα, $-(\gamma_1+\gamma_2) = (-\gamma_2)+(-\gamma_1)$.

Η γενίκευση προκύπτει επαγωγικά. $\boxtimes$

Απόδειξη Πρότ. ΙΙ.6.

Υποθέτουμε αρχικά ότι $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ λεία. Ελέγχεται εύκολα ότι η $(-\gamma)$ είναι επίσης λεία κ' $(-\gamma)'(t) = -\gamma'(a+b-t)$, $\forall t \in [a,b]$.

Άρα, $$\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_a^b f(\gamma(a+b-t))\gamma'(a+b-t)dt$$

$$\underset{=}{s=a+b-t} \int_b^a f(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds = -\int_\gamma f(z)dz.$$

Γενικά, έστω $\gamma = \gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_n$ $(n \geq 1)$

όπου $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ διαδοχικές λείες.

Τότε, $-\gamma = (-\gamma_n) + \dots + (-\gamma_1)$ (βλ. λήμμα)

$$\Rightarrow \int_{-\gamma} f(z)dz = \int_{-\gamma_n} f(z)dz + \dots + \int_{-\gamma_1} f(z)dz$$

$$= -\int_{\gamma_n} f(z)dz - \dots - \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

$$= -\left(\int_{\gamma_1} f + \dots + \int_{\gamma_n} f\right) = -\int_{\gamma} f. \quad \boxtimes$$

<u>Πρόταση II.7.</u> (M–L ανισότητα!) Έστω γ τμηματικά λεία καμπύλη κ' $f: \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής. Έστω $M \geq 0$ ώστε $|f(z)| \leq M, \ \forall z \in \gamma^*$.

Τότε, $\left|\int_{\gamma} f(z)dz\right| \leq M \cdot \|\gamma\|$, όπου $\|\gamma\|$ το μήκος της γ.

<u>Απόδειξη:</u> Υποθέτουμε αρχικά ότι γ <u>λεία</u>: $[a,b] \to \mathbb{C}$.

Τότε,

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right|$$

$$\overset{(\text{Πρόταση I.3})}{\leq} \int_a^b |f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)|dt$$

$$= \int_a^b |f(\gamma(t))|\cdot|\gamma'(t)|dt$$

$$\leq M\int_a^b |\gamma'(t)|dt = M\cdot\|\gamma\|.$$

Γενικά, έστω $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$ $(n \geq 1)$, όπου $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ διαδοχικές λείες καμπύλες.

Τότε, $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z)dz\right| \leq$

$$\leq \sum_{k=1}^n \left|\int_{\gamma_k} f(z)dz\right| \leq M\sum_{k=1}^n \|\gamma_k\|$$

$$= M\cdot\|\gamma\|.$$

$\boxtimes$

Σημαντικό σχόλιο!! Δεν ισχύει γενικά ότι $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)|dz$.

Π.χ. $\gamma(t)=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$,

$f(z)=1/z$, $z\in\gamma^*$.

Τότε, $\int_\gamma f(z)dz=\int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{it}}ie^{it}dt$

$= 2\pi i$

$\Rightarrow \left|\int_\gamma f(z)dz\right| = 2\pi$,

επί $\int_\gamma |f(z)|dz = \int_\gamma \frac{1}{|z|}dz =$

$=\int_\gamma 1\,dz = \int_0^{2\pi} ie^{it}dt = e^{it}\Big|_0^{2\pi}$

$=1-1=0.$

Άρα, $\int_\gamma |f(z)|dz < \left|\int_\gamma f(z)dz\right|$!!

Παραδείγματα:

(i) $\left|\int_\gamma e^{\bar{z}\,\mathrm{Im}z}dz\right| \leq 2\pi\sqrt{e}$, όπου

$\gamma(t)=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$.

Πράγματι: $\forall\, z=x+iy\in\gamma^*$,

$\bar{z}\,\mathrm{Im}z=(x-yi)y=xy-iy^2$

$\Rightarrow |e^{\bar{z}\mathrm{Im}z}| = e^{\mathrm{Re}(\bar{z}\mathrm{Im}z)} = e^{xy} \leq$

$$\leq e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} = e^{1/2} = \sqrt{e}.$$

[Σημ. $\forall z = x+iy \in \gamma^*$, είναι $|z| = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2+y^2 = 1$.]

Επομένως,

(ML-ανισότητα) $\Rightarrow \left| \int_\gamma e^{\bar{z}\,\mathrm{Im}\,z} dz \right| \leq$

$\leq \sqrt{e}\,\|\gamma\| = 2\pi\sqrt{e}$.

(ii) $\left| \int_\gamma \frac{dz}{4+3z} \right| \leq 2\pi$, όπου $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Πράγματι: $\forall z \in \gamma^*$, $|4+3z| \geq 4 - 3|z| = 1$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{4+3z} \right| \leq 1 \xRightarrow{(ML\text{-}ανισ.)}$$

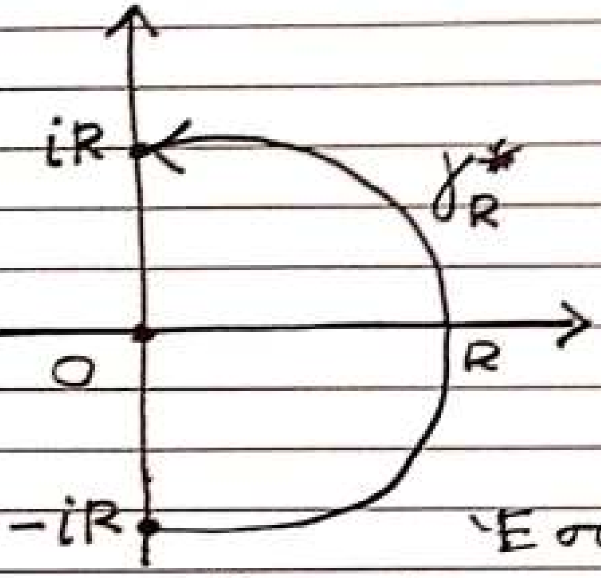
$$\Rightarrow \left| \int_\gamma \frac{1}{4+3z} dz \right| \leq 1 \cdot 2\pi = 2\pi.$$

(iii) Να δ.ο. $\lim_{R \to +\infty} \left| \int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{Log}\,z}{z^2} dz \right| = 0$,

όπου $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ $(R > 0)$.

Πράγματι: Κατ' αρχήν παρατηρούμε

ότι η $z \mapsto \mathrm{Log}\, z$ είναι συνεχής πάνω στο γ_R^*, διότι το γ_R^* δεν τέμνει τον αρνητικό ημιάξονα $(-\infty, 0]$.



Άρα, ορίζεται το ολοκλ.

$$\int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{Log}\, z}{z^2}\, dz.$$

Έστω $R > 1$.

$\forall z \in \gamma_R^*$, έχουμε $\mathrm{Arg}\, z \in [-\pi/2, \pi/2]$

$$\Rightarrow |\mathrm{Log}\, z| = |\ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z| \leq \ln R + |\mathrm{Arg}\, z| \leq \ln R + \pi/2$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\mathrm{Log}\, z}{z^2}\right| \leq \frac{\ln R + \pi/2}{R^2}$$

$$\overset{(\text{ML-ανισ.})}{\Longrightarrow} \underline{\forall R > 1}, \left|\int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{Log}\, z}{z^2}\, dz\right| \leq \pi R \cdot \frac{\ln R + \frac{\pi}{2}}{R^2} =$$

$$= \pi \cdot \frac{\ln R + \pi/2}{R} \xrightarrow{R \to +\infty} 0.$$

Παράγουσα - Ολοκλήρωμα ανεξάρτητο του δρόμου

Ορισμός II.8. Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό κ' $f: U \to \mathbb{C}$. Μια ολόμορφη συνάρτηση $F: U \to \mathbb{C}$ λέγεται παράγουσα της f αν
$$F'(z) = f(z), \ \forall z \in U.$$

Π.χ. • Η e^{z^2} είναι παράγουσα της $2ze^{z^2}$ στο $\mathbb{C}$.

• Η $-1/z$ είναι παράγουσα της $1/z^2$ στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

• Η $\operatorname{Log} z$ είναι παράγουσα της $1/z$ στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Πρόταση II.9: Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο (δηλ. ανοικτό, συνεκτικό), $f: U \to \mathbb{C}$ κ' F, G παράγουσες της f. Τότε,
$$\exists c \in \mathbb{C} \mid F(z) = G(z) + c, \ \forall z \in U.$$

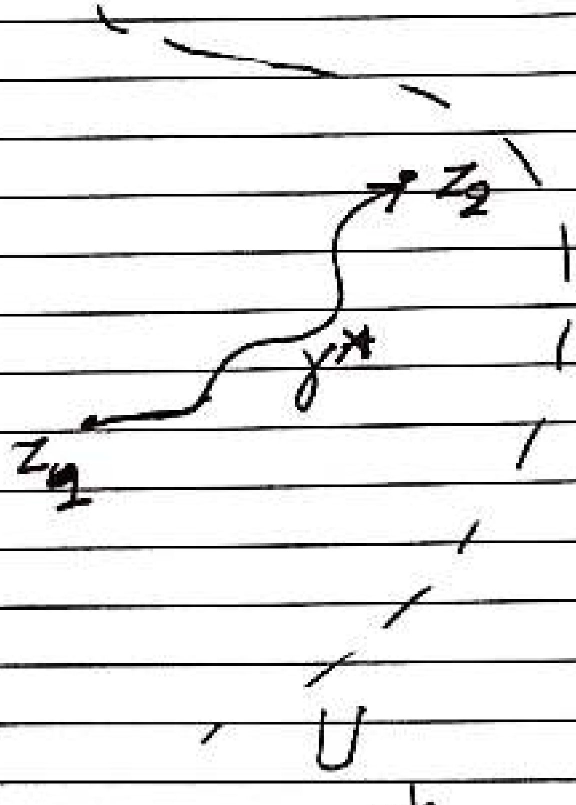
Απόδειξη: $(F-G)' = 0$ στο U = πεδίο
$\Rightarrow F - G =$ σταθερή στο U. $\boxtimes$

<u>Πρόταση ΙΙ.10:</u> Έστω F παράγουσα της f στο ανοικτό $U \subseteq \mathbb{C}$ κ' $z_1, z_2 \in U$. Τότε,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1),$$

για οποιαδήποτε τμηματικά λεία καμπύλη γ με $\gamma^* \subset U$, που έχει αρχή το z_1 κ' πέρας το z_2.

<u>Απόδειξη:</u>



Υποθέτουμε αρχικά ότι $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ <u>λεία</u> με $\gamma(a) = z_1$, $\gamma(b) = z_2$.

Τότε,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

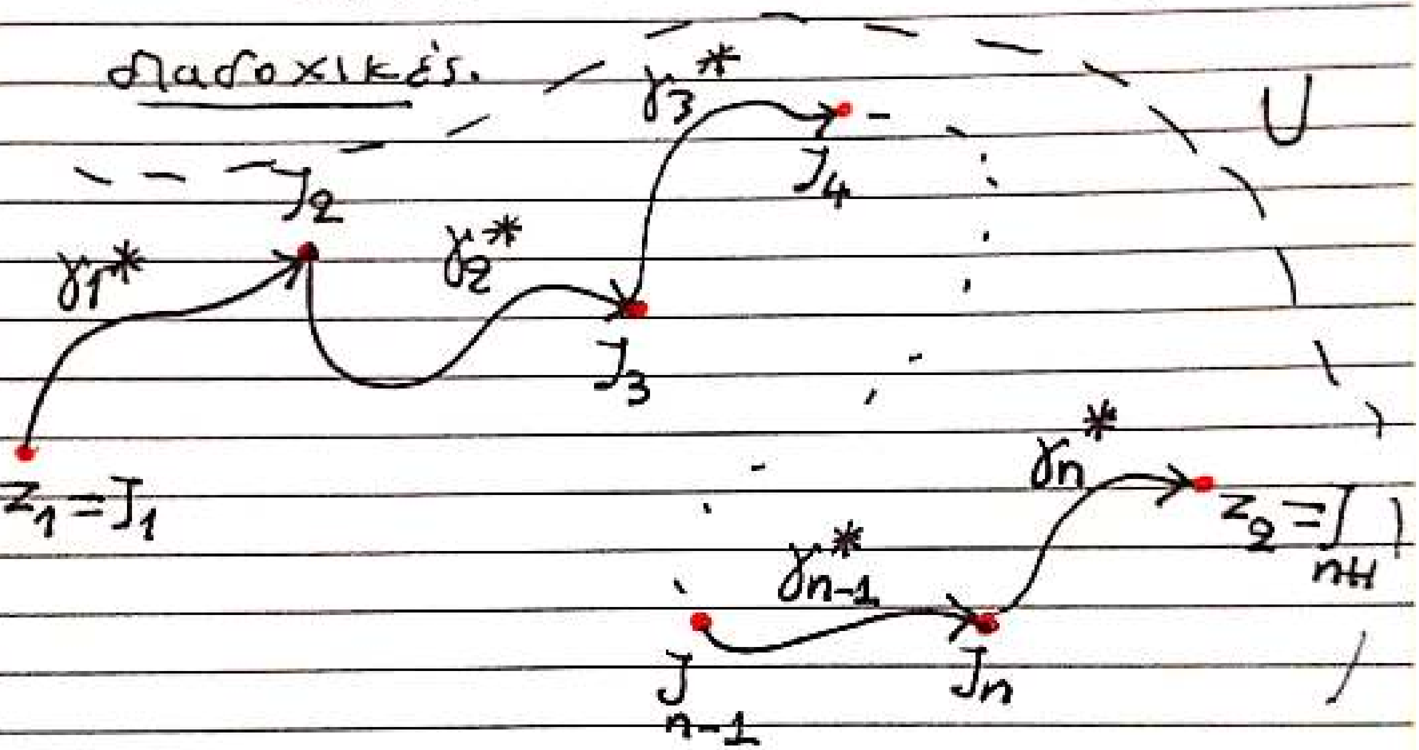
$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\left[F(\gamma(t))\right]dt =$$

$$= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(z_2) - F(z_1).$$

Ας υποθέσουμε γενικά ότι γ τμηματικά λεία καμπύλη με αρχή το z_1 και πέρας το z_2, ώστε

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n \quad (n \geq 2),$$

όπου $\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_n$ λείες καμπύλες διαδοχικές.



$\forall\, k \in \{1, 2, \dots, n\}$, θέτουμε

J_k = η αρχή της γ_k,

J_{k+1} = το πέρας της γ_k.

Τότε, $J_1 = z_1$, $J_{n+1} = z_2$.

Έχουμε

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_3} f + \dots + \int_{\gamma_{n-1}} f + \int_{\gamma_n} f =$$

$$= [\cancel{F(J_2)} - F(J_1)] + [\cancel{F(J_3)} - \cancel{F(J_2)}] +$$
$$+ [F(J_4) - \cancel{F(J_3)}] + \dots + [\cancel{F(J_n)} - F(J_{n-1})] +$$
$$+ [F(J_{n+1}) - \cancel{F(J_n)}] =$$
$$= F(J_{n+1}) - F(J_1) = F(z_2) - F(z_1).$$ ⊠

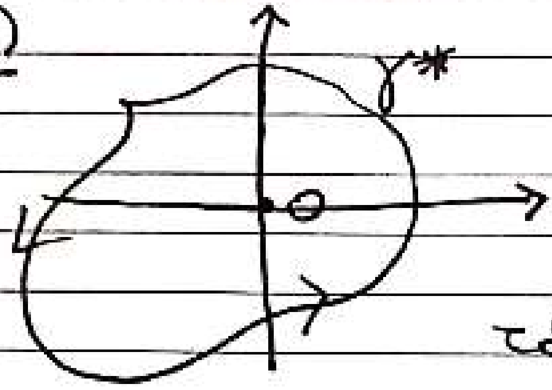
<u>Πόρισμα ΙΙ.11</u>: Έστω γ <u>κλειστή</u> <u>τμηματικά</u> <u>λεία</u> καμπύλη με $\gamma^* \subset U$, όπου $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό. Εάν $f: U \to \mathbb{C}$ με παράγουσα, τότε $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω F παράγουσα της f στο U. Εάν γ κλειστή τμ. λεία με $\gamma^* \subset U$, τότε η αρχή z_1 και το πέρας z_2 της γ ταυτίζονται

$$\overset{(\text{Πρότ. II.10})}{\Longrightarrow} \int_\gamma f(z)dz = F(z_2) - F(z_1) = 0.$$ ⊠

Παραδείγματα:

(i)



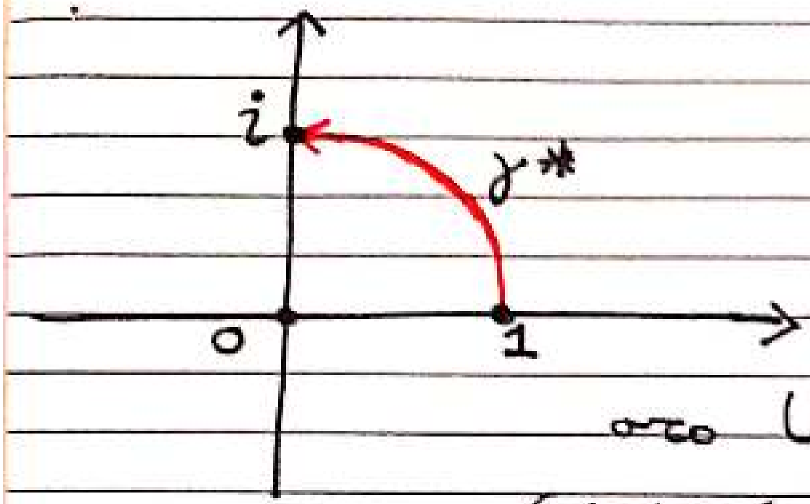
Εάν γ τμημ. λεία κλειστή καμπύλη με ίχνος γ^*, τότε $\int_\gamma \frac{dz}{z^2} = 0$.

Πράγματι: $\gamma^* \subset U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ = ανοικτό κ' η $\frac{1}{z^2}$ έχει παράγουσα στο U (π.χ. την $-1/z$.)

(ii) $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Έπεται ότι η $1/z$ δεν έχει παράγουσα στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (αλλιώς θα έπρεπε $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 0$). Φυσικά, έχει παράγουσα στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, την $\operatorname{Log} z$.

(iii) Να υπολογιστεί το $\int_\gamma \frac{\operatorname{Log}^3 z}{z} dz$, όπου $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, \pi/2]$.



$\gamma^* \subset U = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

Η $z \mapsto \frac{1}{4} \text{Log}^4 z$ είναι ολόμορφη στο U κι'

$$\left(\frac{1}{4} \text{Log}^4 z\right)' = \frac{\text{Log}^3 z}{z}, \ \forall z \in U$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{\text{Log}^3 z}{z} dz = \frac{1}{4}\left(\text{Log}^4 i - \underbrace{\text{Log}^4 1}_{0}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln|i| + i \,\text{Arg}(i)\right]^4 = \frac{1}{4}\left(\frac{i\pi}{2}\right)^4$$

$$= \frac{\pi^4}{64}.$$

<u>(iv)</u> Έστω f ολόμορφη στον ανοικτό δίσκο

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

ώστε

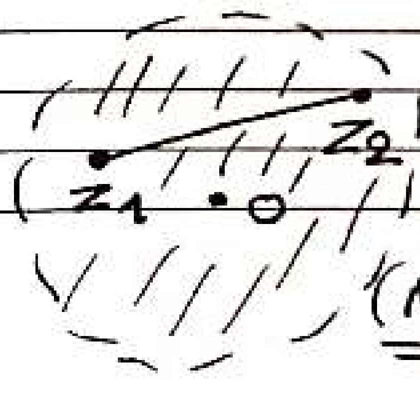
$$|f'(z)| \leq M, \ \forall z \in D,$$

όπου $M > 0$ σταθερά.

Τότε,

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq M |z_1 - z_2|,$$

$\forall z_1, z_2 \in D$. Πράγματι· έστω $z_1, z_2 \in D$.



Τότε, $[z_1, z_2] \subset D$

$$\Rightarrow f(z_2) - f(z_1) = \int_{[z_1, z_2]} f'(z)\, dz$$

(ML-ανισ.) $\Longrightarrow$ κ.λ.π.

ΘΕΩΡΗΜΑ CAUCHY-GOURSAT

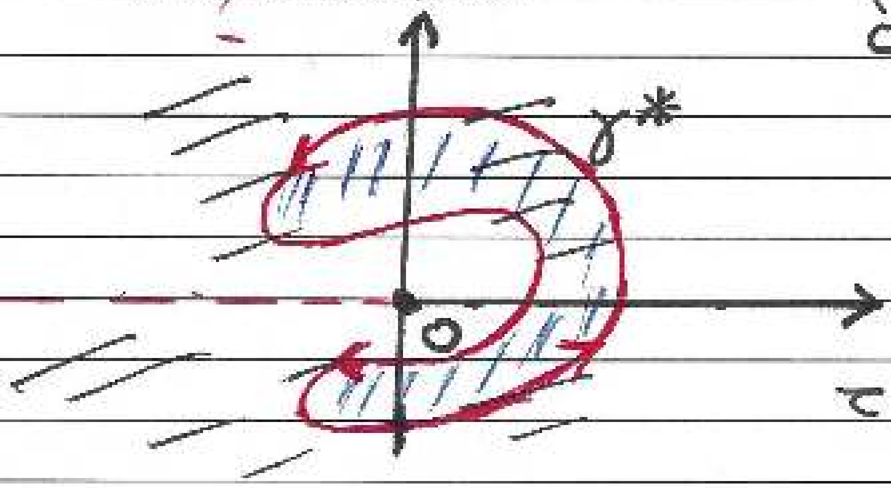
Ορισμός 1: Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο (δηλ. ανοικτό συνεκτικό). Το U λέγεται **απλά συνεκτικό** ανν το εσωτερικό κάθε κλειστής καμπύλης γ με $\gamma^* \subset U$ περιέχεται στο U.

Γεωμετρικά, απλά συνεκτικό πεδίο είναι ένα πεδίο χωρίς "οπές".

Παραδείγματα:

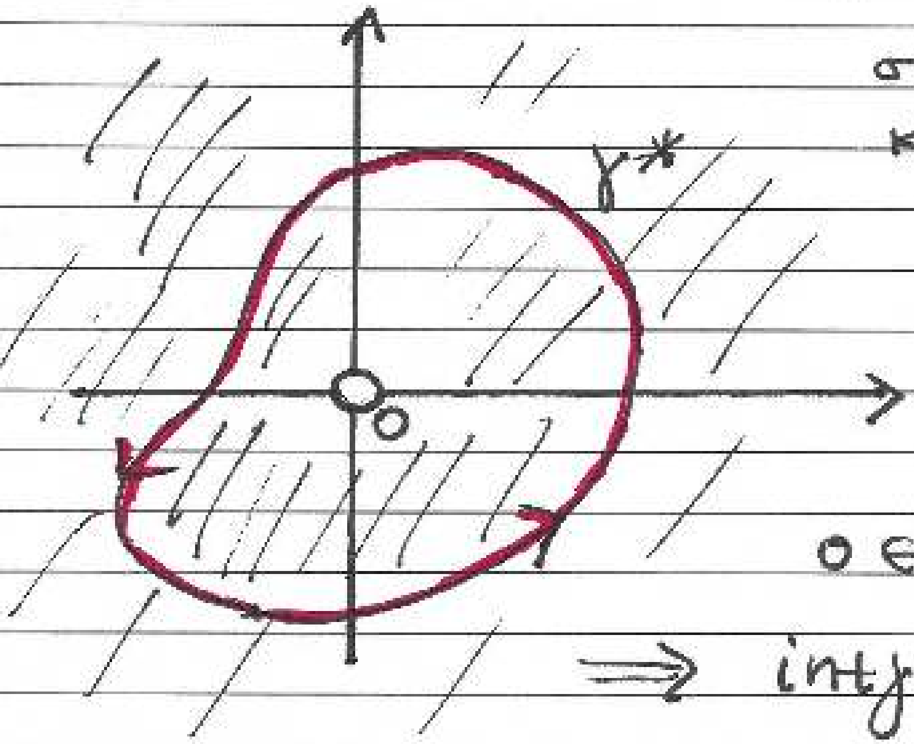
(i) κάθε ανοικτός δίσκος είναι απλά συνεκτικό.

(ii) Το $U = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ είναι απλά συνεκτικό.



Όπως φαίνεται στο σχήμα, εάν γ κλειστή καμπύλη με $\gamma^* \subset U$, τότε $\operatorname{int}\gamma^* \subset U$.

(iii) Το πεδίο $U=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ δεν είναι απλά συνεκτικό. Πράγματι, στο



σχήμα, η καμπύλη γ είναι κλειστή με $\gamma^*\subset U$ αλλά $0\in \operatorname{int}\gamma^*$ $\Rightarrow \operatorname{int}\gamma^* \not\subset U$.

Θεώρημα 1 (Θ. Cauchy - Goursat!!)

Έστω $U\subseteq\mathbb{C}$ απλά συνεκτικό πεδίο και $f\in\mathcal{H}(U)$ (δηλ. $f:U\to\mathbb{C}$ ολόμορφη).

Εάν γ κλειστή, τμηματικά λεία καμπύλη με $\gamma^*\subset U$, τότε

$$\int_\gamma f(z)\,dz=0.$$

Η απόδειξη του Θ. 1 δόθηκε από τον E. Goursat (1883) (εδώ παραλείπεται).

Το 1825, ο L.-A. Cauchy έδωσε μια απλή απόδειξη του Θ.1 <u>αλλά</u> με την επιπλέον υπόθεση ότι <u>f' συνεχής</u>!

Εδώ θα δώσουμε την απόδειξη του Θ.1 υποθέτοντας ότι:

- f' συνεχής
- γ λεία

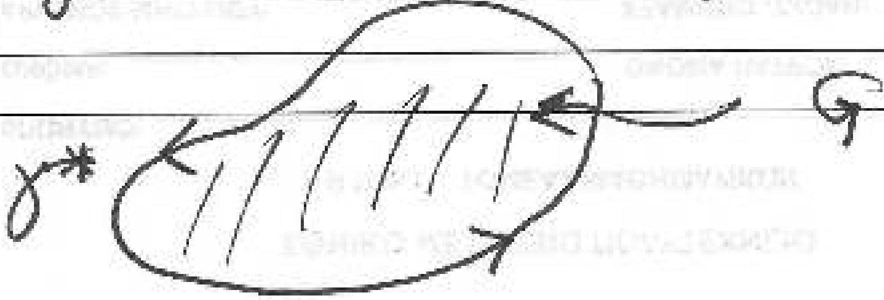
Η απόδειξη βασίζεται στο <u>Θ. Green</u>:

<u>Θεώρημα 2 (Green)</u>:

Έστω G <u>απλά συνεκτικό πεδίο</u> $\subseteq \mathbb{R}^2$ με σύνορο μια θετικά προσανατολισμένη τμ. λεία καμπύλη γ κ' $P=P(x,y)$, $Q=Q(x,y) : G \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις με <u>συνεχείς μερικές παραγώγους</u> πρώτης τάξης στο G.

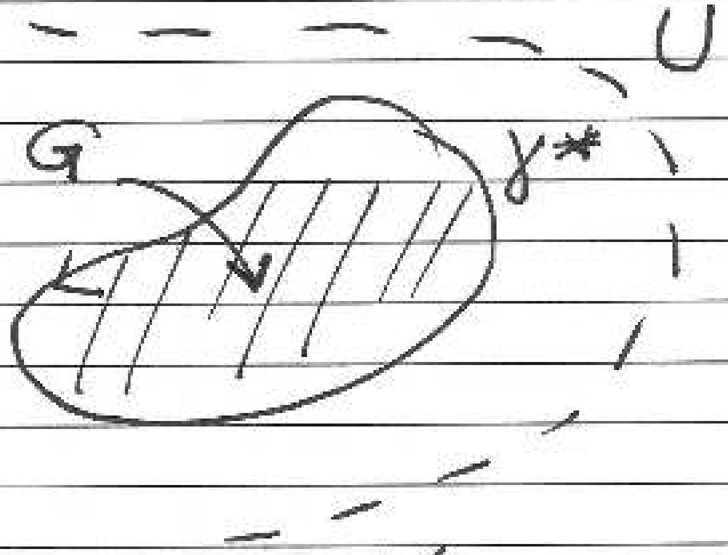
Τότε,

$$\oint_{\gamma} (P\,dx + Q\,dy) = \iint_G (Q_x - P_y)\,dx\,dy.$$



Απόδειξη Θ.1: Υποθέτουμε ότι

- f' συνεχής στο U
- γ λεία



Έστω $f = u + iv$

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$

με $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a,b]$.

Τότε, $f' = u_x + i v_x$ στο U

κ' $\boxed{(C-R)\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \text{ στο } U.}$

Επειδή f' συνεχής, έπεται ότι

$\boxed{u_x,\ u_y,\ v_x,\ v_y \text{ συνεχείς στο } U.}$

Επιπλέον, $x(\cdot), y(\cdot) \in C^1[a,b]$ αφού γ λεία. Θα χρησιμοποιήσουμε την "ταύτιση"

$$\gamma(t) \equiv (x(t), y(t)),\quad t \in [a,b].$$

Έχουμε

$\longrightarrow$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b \big[u(\gamma(t)) + i\,v(\gamma(t))\big]\cdot\big[x'(t) + i\,y'(t)\big]\,dt$$

$$= \int_a^b \big[u(\gamma(t))\,x'(t) - v(\gamma(t))\,y'(t)\big]\,dt \; +$$

$$+\; i\int_a^b \big[u(\gamma(t))\,y'(t) + v(\gamma(t))\,x'(t)\big]\,dt$$

$$= \int_a^b \big(u(\gamma(t)), -v(\gamma(t))\big)\cdot\gamma'(t)\,dt \; +$$

$$+\; i\int_a^b \big(v(\gamma(t)), u(\gamma(t))\big)\cdot\gamma'(t)\,dt$$

(με $(\cdot)$ συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^2$ κι εφαρμόσαμε την ταύτιση

$$\gamma(t) \equiv (x(t), y(t)),$$

$$\gamma'(t) \equiv (x'(t), y'(t))).$$

Με βάση τα παραπάνω και τον ορισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος, παίρνουμε

$$\int_\gamma f(z)dz = \oint_\gamma (udx - vdy) + i\oint_\gamma (vdx + udy). \quad (1)$$

Επειδή οι u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο απλά συνεκτικό πεδίο $G = \text{int}\gamma^* \subseteq U$ (σημ. ότι U απλά συνεκτικό κ' $\gamma^* \subset U$), μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θ. Green σε κάθε ένα από τα επικαμπύλια ολοκληρώματα του β' μέλους της (1). Έτσι έχουμε

$$\int_\gamma f(z)dz = \iint_G (-v_x - u_y)dxdy + i\iint_G (u_x - v_y)dxdy \overset{(C-R)}{=}$$

$$= 0 + i \cdot 0 = 0.$$

$\boxtimes$

<u>Θεώρημα 3</u> (<u>Ισχυρή εκδοχή θεωρήματος Cauchy – Goursat</u>):

Έστω γ κλειστή καμπύλη με απλά συνεκτικό εσωτερικό $G = \text{int}\gamma^*$ κ'

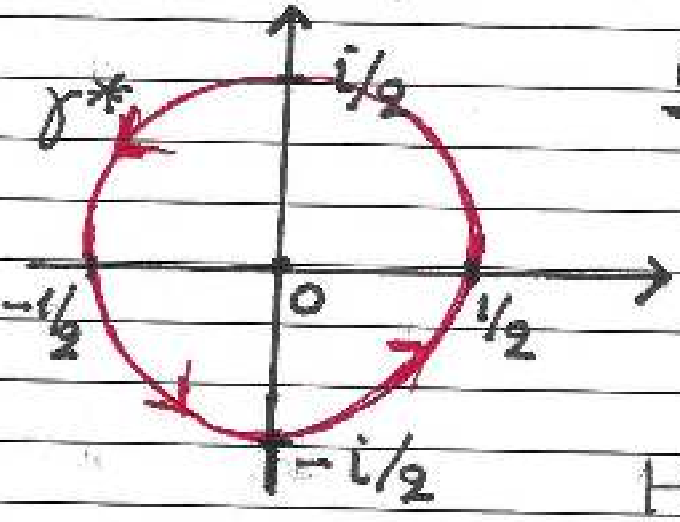
$f : G \cup \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής

με $f|_G \in H(G)$. Τότε,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

[Η απόδειξη παραλείπεται.]

<u>Παραδείγματα</u>:



<u>(α)</u> $\gamma(t) = \frac{1}{2}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$,

$$f(z) = \frac{e^z}{1+z^2}.$$

Η f είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\} = U$ κ' $\gamma^* \subset U$.

Το $\text{int}\gamma^* = D(0, 1/2)$ είναι απλά συνεκτικό.

$$\overset{\Theta.3}{\Longrightarrow} \int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

(β) $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

$f(z) = \sin(e^{z}) + \bar{z} + |z+1|^2$,
$z \in \mathbb{C}$.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = ?$$

f συνεχής στο $\mathbb{C}$ αλλά όχι ολόμορφη (δεν εφαρμόζεται το Θ. Cauchy στην f !!)

Παρ' όλ' αυτά, $\forall\, z \in \gamma^*$, έχουμε

$$|z| = 1 \implies \bar{z} = 1/z$$

και

$$f(z) = \sin(e^{z}) + \frac{1}{z} + |z|^2 + z + \bar{z} + 1$$

$$= \sin(e^{z}) + \frac{1}{z} + 1 + z + \frac{1}{z} + 1$$

$$= \underbrace{\sin(e^{z}) + z + 2}_{g(z)} + \frac{2}{z}.$$

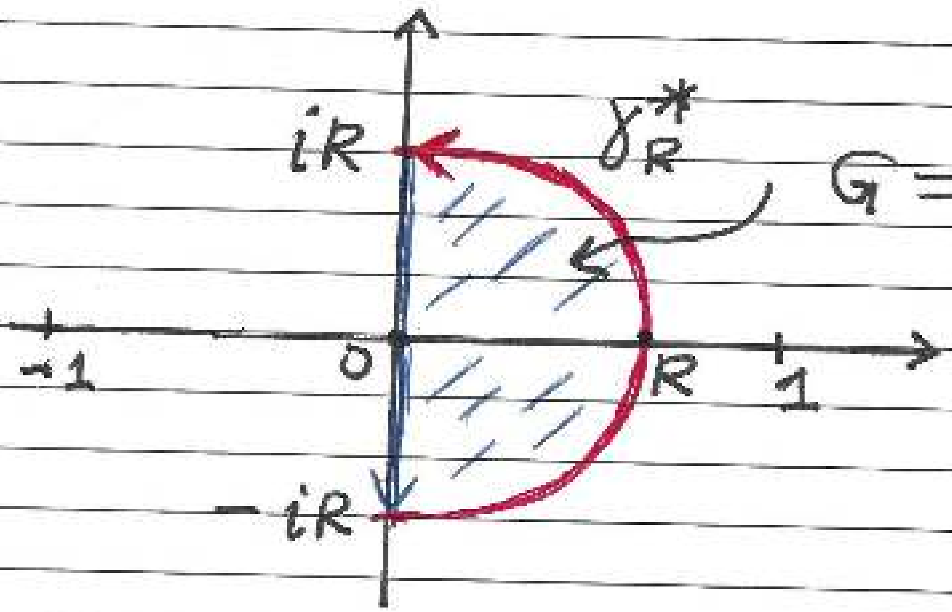
Αλλά, $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \xRightarrow{\Theta.3} \int_\gamma g(z)\,dz = 0$

$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2 \cdot 2\pi i$
$= \underline{\underline{4\pi i}}$.

(γ) $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$

$f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}$ $\qquad \underline{1 > R > 0}$

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = ?$$



Θεωρούμε την κλειστή καμπύλη

$$\Gamma_R = \gamma_R + [iR, -iR].$$

Η Γ_R είναι τμηματικά λεία κ'

το εσωτερικό της $G = \operatorname{int} \Gamma_R^*$ είναι απλά συνεκτικό.

Επιπλέον, $\pm 1 \notin G \cup \Gamma_R^*$

$$\overset{\Theta.3}{\Longrightarrow} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} f(z)dz = -\int_{[iR,-iR]} f(z)dz =$$

$$= \int_{[-iR, iR]} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(it)\,d(it) =$$

$$= i\int_{-R}^{R} \frac{dt}{-t^2-1} = -2i\int_0^R \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= -2i\,\text{Arctan}t\Big|_0^R = -2i\,\text{Arctan}R.$$

Ακολουθεί μια εφαρμογή στον υπολογισμό γενικευμένων ολοκληρωμάτων.

ΑΣΚΗΣΗ:

(α) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{\sigma_R} e^{iz^2}dz = 0$,

όπου $\sigma_R(t) = R + it,\ t\in[0,R]$.

(β) Να δείξετε ότι

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt = \int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-2t^2}dt \overset{(+)}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

(+) γνωστό από την Ανάλ. ΙΙ.

<u>Λύση:</u>

(α) Για $z = \sigma_R(t) = R + it,\ t \in [0, R]$,

έχουμε

$$iz^2 = i(R^2 - t^2 + 2iRt)$$

$$= -2Rt + i(R^2 - t^2)$$

$$\Rightarrow |e^{iz^2}| = e^{\mathrm{Re}(iz^2)} = e^{-2Rt}$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\sigma_R} e^{iz^2} dz \right| \overset{(+)}{=} \left| \int_0^R e^{i\sigma_R^2(t)}\, i\, dt \right|$$

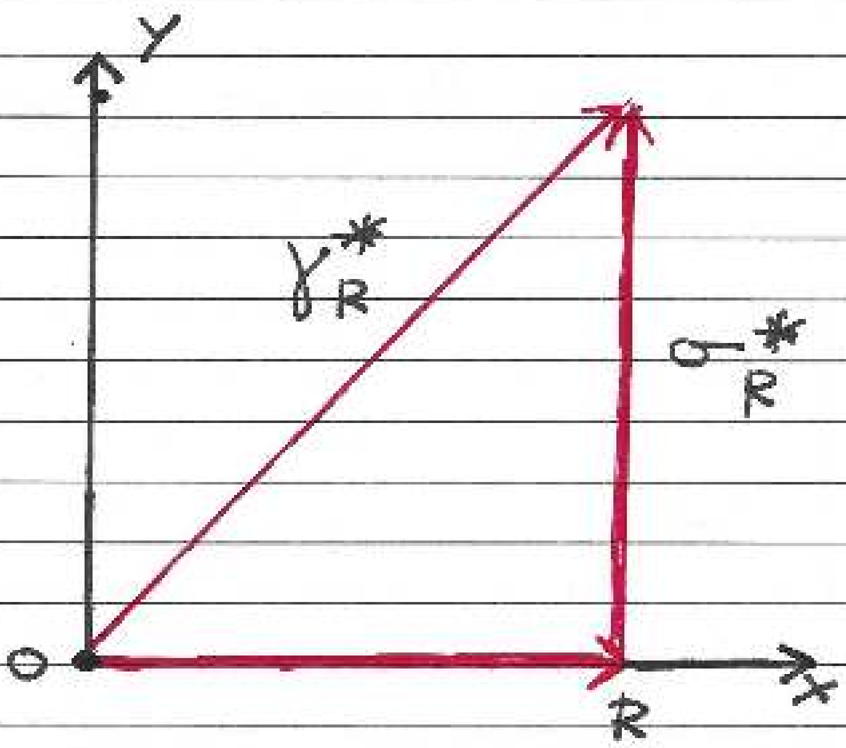
$$\leq \int_0^R \left| e^{i\sigma_R^2(t)} \right| dt$$

$$= \int_0^R e^{-2Rt}\, dt = \frac{1 - e^{-2R^2}}{2R}$$

$$\xrightarrow{R \to +\infty} 0.$$

(+)[Δεν εξυπηρετεί η ML-ανισότητα !!]

(β)



Θεωρούμε κ' το ευθ. τμήμα

$$\gamma_R(t) = t + it, \quad t \in [0, R]$$

(βλ. σχήμα).

Θέτουμε $\Gamma_R = [0,R] + \sigma_R - \gamma_R$.

Θ.3

Η Γ_R είναι κλειστή, τμημ. λεία $\Longrightarrow$

$$\int_{\Gamma_R} e^{iz^2}\,dz = 0$$

$$\Longrightarrow \int_0^R e^{it^2}\,dt + \int_{\sigma_R} e^{iz^2}\,dz = \int_{\gamma_R} e^{iz^2}\,dz \qquad (2)$$

Αλλά, για $z = t + it = (1+i)t$,

έχουμε $z^2 = 2it^2 \Rightarrow iz^2 = -2t^2$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} e^{iz^2} dz = \int_0^R e^{-2t^2}(1+i)\,dt$$

$$= \int_0^R e^{-2t^2} dt + i\int_0^R e^{-2t^2} dt$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \int_0^R e^{it^2} dt + \int_{\sigma_R} e^{iz^2} dz =$$

$$= \int_0^R e^{-2t^2} dt + i\int_0^R e^{-2t^2} dt.$$

Παίρνοντας στην τελευταία το όριο καθώς $R \to +\infty$, παίρνουμε (λόγω του ερωτ.-(a)),

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t^2} dt + i\int_0^{+\infty} e^{-2t^2} dt.$$

Επειδή $e^{it^2} = \cos(t^2) + i\sin(t^2)$, προκύπτει η απόδειξη. $\boxtimes$

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ Θ. CAUCHY-GOURSAT

Θ. 1. (Αρχή Παραμόρφωσης)

Έστω γ_1, γ_2 θετικά προσανατολισμένες, απλές κλειστές, τμηματικά λείες καμπύλες ώστε

$$\gamma_2^* \subset \operatorname{int}\gamma_1^*$$

και $G = \operatorname{int}\gamma_1^* \cap \operatorname{ext}\gamma_2^*$ το πεδίο μεταξύ των γ_1^*, γ_2^*.

Έστω $f: G \cup \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \longrightarrow \mathbb{C}$, ώστε:

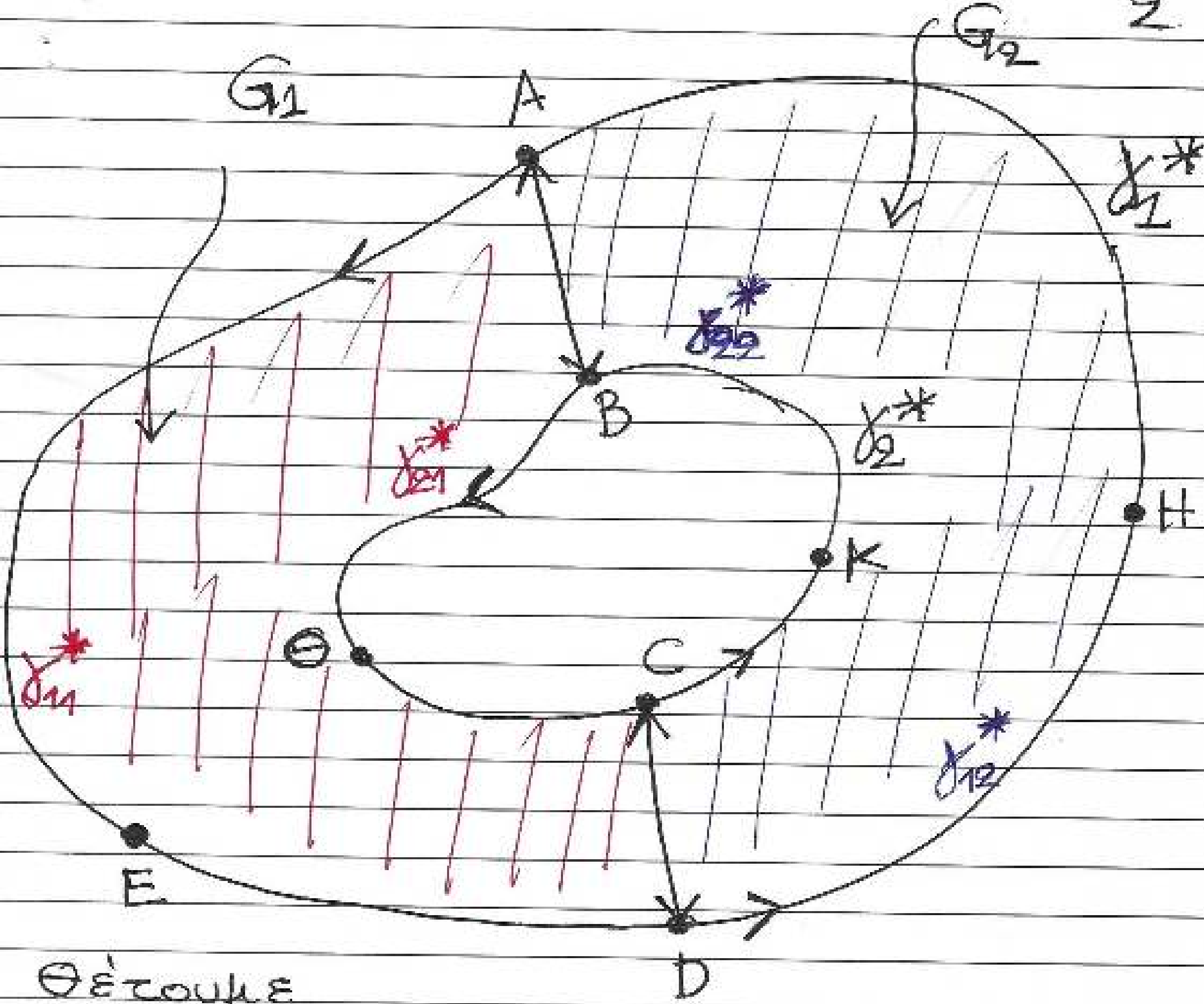
- f ολόμορφη στο G
- f συνεχής στο $\gamma_1^* \cup \gamma_2^*$

Τότε,

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

Απόδειξη:

$\longrightarrow$



Θέτουμε

$$\gamma_{11} = A \xrightarrow{\gamma_1} E \xrightarrow{\gamma_1} D, \quad \gamma_{12} = D \xrightarrow{\gamma_1} H \xrightarrow{\gamma_1} A,$$

$$\gamma_{21} = B \xrightarrow{\gamma_2} \Theta \xrightarrow{\gamma_2} C, \quad \gamma_{22} = C \xrightarrow{\gamma_2} K \xrightarrow{\gamma_2} B.$$

Τότε,

$$\gamma_1 = \gamma_{11} + \gamma_{12}, \quad \gamma_2 = \gamma_{21} + \gamma_{22}.$$

Θέτουμε

$$\Gamma_1 = \gamma_{11} + \overrightarrow{DC} - \gamma_{21} + \overrightarrow{BA}, \quad \Gamma_2 = \gamma_{12} + \overrightarrow{AB} - \gamma_{22} + \overrightarrow{CD}.$$

Τα $G_1 = \text{int}\,\Gamma_1$, $G_2 = \text{int}\,\Gamma_2$ είναι <u>απλώς συνεκτικά πεδία.</u>

Εφαρμόζοντας το Θ. Cauchy-Goursat (ισχυρή εκδοχή) για τις καμπύλες Γ_1, Γ_2 παίρνουμε

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = \int_{\gamma_{11}} f + \int_{\overrightarrow{DC}} f + \int_{-\gamma_{21}} f + \int_{\overrightarrow{BA}} f. \quad (1) \\ 0 = \int_{\gamma_{12}} f + \int_{\overrightarrow{AB}} f + \int_{-\gamma_{22}} f + \int_{\overrightarrow{CD}} f. \quad (2) \end{cases}$$

Είναι $\gamma_{11} + \gamma_{12} = \gamma_1$,

$$(-\gamma_{21}) + (-\gamma_{22}) = -\gamma_2,$$

$$0 = \int_{\overrightarrow{DC}} f + \int_{\overrightarrow{CD}} f = \int_{\overrightarrow{BA}} f + \int_{\overrightarrow{AB}} f.$$

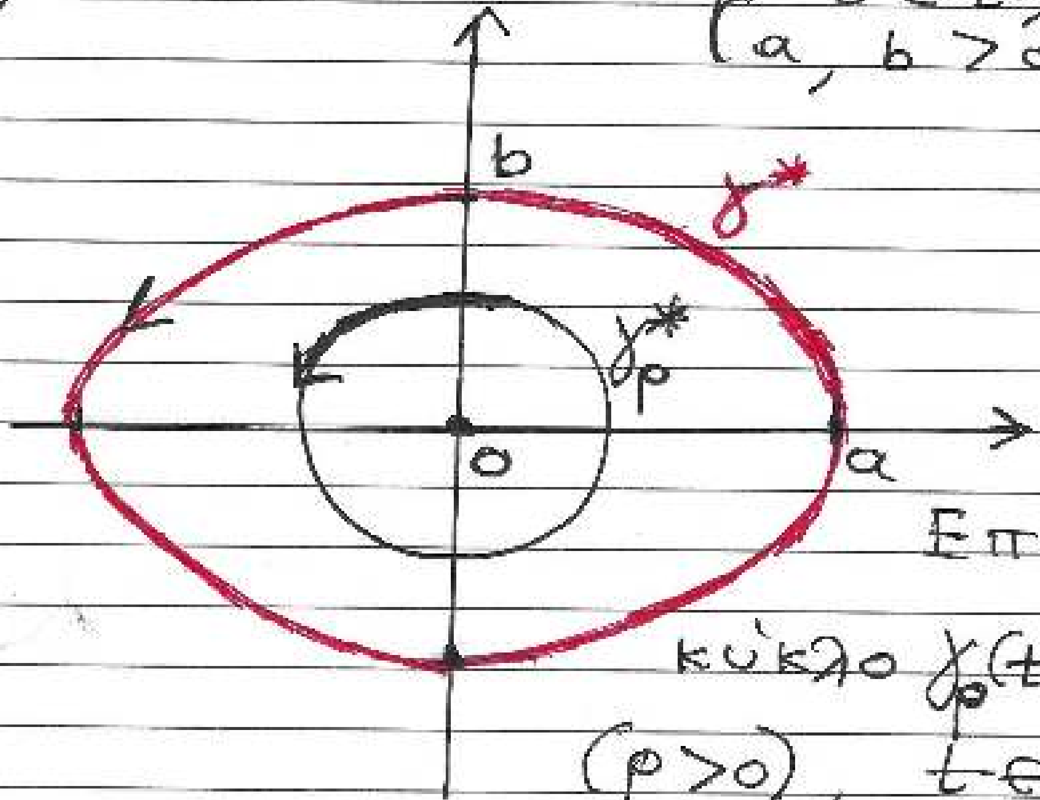
$(1)+(2) \Rightarrow$

$$0 = \int_{\gamma_1} f + \int_{-\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f. \quad \boxtimes$$

<u>Εφαρμογή:</u>

$\int_\gamma \frac{dz}{z} = ?$, $\gamma(t) = a\cos t + i(b\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ $(a, b > 0)$.



Επιλέγουμε κύκλο $\gamma_\rho(t) = \rho e^{it}$ $(\rho > 0)$, $t \in [0, 2\pi]$

με $\gamma_\rho^* \subset \operatorname{int}\gamma^*$.

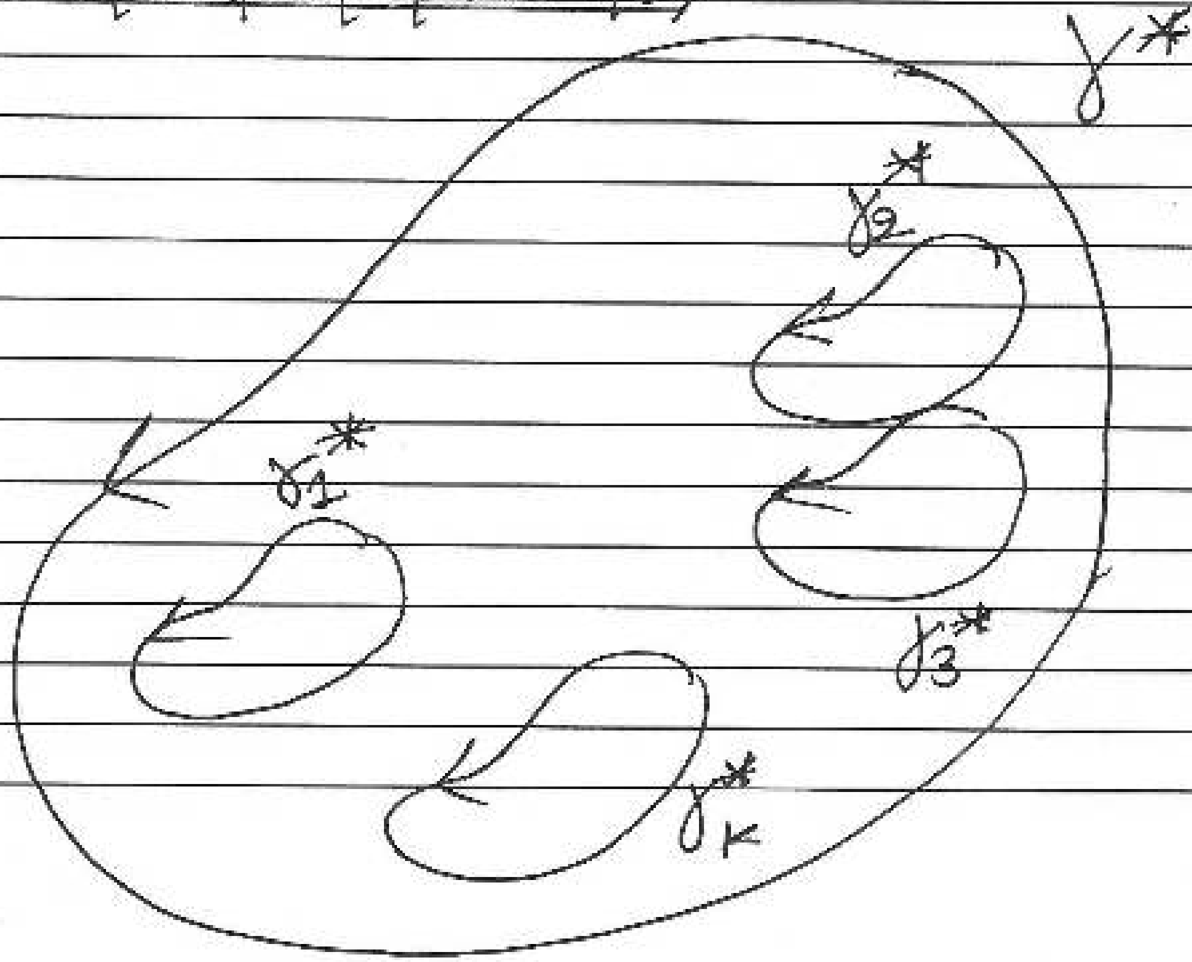
Η $f(z)=1/z$ είναι ολόμορφη στο πεδίο που βρίσκεται μεταξύ των γ^*, γ_ρ^* κ' συνεχής στο $\gamma^* \cup \gamma_\rho^*$.

Αρχή Παραμόρφωσης $\Longrightarrow$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it}}{\rho e^{it}} dt$$

$$= 2\pi i.$$

Θ.2. (Γενικευμένη Αρχή Παραμόρφωσης)



Έστω $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ $(k \geq 1)$ θετικά προσανατολισμένες, απλές, κλειστές, τμηματικά λείες καμπύλες, ώστε

- $\operatorname{int}\gamma^* \supset \gamma_j^*, \quad 1 \leq j \leq k$
- $\operatorname{int}\gamma_i^* \cap \operatorname{int}\gamma_j^* = \emptyset,$

$\forall\, i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq k.$

Θεωρούμε συνάρτηση f που είναι

$\rightarrow$ συνεχής στο $\gamma^* \cup \left(\bigcup_{j=1}^{k} \gamma_j^* \right)$

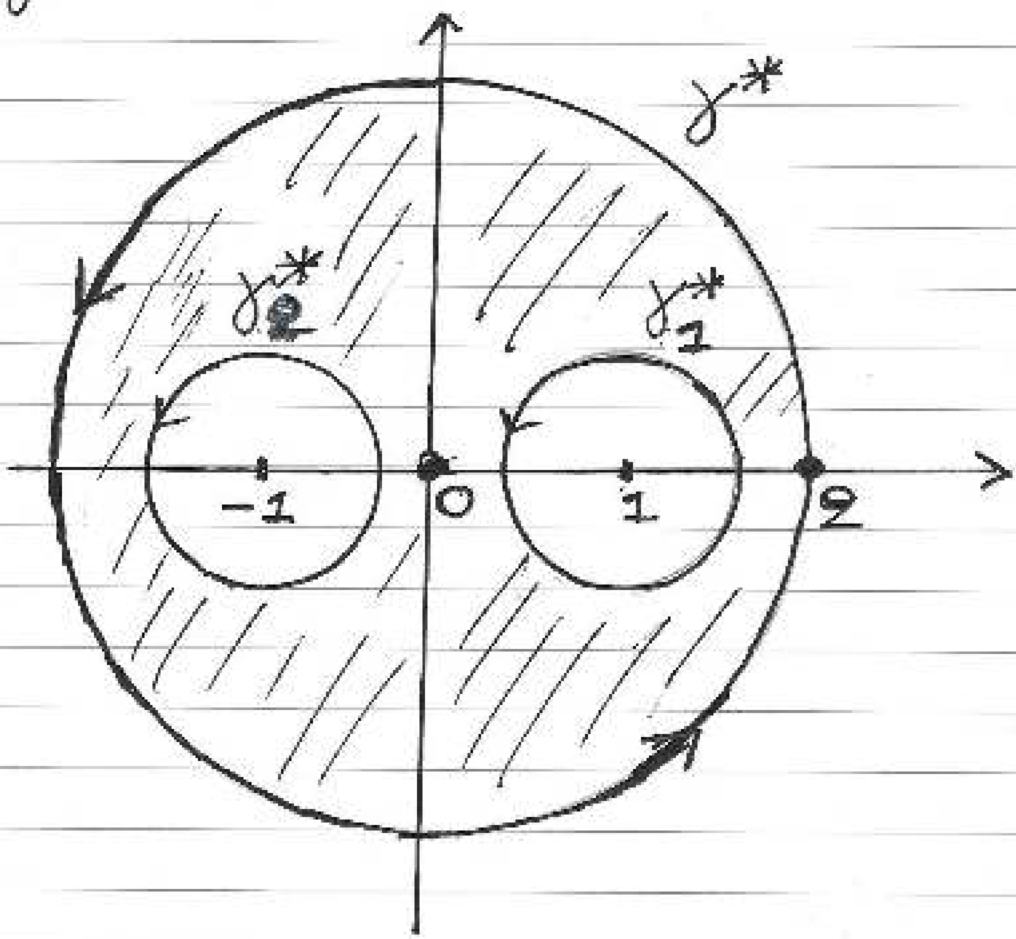
$\rightarrow$ ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των $\gamma^*, \gamma_1^*, \gamma_2^*, \ldots, \gamma_k^*$.

Τότε,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz.$$

Εφαρμογή:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2-1} = ?, \quad \gamma(t) = 2e^{it}, \ t \in [0, 2\pi].$$



Θεωρούμε δύο κύκλους γ_1, γ_2 με κέντρα $1, -1$ αντίστοιχα ώστε

$$\gamma_1^* \cap \gamma_2^* = \emptyset, \quad \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \subset \operatorname{int}\gamma^*.$$

Η $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}$ είναι ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των $\gamma^*, \gamma_1^*, \gamma_2^*$ και συνεχής στο $\gamma^* \cup \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$.

<u>Γενικευμένη Αρχή Παραμόρφωσης</u> $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Έχουμε $f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)$,

οπότε

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \frac{1}{2}\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{2}\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z+1},$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \frac{1}{2}\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{2}\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z+1}.$$

Οι συναρτήσεις $z \mapsto \frac{1}{z+1}$, $z \mapsto \frac{1}{z-1}$

είναι ολόμορφες στα $\operatorname{int}\gamma_1^*$, $\operatorname{int}\gamma_2^*$

αντίστοιχα $\xRightarrow{\text{Θ-Cauchy}}$

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z+1} = \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z-1} = 0,$$

ενώ $\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-1} = \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z+1} = 2\pi i$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} f(z)dz = \pi i - \pi i = 0.$$

<u>Συμβολισμός:</u>

$\mathscr{C} = \{\gamma \mid \gamma$ απλή, κλειστή, τμ. λεία καμπύλη$\}$

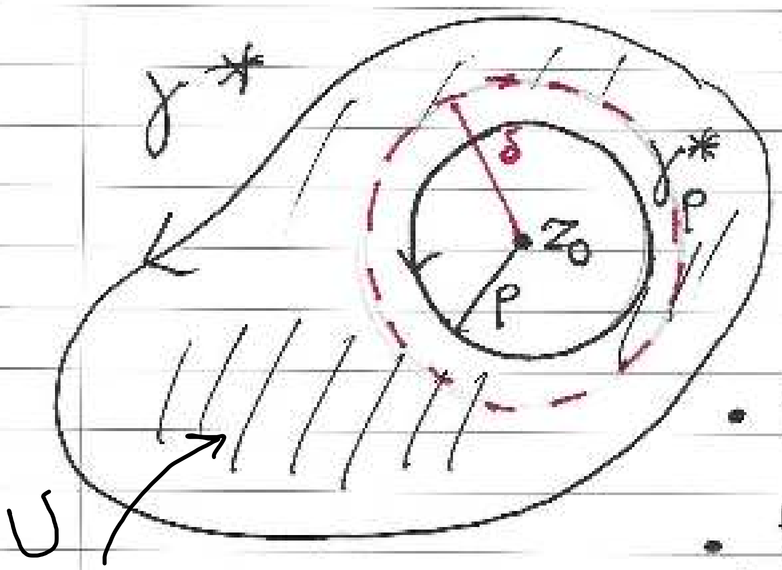
$\mathscr{C}^+ = \{\gamma \in \mathscr{C} / \gamma$ θετικά προσανατολισμένη$\}$

<u>Θ.3 (ολοκληρωτικός τύπος Cauchy)</u>

Έστω $\gamma \in \mathscr{C}^+$ με εσωτερικό $\text{int}\,\gamma^* = U$, $f \in \mathcal{H}(U)$ και f συνεχής στο γ^*. Εάν $z_0 \in U$, τότε

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = f(z_0).$$

<u>Απόδειξη:</u>



Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή f συνεχής στο $z_0 \in U$, $\exists\, \delta > 0 \mid$

- $D(z_0, \delta) \subset U$
- $\forall z \in D(z_0, \delta)$, $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon / 2\pi$ (3)

Επιλέγουμε $\rho \in (0,\delta)$ ώστε

$\gamma_\rho^* \subset U$, όπου $\gamma_\rho^* = z_0 + \rho e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$.

Η συνάρτηση $z \mapsto \dfrac{f(z)}{z-z_0}$ είναι

ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των

$\gamma^*, \gamma_\rho^* \xrightarrow[\text{Παραμόρφ.}]{\text{Αρχή}} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz =$

$$= \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz +$$

$$+ f(z_0)\int_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z-z_0} = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz +$$

$$+ \; 2\pi i f(z_0)$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - 2\pi i f(z_0) = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz \qquad (4)$$

$\forall z \in \gamma_\rho^*$, $|z-z_0| = \rho < \delta \overset{(3)}{\Longrightarrow} |f(z)-f(z_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2\pi}$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi\rho}$$

ML-ανισ. $\Longrightarrow \left| \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz \right| \leq 2\pi\rho \frac{\varepsilon}{2\pi\rho}$

$= \varepsilon$

$\overset{(4)}{\Longrightarrow} \left| \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| \leq \varepsilon.$

Η τελευταία ισχύει $\forall \varepsilon > 0$

$\Longrightarrow \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$ ⊠

<u>Χαρακτηριστικές ασκήσεις</u>

(1) $\int_\gamma \frac{e^z}{z^2-1} dz = ?$, $\gamma(t) = 2e^{it}$,
$t \in [0, 2\pi]$.

<u>Λύση:</u> Θεωρούμε κύκλους $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}^+$ κέντρων $1, -1$ αντίστοιχα με
$\gamma_1^*, \gamma_2^* \subset \mathrm{int}\,\gamma^*$, $\gamma_1^* \cap \gamma_2^* = \emptyset$.
(βλ. σχήμα σελ. 7).

Η συνάρτηση $z \mapsto f(z) = \frac{e^z}{z^2-1}$

είναι ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των

$$\gamma^*, \gamma_1^*, \gamma_2^*$$

$$\xrightarrow[\text{Αρχή Παραμ.}]{\text{Γενικευμ.}} \int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

Έχουμε

- $$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_1} \frac{e^z}{(z+1)(z-1)}dz = \int_{\gamma_1} \frac{\frac{e^z}{z+1}}{z-1}dz$$

$$\overset{\text{Ολοκλ.}}{\underset{\text{T. Cauchy}}{=}} \quad 2\pi i \left.\frac{e^z}{z+1}\right|_{z=1} = \pi i e.$$

Σημ. ότι $-1 \notin \operatorname{int}\gamma_1^*$, οπότε

η $z \mapsto \frac{e^z}{z+1}$ είναι ολόμορφη

στο $\operatorname{int}\gamma_1^*$.

Επιπλέον, $1 \in \operatorname{int}\gamma_1^*$.

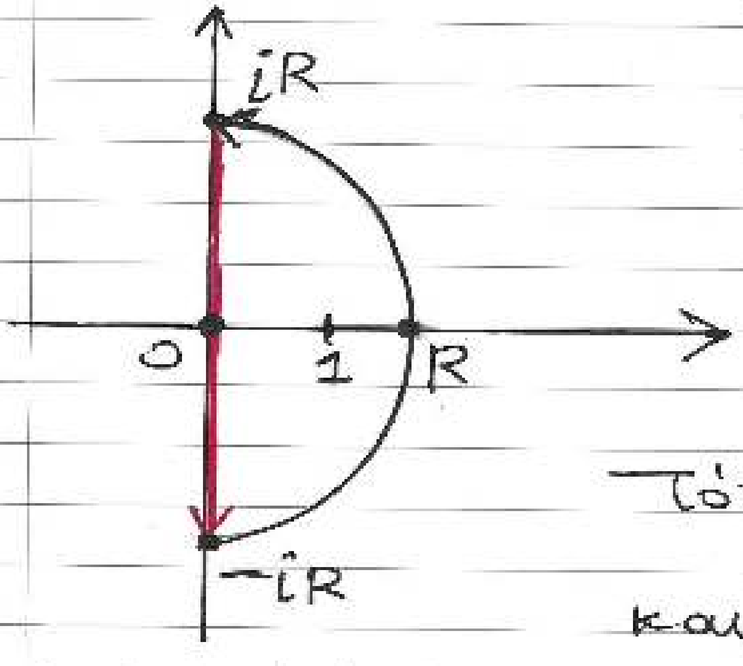
• $\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} \frac{\frac{e^z}{z-1}}{z+1}\, dz =$

$\overset{\text{Θ.Τ.}}{\underset{\text{Cauchy}}{=}} 2\pi i \left.\frac{e^z}{z-1}\right|_{z=-1} = -\pi i/e.$

Σημ. ότι $1 \notin \text{int}\,\gamma_2^*$, οπότε η $z \mapsto \frac{e^z}{z-1}$ είναι ολόμορφη στο $\text{int}\,\gamma_2^*$. Επιπλέον, $-1 \in \text{int}\,\gamma_2^*$.

---

(2) $\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2-1} = ?$, $\gamma_R(t) = Re^{it}$ $(R>1)$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$



Λύση

Θεωρούμε την καμπύλη $\Gamma_R = \gamma_R + [iR, -iR]$.

Τότε, $\Gamma_R \in \mathcal{C}^+$

και $1 \in \text{int}\,\Gamma_R^*$.

Η συνάρτηση $z \mapsto \frac{1}{z+1}$ είναι ολόμορφη στο $\operatorname{int}\Gamma_R^* \xRightarrow[\text{Cauchy}]{\text{Θ.Τ.}}$

$$\int_{\Gamma_R} \frac{\frac{1}{z+1}}{z-1}\,dz = 2\pi i \left.\frac{1}{z+1}\right|_{z=1} = \pi i$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^2-1} = \pi i.$$

Ταυτόχρονα,

$$\int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^2-1} = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2-1} + \int_{[iR,-iR]} \frac{dz}{z^2-1}$$

$$\Rightarrow \pi i = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2-1} - \int_{[-iR,iR]} \frac{dz}{z^2-1}.$$

Αλλά, $\displaystyle\int_{[-iR,iR]} \frac{dz}{z^2-1} = \int_{-R}^{R} \frac{d(it)}{(it)^2-1} =$

$$= -i\int_{-R}^{R} \frac{dt}{t^2+1} = -2i\operatorname{Arctan} R$$

$$\Longrightarrow \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2-1} = \pi i - 2i \operatorname{Arctan} R.$$

---

(3) (α) Να δείξετε ότι

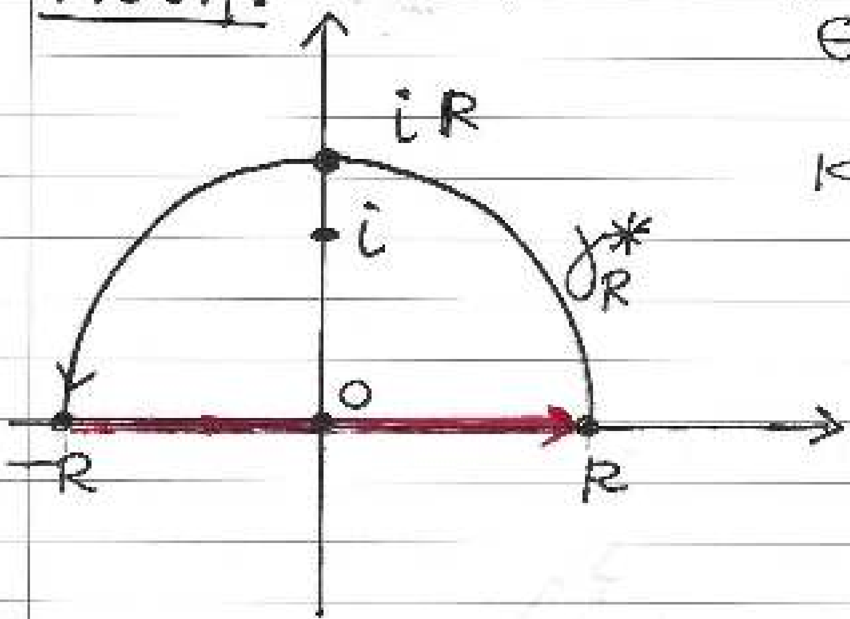
$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\, dz = 0,$$

όπου $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0,\pi]$.

(β) Να υπολογίσετε το

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\, dt.$$

Λύση: Έστω $R>1$.



Θεωρούμε την καμπύλη $\Gamma_R = \gamma_R + [-R,R]$.

Τότε, $\Gamma_R \in \mathcal{C}^+$ και $i \in \operatorname{int}\Gamma_R$

$$\xrightarrow[\text{Cauchy}]{\text{O.T.}} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz = \int_{\Gamma_R} \frac{\frac{e^{iz}}{z+i}}{z-i}\,dz$$

$$= 2\pi i \left.\frac{e^{iz}}{z+i}\right|_{z=i} = \pi/e.$$

Ταυτόχρονα,

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz = \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz + \int_{-R}^{R} \frac{e^{it}}{1+t^2}\,dt \quad (5)$$

Αλλά, $\forall z \in \gamma_R^*$ με $z = x+iy$, έχουμε

$$y \geq 0 \Rightarrow iz = -y + ix$$

$$\Rightarrow |e^{iz}| = e^{-y} \leq 1$$

$$\Rightarrow \left|\frac{e^{iz}}{1+z^2}\right| \leq \frac{1}{|1+z^2|}$$

και $|z^2+1| \geq |z|^2 - 1 = R^2 - 1$

$$\xrightarrow[(R>1)]{} \left|\frac{e^{iz}}{1+z^2}\right| \leq \frac{1}{R^2-1}$$

ML-ανισ. $\Rightarrow \left| \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz \right| \le \cancel{2}\pi R \frac{1}{R^2-1} \xrightarrow{R\to+\infty} 0.$

Παίρνοντας το όριο καθώς $R\to+\infty$ στην (5) κ' επειδή $\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz = \pi/e$, παίρνουμε

$$\pi/e = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\,dt + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{1+t^2}\,dt$$

$$\Rightarrow \underline{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\,dt = \pi/e.}$$

(4) $\int_{\gamma} \bar{z}\cos z\,dz = ?$, $\gamma(t)=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$

<u>Λύση</u>: $\forall z\in\gamma^*$, $|z|=1 \Rightarrow \bar{z}=1/z$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \bar{z}\cos z\,dz = \int_{\gamma} \frac{\cos z}{z}\,dz \stackrel{\text{o.τ.-Cauchy}}{=\!=} 2\pi i \cos z\Big|_{z=0} = 2\pi i$$

(5) Έστω $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ και $f \in \mathcal{H}(U)$, όπου $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό με $\gamma^* \subset U$. Να δείξετε ότι

$$\int_\gamma \frac{1}{z} \overline{f(z)}\, dz = 2\pi i \overline{f(0)}.$$

Λύση: $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z}\overline{f(z)}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \overline{f(e^{it})}\, i e^{it}\, dt$

$$= i \int_0^{2\pi} \overline{f(e^{it})}\, dt = i\, \overline{\int_0^{2\pi} f(e^{it})\, dt}.$$

Αλλά, $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{it})\, dt = \frac{1}{i} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{e^{it}}\, i e^{it}\, dt$

$$= \frac{1}{i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z}\, dz \overset{\text{Θ.Τ. Cauchy}}{=\!=} \frac{1}{i}\, 2\pi i\, f(0) = 2\pi f(0)$$

$$\Longrightarrow \int_\gamma \frac{1}{z}\overline{f(z)}\, dz = 2\pi i \overline{f(0)}.$$

(6) Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό με

$$D[0,2] = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\} \subseteq U$$

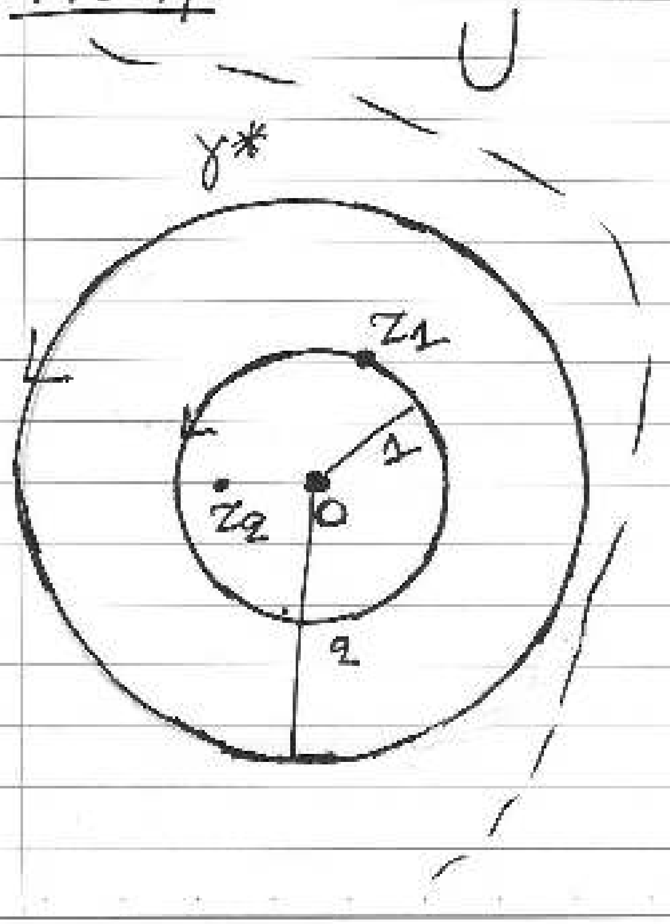
και $f \in \mathcal{H}(U)$, τέτοια ώστε

$$|f(z)| \leq 1, \text{ για } |z| = 2.$$

Να δείξετε ότι $\forall\, z_1, z_2 \in D[0,1]$,

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq 2|z_1 - z_2|.$$

<u>Λύση:</u>



Έστω $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ και $z_1, z_2 \in D[0,1]$.

Τότε, $z_1, z_2 \in \operatorname{int}\gamma^*$.

$\xRightarrow[\text{Cauchy}]{\text{Ο.Τ.}}$

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_1}\, dz$$

$$f(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_2}\, dz$$

$$\Rightarrow f(z_1)-f(z_2)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\left(\frac{1}{z-z_1}-\frac{1}{z-z_2}\right)dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\frac{\cancel{z}-z_2-\cancel{z}+z_1}{(z-z_1)\cdot(z-z_2)}\,dz$$

$$=\frac{z_1-z_2}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_1)\cdot(z-z_2)}\,dz.$$

Αλλά, $\forall z\in\gamma^*$, $|z|=2 \xRightarrow{(\text{υπόθεση})}$

$\Rightarrow |f(z)|\leq 1$ και

$|z-z_1|\geq |z|-|z_1|=2-|z_1|\geq 1,$

$|z-z_2|\geq - - - - \geq 1$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}\right|\leq\frac{1}{1\cdot 1}=1$$

$$\xRightarrow{(ML-\text{ανισ.})} \left|\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}\,dz\right|\leq 4\pi$$

κλπ

I. Σειρές μιγαδικών αριθμών

Ορισμός I.1. Για κάθε ακολουθία $(z_n) \subset \mathbb{C}$, θεωρούμε την παράσταση

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots \quad \text{ή} \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

και την ονομάζουμε σειρά με γενικό όρο (z_n).

Η ακολουθία (S_n) με $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$, $n \geq 1$ λέγεται ακολουθία μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

Ορισμός I.2. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει ανν $\lim_{n\to\infty} S_n = L \in \mathbb{C}$.

Σ' αυτή την περίπτωση γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = L.$$

<u>Παράδειγμα (Γεωμετρική σειρά):</u>

Για $|z|<1$, $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = 1+z+z^2+\dots$

$$= \frac{1}{1-z}.$$

Πράγματι $\forall n \geq 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$ με $|z|<1$,

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z^{k-1} - \frac{1}{1-z} \right| =$$

$$= \left| 1+z+\dots+z^{n-1} - \frac{1}{1-z} \right|$$

$$= \left| \frac{1-z^n}{1-z} - \frac{1}{1-z} \right| = \frac{|z|^n}{|1-z|} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

<u>Πρόταση Ι.3.</u> Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ συγκλίνουσες σειρές και $\lambda \in \mathbb{C}$.

Τότε, οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n + w_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda z_n)$$

συγκλίνουν και ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n + w_n) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n + \sum_{n=1}^{\infty} w_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda z_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Επιπλέον, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{z_n}$ συγκλίνει και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{z_n} = \overline{\sum_{n=1}^{\infty} z_n}.$$

<u>Πρόταση I.4.</u> <u>(Κριτήριο απόλυτης σύγκλισης)</u>

Εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει και ισχύει

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|.$$

<u>Πρόταση I.5.</u> <u>(Κριτήριο του λόγου)</u>.

Έστω $(z_n) \subset \mathbb{C}$, με $z_n \neq 0$, $\forall n \geq 1$.

- Εάν $\limsup_n \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει (απόλυτα).

- Εάν $\liminf_n \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| > 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ αποκλίνει.

- Εάν $\liminf_n \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \leq 1 \leq \limsup_n \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$,

το κριτήριο <u>δεν</u> αποφαίνεται.

<u>Παράδειγμα</u>

Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ συγκλίνει απόλυτα, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Πράγματι· $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1.$$

Πρόταση I.5. (Κριτήριο Ρίζας)

- Εάν $\limsup_n \sqrt[n]{|z_n|} < 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει απόλυτα.

- Εάν $\liminf_n \sqrt[n]{|z_n|} > 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ αποκλίνει.

- Εάν
$$\liminf_n \sqrt[n]{|z_n|} \leq 1 \leq \limsup_n \sqrt[n]{|z_n|},$$
το κριτήριο δεν αποφαίνεται.

Παράδειγμα: Θεωρούμε τη σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}.$$

$$\sqrt[n]{\left|\frac{z^n}{n^2}\right|} = \frac{|z|}{(\sqrt[n]{n})^2} \xrightarrow{n} |z|.$$

Εάν $|z|<1$ (αντ. $|z|>1$), η σειρά συγκλίνει (αντ. αποκλίνει).

Για $|z|=1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$

Συνοψίζοντας, η σειρά

- συγκλίνει, για $|z| \leq 1$.
- αποκλίνει, για $|z| > 1$.

Πρόταση Ι.6: Εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει, τότε $z_n \xrightarrow{n} 0$.

ΙΙ. Δυναμοσειρές

Ορισμός ΙΙ.1. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Δυναμοσειρά με κέντρο z_0 κ' συντελεστές a_n, $n\in\mathbb{N}$, είναι η σειρά

$$\boxed{a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.} \quad (1)$$

Θέτουμε $L = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \in [0,\infty]$.

Η ακτίνα σύγκλισης της (1) ορίζεται ως:

$$R = \begin{cases} 1/L, & \text{αν } L \in (0,\infty) \\ 0, & \text{αν } L = \infty \\ +\infty, & \text{αν } L = 0 \end{cases}$$

<u>Πρόταση ΙΙ.1.</u> Θεωρούμε τη δυναμοσειρά (1) με ακτίνα σύγκλισης $R \in [0, +\infty]$.

<u>(α)</u> Αν $R = 0$, η (1) <u>αποκλίνει</u>, $\forall z \in \mathbb{C}$.

(β) Αν $R = +\infty$, η (1) <u>συγκλίνει</u>, $\forall z \in \mathbb{C}$.

(γ) Αν $0 < R < +\infty$, τότε η (1)

- συγκλίνει, $\forall z \in D(z_0, R)$
- αποκλίνει, για $|z - z_0| > R$.

Ο δίσκος

$(0 < R < \infty)$ $$D(z_0, R) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R \}$$

λέγεται <u>δίσκος σύγκλισης της (1)</u>.

Για $R = \infty$, ορίζουμε

$$D(z_0, R) = \mathbb{C}.$$

Θεώρημα ΙΙ.2. (Παραγώγιση δυναμοσειράς)

Έστω $R \in (0, +\infty]$ η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad z \in D(z_0, R).$$

Τότε, η f είναι ολόμορφη στο $D(z_0, R)$ και ισχύει

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}, \quad z \in D(z_0, R).$$

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το παρακάτω

Λήμμα ΙΙ.3. Έστω $z, h \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $\delta > 0$ με $|h| \leq \delta$. Τότε,

$$\left| (z+h)^n - z^n - n z^{n-1} \cdot h \right| \leq \frac{|h|^2}{\delta^2} (|z| + \delta)^n.$$

Απόδειξη:

Από το Διώνυμο του Νεύτωνα έχουμε

$$\left|(z+h)^n - z^n - nz^{n-1}\cdot h\right| = \left|\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k} z^{n-k}\cdot h^k\right|$$

$$\leq \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}|z|^{n-k}\cdot|h|^k$$

$$= \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}|z|^{n-k}\cdot|h|^2\cdot|h|^{k-2}$$

$$\leq |h|^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}|z|^{n-k}\delta^{k-2}$$

$$= \frac{|h|^2}{\delta^2}\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}|z|^{n-k}\cdot\delta^k$$

$$\leq \frac{|h|^2}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|z|^{n-k}\cdot\delta^k$$

$$= \frac{|h|^2}{\delta^2}(|z|+\delta)^n.$$

$\boxtimes$

Απόδειξη του Θ. ΙΙ. 2:

Θέτουμε
$$\boxed{g(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}.} \quad (2)$$

Είναι $\limsup_n \sqrt[n]{n|a_n|}=\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$ (αφού $\lim_n \sqrt[n]{n}=1$), οπότε η ακτίνα σύγκλισης της (2) είναι

$$\frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{n|a_n|}}=\frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}}=R.$$

Άρα, η g που δίνεται από την (2) ορίζεται για $z\in D(z_0,R)$.

• Υποθέτουμε ότι $z_0=0$. Τότε,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1},$$

για $|z|<R$.

Έστω $z \in D(z_0, R)$. Επιλέγουμε $\delta > 0$ με

$$0 < \delta < R - |z|, \text{ για } R < \infty$$

κ' $\delta > 0$ τυχαίο, για $R = \infty$.

Έστω $h \in \mathbb{C}$ με

$$0 < |h| < \delta.$$

Έχουμε

$$f(z+h) - f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[(z+h)^n - z^n\right]$$

$$\Rightarrow f(z+h) - f(z) - hg(z) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[(z+h)^n - z^n - n z^{n-1} \cdot h\right]$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left[(z+h)^n - z^n - n z^{n-1} h\right]$$

$$\Rightarrow |f(z+h) - f(z) - hg(z)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \cdot \left|(z+h)^n - z^n - n z^{n-1} \cdot h\right|$$

(Λήμμα II.3)

$\Rightarrow$

$$\left|f(z+h)-f(z)-hg(z)\right| \leq$$

$$\leq \frac{|h|^2}{\delta^2}\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\cdot(|z|+\delta)^n$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-g(z)\right| \leq$$

$$\leq \frac{|h|}{\delta^2}\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\cdot(|z|+\delta)^n.$$

Αλλά, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ είναι R, επί $|z|+\delta<R$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}|a_n|(|z|+\delta)^n = M < \infty$$

Έχουμε λοιπόν ότι για $0<|h|<\delta$,

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-g(z)\right| \leq \frac{M}{\delta^2}|h|$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = g(z)$$

$\Rightarrow$ f διαφορίσιμη στο z κ'

$$f'(z) = g(z), \ \forall z \in D(0,R).$$

• <u>Γενική περίπτωση: $z_0 \in \mathbb{C}$.</u>

Εφαρμόζουμε την προηγούμενη περίπτωση για τη συνάρτηση

$$\tilde{f}(w) = f(w+z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n, \quad |w|<R$$

κ' παίρνουμε

$$f'(w+z_0) = \tilde{f}'(w) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1}, \quad \text{για } |w|<R.$$

Άρα, για $|z-z_0|<R$, θέτοντας $w=z-z_0$, παίρνουμε

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}. \quad \boxtimes$$

<u>Πόρισμα ΙΙ.4.</u> Έστω η δυναμοσειρά

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \; z\in D(z_0,R)$$

$(0<R\leq\infty)$.

Τότε, υπάρχουν όλων των τάξεων οι παράγωγοι $f', f'', \dots, f^{(k)}, \dots,\ k\geq 1$ και ισχύει $\forall\, k\geq 1$,

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\,a_n (z-z_0)^{n-k},$$

για $z\in D(z_0,R)$.

Επιπλέον,

$$a_k=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

<u>Απόδειξη:</u>
Η απόδειξη του α΄ σκέλους γίνεται με επαγωγή στο k, με χρήση του Θ. ΙΙ-2.
Για το β΄ σκέλος έχουμε, $\forall\, k\geq 1$,

$$f^{(k)}(z_0)=k(k-1)\cdots 1\cdot a_k = k!\,a_k,$$

ενώ προφανώς $f(z_0)=a_0$. $\boxtimes$

III. Ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθιών κ' σειρών συναρτήσεων.

Ορισμός III. 1. Έστω $K \subseteq \mathbb{C}$ και μια ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n : K \to \mathbb{C},\ n \geq 1.$$

Έστω και $f : K \to \mathbb{C}$ συνάρτηση.

Θα λέμε ότι

$f_n \to f$ ομοιόμορφα στο K

αν $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ \forall z \in K,$

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Πρόταση III. 2: Έστω γ τμ. λεία καμπύλη κ' $f_n : \gamma^* \to \mathbb{C},\ n \geq 1,\ f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχείς με $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο γ^*.

Τότε,

$$\lim_n \int_\gamma f_n(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο γ^*,

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ \forall z \in \gamma^*,$

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon / \|\gamma\|,$$

όπου $\|\gamma\| =$ μήκος(γ). Τότε, $\forall n \geq n_0$,

$$\left| \int_\gamma f_n(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz \right| = \left| \int_\gamma [f_n(z) - f(z)]\,dz \right|$$

$$\overset{(\text{ML-ανισ.})}{\leq} \frac{\varepsilon}{\|\gamma\|} \cdot \|\gamma\| = \varepsilon.$$

$\boxtimes$

<u>Πρόταση III.3:</u> Έστω γ τμ. λεία καμπύλη κ' $f_n : \gamma^* \to \mathbb{C}$, $n \geq 1$, συνεχείς, ώστε

$$|f_n(z)| \leq \theta_n, \quad z \in \gamma^*, \quad n \geq 1,$$

όπου $(\theta_n) \subset (0, +\infty)$ με

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n < \infty.$$

Τότε,

$$\int_\gamma \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right] dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz.$$

Απόδειξη: Θέτουμε

$$g_n(z) = \sum_{j=1}^{n} f_j(z), \quad n \geq 1, \; z \in \gamma^*,$$

$$g(z) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(z), \quad z \in \gamma^*.$$

Η $g : \gamma^* \to \mathbb{C}$ ορίζεται καλώς, αφού

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(z)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j < \infty, \quad \forall z \in \gamma^*.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\sum_{j=1}^{\infty} \theta_j < \infty$,

$\exists N \in \mathbb{N} \,|\, \sum_{j>N} \theta_j < \varepsilon$.

Τότε, $\forall n \geq N$, $\forall z \in \gamma^*$,

$$|g_n(z) - g(z)| = \Big| \sum_{j>n} f_j(z) \Big| \leq$$

$$\leq \sum_{j>n} |f_j(z)| \leq \sum_{j>n} \theta_j \leq \sum_{j>N} \theta_j < \varepsilon.$$

Άρα,

$g_n \to g$ ομοιόμορφα στο γ^*.

Επιπλέον, η g είναι συνεχής.

Πράγματι· έστω $z_0 \in \gamma^*$, $\varepsilon > 0$.

Επιλέγουμε $N \in \mathbb{N} \mid N \geq 1$ και

$$|g_N(z) - g(z)| < \varepsilon/3, \ \forall z \in \gamma^*$$

(σημ. ότι $g_n \to g$ ομοιόμορφα στο γ^*)

Επειδή g_N συνεχής στο z_0,

$\exists \delta > 0 \mid \forall z \in \gamma^*$ με $|z - z_0| < \delta$,

ισχύει $\quad |g_N(z) - g_N(z_0)| < \varepsilon/3$.

Τότε, για $z \in \gamma^*$ με $|z - z_0| < \delta$,

$$|g(z) - g(z_0)| \leq |g(z) - g_N(z)| + |g_N(z) - g_N(z_0)| + |g_N(z_0) - g(z_0)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Από Πρότ. III. 2,

$$\lim_n \int_\gamma g_n(z)\,dz = \int_\gamma g(z)\,dz. \ \boxtimes$$

ΘΕΩΡΗΜΑ TAYLOR
ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ CAUCHY ΓΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

Πρόταση 1: Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < r < R \leq \infty$ και f ολόμορφη στον δίσκο $D(z_0, R)$.

Εάν $|z - z_0| < r$, τότε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

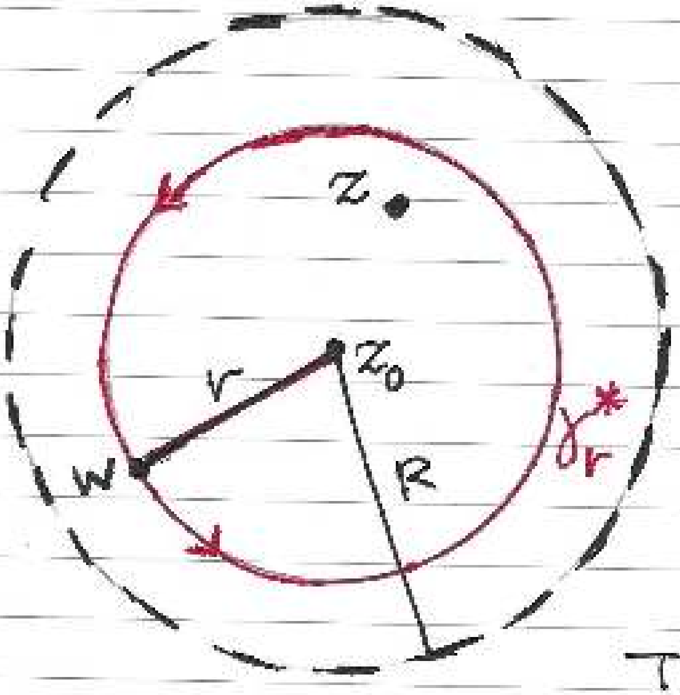
όπου

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, dw, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Απόδειξη:

$\longrightarrow$



$$\gamma_r^* \subset D(z_0, R)$$

$$|z-z_0| < r$$

$$\Rightarrow \quad z \in \operatorname{int}\gamma_r^*.$$

Από Ολοκληρωτικό Τύπο του Cauchy παίρνουμε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)}\,dw.$$

$\forall w \in \gamma_r^*$, έχουμε $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{r} < 1$

$$\xrightarrow[\text{Σειρά}]{\text{Γεωμετρ.}} \quad \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^n}$$

$$\Rightarrow \frac{f(w)}{(w-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n .$$

Αλλά, $\forall\, w \in \gamma_r^*$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n \right| =$$

$$= \frac{|f(w)|}{r^{n+1}} |z-z_0|^n$$

$$\leq \frac{M_r}{r} \left| \frac{z-z_0}{r} \right|^n ,$$

όπου $M_r = \max\limits_{w \in \gamma_r^*} |f(w)|$.

Όμως,
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z-z_0}{r} \right|^n < \infty ,$$

αφού $\left| \frac{z-z_0}{r} \right| < 1$.

Από την Πρότ. III. 3 του αρχείου

ΣΕΙΡΕΣ–ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ ΜΙΓΑΔ.
ΑΡΙΘΜ.

παίρνουμε

$$\int_{\gamma_r}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\right]dw =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right](z-z_0)^n$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-z}dw = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right](z-z_0)^n$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-z}dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right](z-z_0)^n.$$

$\boxtimes$

Θεώρημα 2 (Taylor)

Έστω $0 < R \leq \infty$ και f ολόμορφη στο δίσκο $D(z_0, R)$ $(z_0 \in \mathbb{C})$.

Τότε, υπάρχουν όλων των τάξεων οι παράγωγοι

$$f', f'', \ldots, f^{(k)}, \ldots, \quad k \in \mathbb{N},$$

στον $D(z_0, R)$ και

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

$\forall\, z \in D(z_0, R)$.

Επιπλέον, αν $0 < r < R$,

$$\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

τότε

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw,$$

$n \in \mathbb{N}$.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $0<r<R$

και $\gamma_r(t)=z_0+re^{it}$, $t\in[0,2\pi]$.

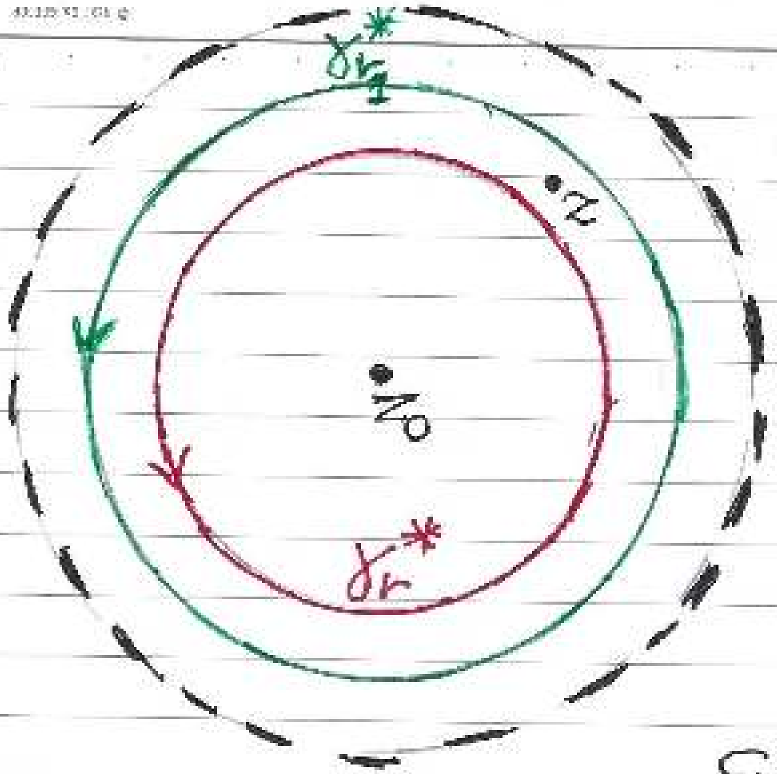
Θέτουμε
$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw,\ n\in\mathbb{N}.$$

Θα δ.ο.
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\ \forall z\in D(z_0,R).$$

→ Εάν $|z-z_0|<r$, το συμπέρασμα έπεται από την Πρόταση 1.

→ Έστω $r\leq|z-z_0|<R$.

Επιλέγουμε $r_1>0$ με
$$|z-z_0|<r_1<R$$
και θέτουμε
$$\gamma_{r_1}(t)=z_0+r_1e^{it},\ t\in[0,2\pi].$$



λόγω της Πρότ. 1, ισχύει

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

όπου

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Η συνάρτηση $w \mapsto \dfrac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}$ είναι ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των $\gamma^*_{r_1}, \gamma^*_{r}$, οπότε από την Αρχή Παραμόρφωσης παίρνουμε

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw = a_n, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad \forall z \in D(z_0, R).$$

Από το **Πόρισμα II.4** του αρχείου "ΣΕΙΡΕΣ - ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ - ΜΙΓΑΔ. ΑΡΙΘΜ.", παίρνουμε ότι υπάρχουν όλων των τάξεων οι παράγωγοι

$$f^{(k)}, \quad k \in \mathbb{N}$$

στον δίσκο $D(z_0, R)$ και

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}$$

(ή)

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$\boxtimes$

<u>Πόρισμα 3:</u> Εάν f ακέραια, δηλ. $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ολόμορφη, τότε $\forall\, z_0, z\in\mathbb{C}$,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

<u>Απόδειξη:</u> Είναι $\mathbb{C}=D(z_0,R)$ για $R=\infty$. Το συμπέρασμα έπεται από το Θ. 2. ⊠

<u>Πρόταση 4:</u> Έστω $U\subseteq\mathbb{C}$ ανοικτό κ' $f\in\mathcal{H}(U)$. Τότε, υπάρχουν όλων των τάξεων οι παράγωγοι $f^{(n)}, n\in\mathbb{N}$ και είναι όλες ολόμορφες στο U.

<u>Απόδειξη:</u>

<u>Ισχυρισμός:</u> $\forall g\in\mathcal{H}(U)$, ισχύει $g'\in\mathcal{H}(U)$.

[Πράγματι· έστω $z_0\in U \Rightarrow \exists\, R\in(0,\infty) /$

$$D(z_0,R)\subset U$$

$\xRightarrow{\Theta.2}$ $\exists$ η g'' στον $D(z_0,R)$

$\Longrightarrow$ g' διαφορίσιμη στο z_0.]

Τώρα, λόγω του ισχυρισμού παίρνουμε

$f' \in \mathcal{H}(U) \xrightarrow{\text{(ισχυρισμός)}}$

$$\Rightarrow f'' \in \mathcal{H}(U)$$

$$\xrightarrow{\text{ισχυρ.}} f''' \in \mathcal{H}(U)$$

κ.ο.κ.

$\boxtimes$

<u>Πρόταση 5 (ολοκλ. τύποι Cauchy για παραγώγους):</u>

Έστω $\gamma \in \mathcal{C}_+$ με

εσωτερικό $U = \operatorname{int}\gamma^*$ κ'

$$f : U \cup \gamma^* \to \mathbb{C}$$

με $f|_U \in \mathcal{H}(U)$, $f|_{\gamma^*}$ συνεχής.

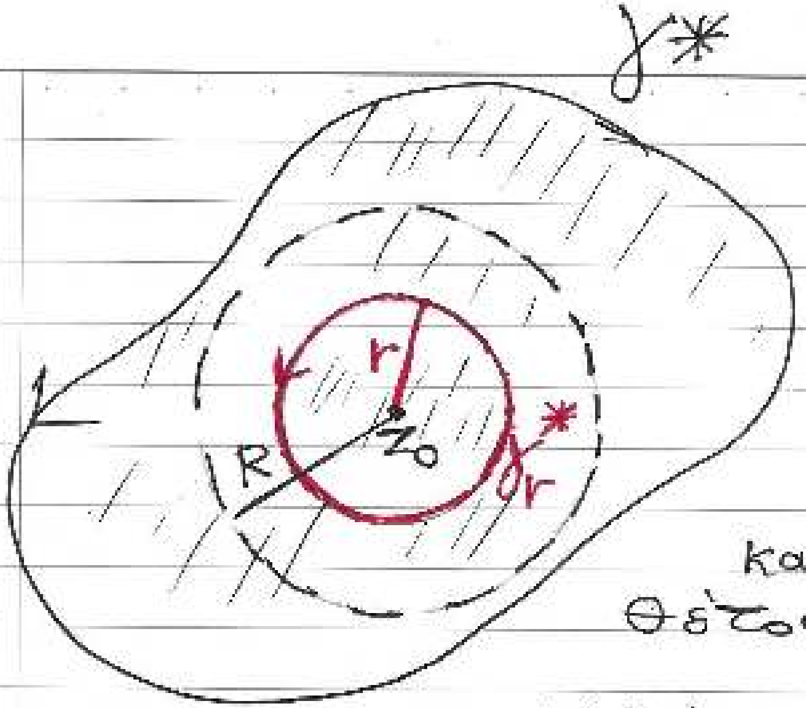
Εάν $z_0 \in U$, τότε

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw,$$

$n \in \mathbb{N}$.

<u>Απόδειξη:</u>

$\longrightarrow$



Επιλέγουμε $R\in(0,\infty)\,|\,D(z_0,R)\subset U$ και $r\in(0,R)$.

Θέτουμε

$$\gamma_r(t)=z_0+re^{it},\ t\in[0,2\pi].$$

Λόγω του Θ.2, $\exists$ οι παράγωγοι όλων των τάξεων στον $D(z_0,R)$ και ισχύει

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Αλλά, η συνάρτηση

$$w\longmapsto\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}$$

είναι ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των γ^*, γ_r^* $\xRightarrow{\text{Αρχή Παραμόρφ.}}$

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw,\quad n\in\mathbb{N}.$$

$\boxtimes$

Σειρές Taylor γύρω από το $z_0=0$ βασικών συναρτήσεων

I. $f(z)=e^z,\ z\in\mathbb{C}$. Η f είναι ολόμορφη σε όλο το $\mathbb{C}$ $\xrightarrow[\text{(Θ. Taylor)}]{\text{Θ.2}}$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n,\quad \forall z\in\mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \boxed{e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\qquad z\in\mathbb{C}.}$$

II. $f(z)=\sin z,\ z\in\mathbb{C}$

$\forall z\in\mathbb{C}$,

$$f(z)=\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)=$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n!}i^n z^n$$

$$=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)!}\,i^{2n+1}\cdot z^{2n+1}$$

$$= \frac{1}{i}\, i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad z \in \mathbb{C}.}$$

$$= z - z^3/3! + z^5/5! - z^7/7! + \cdots$$

III. $f(z) = \cos z, \quad z \in \mathbb{C}.$

$\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\cos z = (\sin z)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(z^{2n+1}\right)' =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2n+1)\, z^{2n}$$

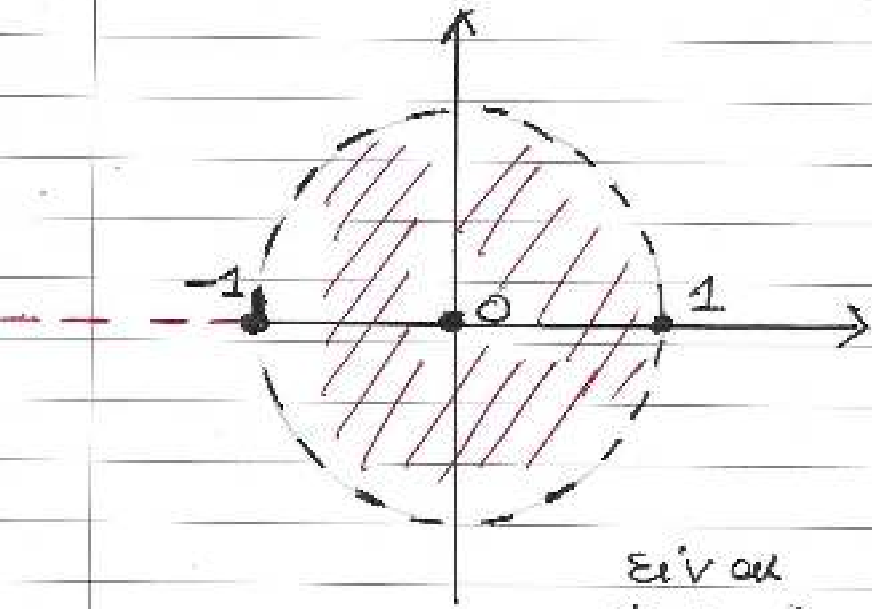
$$\Longrightarrow \boxed{\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad z \in \mathbb{C}.}$$

$$= 1 - z^2/2! + z^4/4! - z^6/6! + \cdots$$

IV. $f(z) = \text{Log}(1+z), \quad z \neq -1$

Η f είναι ολόμορφη στο πεδίο

$$U = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1].$$



Ο μεγαλύτερος ανοικτός δίσκος κέντρου 0 που περιέχεται στο U είναι

$$\overset{\circ}{D}(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

Επομένως, ο $D(0,1)$ είναι ο μεγαλύτερος ανοικτός δίσκος πάνω στον οποίο η f έχει ανάπτυγμα Taylor γύρω από το 0.

$$\forall z \in D(0,1), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

$\forall z \in D(0,1), \quad f'(z) = \frac{1}{1+z},$

$$f''(z) = -\frac{1}{(1+z)^2},$$

$$f'''(z) = \frac{1\cdot 2}{(1+z)^3},$$

$$f^{(4)}(z) = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+z)^4}$$

κ.ο.κ.

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι

$\forall n \geqslant 1, \quad f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^{n-1}\cdot (n-1)!}{(1+z)^n}$

$\Longrightarrow \forall n \geqslant 1, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

$\Longrightarrow \forall n \geqslant 1, \quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$

Εφ' όσον $f(0)=0$, παίρνουμε

$$\boxed{\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n, \quad |z|<1.}$$

$$= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots$$

Ασκήσεις:

(1) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{\gamma_R} \frac{\bar{z}e^z}{z}\,dz$, όπου $\gamma_R(t)=Re^{it}$, $t\in[0,2\pi]$ $(R>0)$.

Λύση: $\forall\, z\in\gamma_R^*$, $z\cdot\bar{z}=|z|^2=R^2$

$$\Rightarrow \bar{z}=\frac{R^2}{z}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R}\frac{\bar{z}e^z}{z}\,dz = R^2\int_{\gamma_R}\frac{e^z}{z^2}\,dz =$$

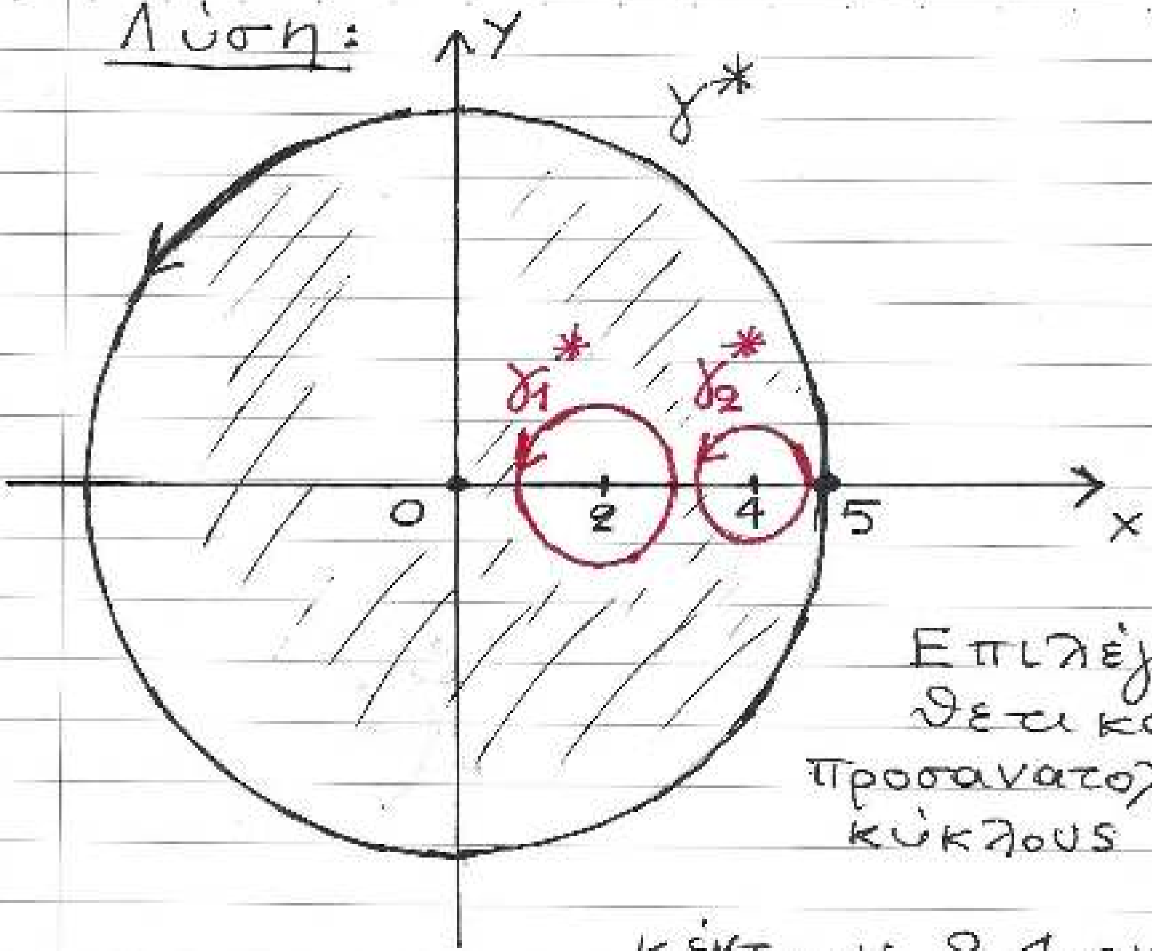
$$= R^2\cdot 2\pi i\,(e^z)'\big|_{z=0} = 2\pi i R^2.$$

(2) Να υπολογίσετε το $\int_{\gamma} f(z)\,dz$,

όπου
$$f(z)=\frac{\sin(\pi z)}{(z-2)^2(z-4)}$$

και
$$\gamma(t)=5e^{it},\quad t\in[0,2\pi].$$

Λύση:



Επιλέγουμε θετικά προσανατολισμένους κύκλους γ_1, γ_2 κέντρων 2, 4 αντίστοιχα ώστε

$$\gamma_1^* \cap \gamma_2^* = \emptyset, \quad \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \subset \operatorname{int}\gamma^*.$$

Η f είναι ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των $\gamma^*, \gamma_1^*, \gamma_2^*$

$$\xrightarrow[\text{Παραμ.}]{\text{Αρχή}} \quad \int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

Έχουμε

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{\frac{\sin(\pi z)}{z-4}}{(z-2)^2}\,dz =$$

$$= 2\pi i \left[\frac{\sin(\pi z)}{z-4}\right]'\Big|_{z=2}$$

$$= 2\pi i \left.\frac{\pi\cos(\pi z)(z-4) - \sin(\pi z)}{(z-4)^2}\right|_{z=2}$$

$$= 2\pi i \frac{\pi\cos(2\pi)(-2) - \sin(2\pi)}{(-2)^2}$$

$$= 2\pi i \frac{(-2\pi)}{4} = -\pi^2 i,$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_2} \frac{\frac{\sin(\pi z)}{(z-2)^2}}{z-4}dz =$$

$$= 2\pi i \left[\frac{\sin(\pi z)}{(z-2)^2}\right]\Big|_{z=4}$$

$$= 2\pi i \frac{0}{4} = 0.$$

Άρα, $\int_{\gamma} f(z)dz = -\pi^2 i + 0 = -\pi^2 i.$

(3) Έστω $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με
$$|f(z)| \leq \alpha|z| + b, \ \forall z \in \mathbb{C},$$
όπου $\alpha, b > 0$.

Να δείξετε ότι:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall R > 0$,
$$|f^{(n)}(0)| \leq n! \, \frac{\alpha R + b}{R^n}$$

(ii) $\exists \ A, B \in \mathbb{C}$ ώστε
$$f(z) = Az + B, \ \forall z \in \mathbb{C}, \quad |A| \leq \alpha, \ |B| \leq b.$$

Λύση:

(i) Έστω $n \in \mathbb{N}$, $R > 0$, $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Τότε,
$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz.$$
(Σημ. ότι f ολόμορφη στο $\mathbb{C}$!)

Αλλά, $\forall z \in \gamma_R^*$,
$$\left| \frac{f(z)}{z^{n+1}} \right| \leq \frac{\alpha|z| + b}{R^{n+1}} = \frac{\alpha R + b}{R^{n+1}}$$

$$\xrightarrow[\alpha\nu\iota\sigma.]{ML} \quad |f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{\cancel{2\pi}} \cancel{2\pi} R \, \frac{aR+b}{R^{n+1}}$$

$$= n! \, \frac{aR+b}{R^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall R>0.$$

<u>(ii)</u> Έστω $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$. Τότε,

$\forall R>0$, $\quad |f^{(n)}(0)| \overset{(i)}{\leq} n! \, \dfrac{aR+b}{R^n} \xrightarrow{R \to +\infty} 0$

$$\Longrightarrow f^{(n)}(0) = 0, \quad \forall n \geq 2.$$

Επειδή f <u>ολόμορφη σε όλο το $\mathbb{C}$</u>, το Θ. Taylor δίνει ότι $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

$$= f(0) + f'(0) z.$$

$\forall R>0$, $\quad |f(0)| \overset{(i)}{\leq} aR+b \xrightarrow{R \to 0^+} b$

οπότε $\underline{|f(0)| \leq b.}$

Επιπλέον, $\forall R>0$,

$$|f'(0)| \leq \frac{aR+b}{R} \xrightarrow{R\to+\infty} a$$

οπότε $\underline{|f'(0)| \leq a}$.

Θέτουμε $A=f'(0)$, $B=f(0)$.

(4) Δίνεται ολόμορφη συνάρτηση

$f: D(0,1) \to D(0,1)$, όπου
$D(0,1) = \{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$.

Να δείξετε ότι

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}, \quad |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-|z|)^2},$$

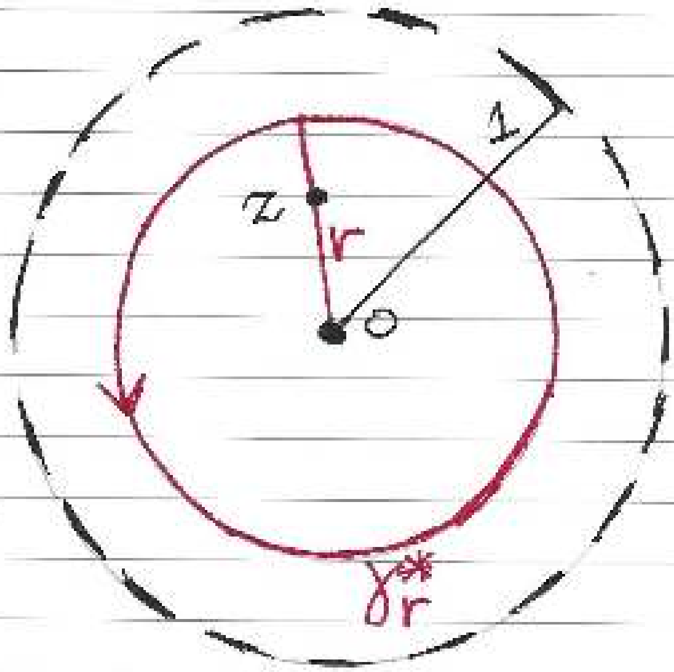
$\forall z\in D(0,1)$.

<u>Λύση</u>: Έστω $z\in D(0,1)$. Επιλέγουμε $r>0$ με $|z|<r<1$ κ' θέτουμε

$$\gamma_r(t) = re^{it}, \quad t\in[0,2\pi].$$

Τότε, $z\in \text{int}\gamma_r^*$ και

$$\gamma_r^* \subset D(0,1).$$



Από τους ολοκλ. τύπους Cauchy παίρνουμε

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-z}\,dw,$$

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw.$$

$\forall\, w\in\gamma_r^*,\quad |f(w)|<1$ και

$|w-z|\geq |w|-|z|=r-|z|$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{f(w)}{w-z}\right| < \dfrac{1}{r-|z|}, \\[2ex] \left|\dfrac{f(w)}{(w-z)^2}\right| \leq \dfrac{1}{(r-|z|)^2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{ML\text{-ανισ.}} \begin{cases} |f(z)| \leq \dfrac{1}{2\pi}\,2\pi r\,\dfrac{1}{r-|z|} = \dfrac{r}{r-|z|}, \\[2ex] |f'(z)| \leq \dfrac{r}{(r-|z|)^2}. \end{cases}$$

Οι παραπάνω ανισότητες ισχύουν $\forall r$ τέτοια με
$$|z| < r < 1.$$

Παίρνοντας το όριο καθώς $r \to 1$, προκύπτει ότι
$$|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}, \quad |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-|z|)^2}$$

(5) Να βρείτε τη σειρά Taylor της συνάρτησης $f(z) = \dfrac{z^2+z}{(z-1)^2}$, γύρω από το σημείο $z_0 = -1$.

<u>Λύση:</u> Θέτω $w = z - z_0 = z+1$

$\Rightarrow z = w-1$, οπότε

$$f(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^2} = \frac{(w-1)w}{(w-2)^2}$$

$$= \frac{w^2-w}{w^2-4w+4} =$$

$$= \frac{w^2-4w+4+3w-4}{w^2-4w+4}$$

$$= 1 + \frac{3w-4}{(w-2)^2} = 1 + \frac{3(w-2)+2}{(w-2)^2}$$

$$= 1 + \frac{3}{w-2} + \frac{2}{(w-2)^2}.$$

Έχουμε

$$\frac{1}{w-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{w}{2}} \quad \underline{\text{για } \left|\frac{w}{2}\right|<1}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{2^{n+1}},$$

$$\frac{1}{(w-2)^2} = -\left(\frac{1}{w-2}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,w^{n-1}}{2^{n+1}}$$

για $\left|\frac{w}{2}\right|<1 \Leftrightarrow |z+1|<2,$

οπότε

$$f(z) = 1 - 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+1}} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z+1)^{n-1}}{2^{n+1}}$$

$$= 1 - 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z+1)^{n-1}}{2^n}$$

$$= 1 - 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(z+1)^n}{2^{n+1}}$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-2)(z+1)^n}{2^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-2}{2^{n+1}}(z+1)^n,$$

για $|z+1| < 2.$

(6) Να δείξετε ότι $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$|e^z - 1| \le e^{|z|} - 1 \le |z| e^{|z|}.$$

Λύση: $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$e^z - 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |e^z - 1| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|} - 1$$

και

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!} = |z|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^{n-1}}{n!} =$$

$$= |z| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{(n+1)!} \leq |z| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$$

$$= |z| e^{|z|}.$$

Άρα, $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z| e^{|z|}.$$

(7) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-i)^n}{n \cdot 3^n}.$$

<u>Λύση:</u> Έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-i)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (i-2)^n}{n \cdot 3^n} =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{i-2}{3}\right)^n.$$

Είναι $|i-2|^2 = 1 + 4 = 5 < 9$

$$\Longrightarrow \left|\frac{i-2}{3}\right| < 1, \text{ οπότε}$$

το παραπάνω άθροισμα ισούται με

$$-\operatorname{Log}\left(1+\frac{i-2}{3}\right)=-\operatorname{Log}\left(\frac{i+1}{3}\right)$$

$$=-\operatorname{Log}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}e^{i\pi/4}\right)$$

$$=-\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)-i\frac{\pi}{4}.$$

(8) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$\sum_{n=1}^{\infty} n r^n \cos(n\theta)$, για $0<r<1$, $\theta\in\mathbb{R}$.

Λύση: Για $|z|<1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z\sum_{n=1}^{\infty}(z^n)' =$$

$$= z\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right)' = z\left(\frac{1}{1-z}-1\right)'$$

$$=\frac{z}{(1-z)^2}.$$ Για $z=re^{i\theta}$,

έχουμε $|z|=r<1$, οπότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} n r^n e^{in\theta} = \frac{re^{i\theta}}{(1-re^{i\theta})^2}=$$

$$= \frac{re^{i\theta}\left(1-re^{-i\theta}\right)^2}{|1-re^{i\theta}|^4}$$

$$= \frac{r}{|1-re^{i\theta}|^4} e^{i\theta}\left(1+r^2e^{-2i\theta}-2re^{-i\theta}\right)$$

$$= \frac{r}{|1-re^{i\theta}|^4}\left(e^{i\theta}+r^2e^{-i\theta}-2r\right)$$

$$= \frac{r}{|1-re^{i\theta}|^4}\Big[(1+r^2)\cos\theta-2r+$$
$$+\, i(1-r^2)\sin\theta\Big]$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} nr^n\cos(n\theta) =$$

$$= \frac{r\left[(1+r^2)\cos\theta-2r\right]}{|1-re^{i\theta}|^4}.$$

$$= \frac{r\left[(1+r^2)\cos\theta-2r\right]}{\left[(1-r\cos\theta)^2+r^2\sin^2\theta\right]^2}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ LIOUVILLE

Θεώρημα 1 (Liouville) Έστω f ακέραια συνάρτηση, δηλ. f ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και φραγμένη, δηλ. $\exists M>0$ ώστε

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Τότε, f σταθερή.

Απόδειξη: Έστω $n \geq 1$, $R>0$,

$$\gamma_R(t) = Re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Από ολοκλ. τύπους Cauchy για παραγώγους παίρνουμε

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz.$$

Αλλά, $\forall z \in \gamma_R^*$, $\left|\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right| \leq \frac{M}{R^{n+1}}$

$$\overset{(ML\text{-ανισ.})}{\Longrightarrow} \quad |f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{2\pi}\, 2\pi R\, \frac{M}{R^{n+1}} = \frac{n!M}{R^{n}}.$$

Η τελευταία ισχύει $\forall R>0$ κ' $\frac{n!M}{R^n} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$.

$$\Longrightarrow f^{(n)}(0) = 0, \quad \forall n \geq 1$$

$$\overset{\text{Θ. Taylor}}{\Longrightarrow} \forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0). \quad \boxtimes$$

Σχόλιο: Δεν υπάρχει ανάλογο του Θ. Liouville για διαφορίσιμες πραγματικές συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Π.χ.

$$f(x)=\sin x,\ x\in\mathbb{R},\ |f(x)|\leq 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

αλλά f μη σταθερή.

Ασκήσεις:

(1) Έστω $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ακέραια ώστε η $u=\mathrm{Re}f$ να είναι φραγμένη άνω. Τότε, f σταθερή.

Λύση: Έστω $M>0$ ώστε

$$\mathrm{Re}f(z)\leq M,\ \forall z\in\mathbb{C}.$$

Θέτω $g=e^{f}$. Τότε, g ακέραια και

$$\forall z\in\mathbb{C},\ |g(z)| = e^{\mathrm{Re}f(z)}\leq e^{M}.$$

$\xRightarrow{\text{Θ. Liouville}}$ $g=$ σταθερά

$\Rightarrow \forall z\in\mathbb{C},\ 0=g'(z)=f'(z)e^{f(z)} \Rightarrow f'(z)=0$

$\Rightarrow f=$ σταθερή.

(2) Έστω $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ακέραια μη σταθερή, $a\in\mathbb{C}$. Τότε, $\forall\varepsilon>0,\ \exists z\in\mathbb{C} \mid |f(z)-a|<\varepsilon$.

Λύση: Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει. Τότε,

$$\exists\varepsilon>0 \mid \forall z\in\mathbb{C},\ |f(z)-a|\geq\varepsilon.$$

Θέτουμε

$$g(z) = \frac{1}{f(z)-a}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Τότε, g ακέραια και $|g(z)| \leq 1/\varepsilon$, $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow g = \text{σταθερή} \Rightarrow \dots f = \text{σταθερή} \text{ (ΑΤΟΠΟ)}$$

(3) Έστω $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια ώστε

$$f(z) \neq 0, \ \forall z \in \mathbb{C} \text{ και } \lim_{|z| \to \infty} |f(z)| = \ell > 0.$$

Να δ.ο. f σταθερή.

<u>Λύση:</u> $\exists R > 0 /$ $\forall z \in \mathbb{C}$ με $|z| > R$, ισχύει

$$|f(z)| > \ell/2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|f(z)|} < 2/\ell.$$

Θέτουμε $g = 1/f \Rightarrow g$ ακέραια.

Επειδή g <u>συνεχής</u> στο <u>κλειστό</u> κ' <u>φραγμένο</u> σύνολο $D[0,R] = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$, $\exists M > 0 /$

$$\forall |z| \leq R, \quad |g(z)| \leq M.$$

Τελικά, $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$|g(z)| \leq \max\{M, 2/\ell\}$$

$\overset{(\Theta.\text{ Liouville})}{\Longrightarrow}$ $g = \text{σταθερή} \Rightarrow f = \text{σταθερή}.$

Θ. Laurent

Προπαρασκευαστικά λήμματα

Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$, $r>0$, $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

κ'

$f : \gamma_r^* \to \mathbb{C}$ συνεχής.

Θέτουμε

$$\varphi_k(w) = \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}, \quad w \in \gamma_r^*, \quad k \in \mathbb{Z}$$

κ'

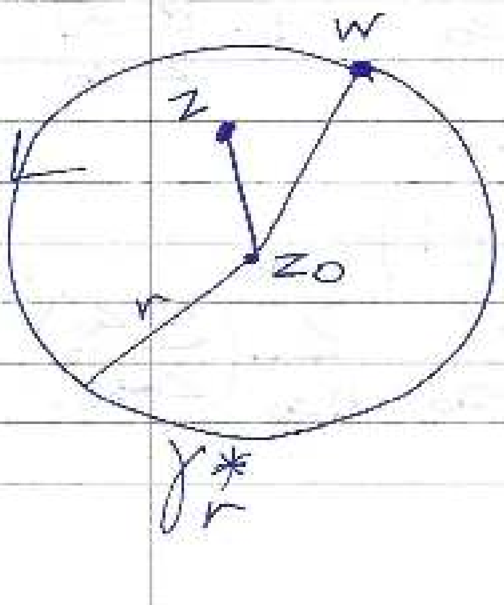
$$a_k = \int_{\gamma_r} \varphi_k(w)\,dw, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Λήμμα 1: Εάν $z \in \mathbb{C}$ με $|z-z_0|<r$, τότε

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k.$$

Απόδειξη:

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)-(z-z_0)}\,dw =$$



$$= \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}\,dw.$$

Αλλά, $\forall w \in \gamma_r^*$,

$$\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{r} < 1,$$

οπότε η γεωμετρική σειρά

δίνει

$$\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^{k}.$$

Άρα,

$$\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-z}\,dw = \int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-z_0}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^{k} dw$$

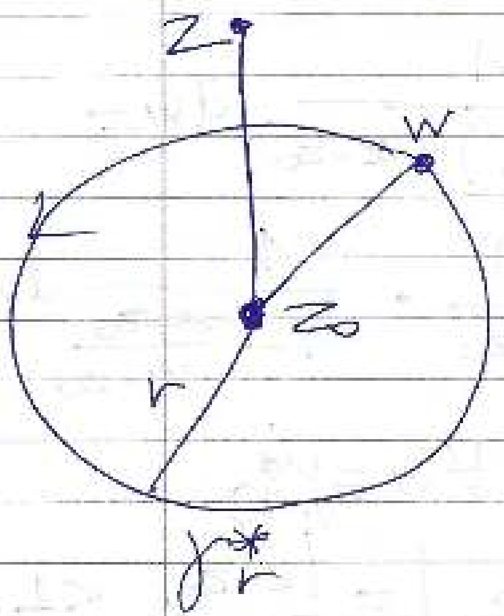
$$\overset{**}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw\right](z-z_0)^{k}. \qquad \boxtimes$$

**Βλ. Πρότ. III.3, αρχείο ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ-ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

<u>Λήμμα 2:</u> Εάν $|z-z_0|>r$, τότε

$$\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-z}\,dw = -\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z-z_0)^{k}.$$

<u>Απόδειξη:</u> $\forall w \in \gamma_r^*$,



$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{(w-z_0)-(z-z_0)}$$

$$= -\frac{f(w)}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}}$$

$\left(\left|\frac{w-z_0}{z-z_0}\right|<1\right)$

(γεωμ. σειρά)

$$= -\frac{f(w)}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^{n}$$

$=$

③

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}, \quad w \in \gamma_r^*.$$

Στο παραπάνω άθροισμα θέτω $k=-n-1$, οπότε $n=-(k+1)$ και

$$\frac{f(w)}{w-z} = -\sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{f(w)(w-z_0)^{-(k+1)}}{(z-z_0)^{-k}} =$$

$$= -\sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} (z-z_0)^k,$$

$\forall w \in \gamma_r^*$.

Άρα, $\displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \overset{**}{=} -\sum_{k=-\infty}^{-1} \left[\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw\right](z-z_0)^k$ $\boxtimes$

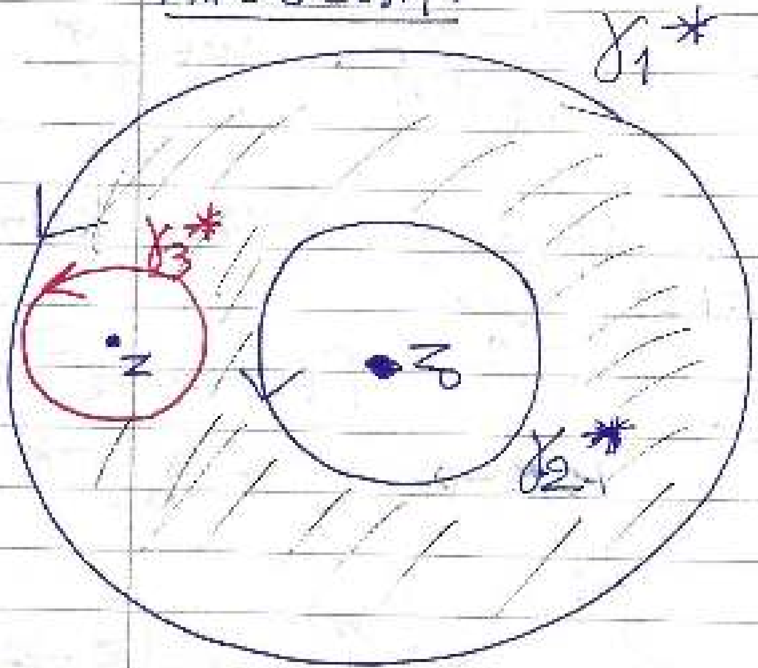
** Βλ.Πρότ.ΙΙΙ.3, Μιγαδικές Σειρές-Δυναμοσειρές

Λήμμα 3: Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$ κ' γ_1, γ_2 δύο θετικά προσανατολισμένοι κύκλοι κοινού κέντρου z_0 με $\gamma_2^* \subset int\gamma_1^*$ κ' f συνάρτηση ολόμορφη στο $int\gamma_1^* \setminus \{z_0\}$ κ' συνεχής στο γ_1^*. Εάν $z \in int\gamma_1^* \cap ext\gamma_2^*$, τότε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{\gamma_1}\varphi_k(w)\,dw\right](z-z_0)^k +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{-1}\left[\int_{\gamma_2}\varphi_k(w)\,dw\right](z-z_0)^k.$$

Απόδειξη:



Επιλέγω θετικά προσαν. κύκλο γ_3 κέντρου z με $\gamma_3^* \subset \mathrm{int}\,\gamma_1^* \cap \mathrm{ext}\,\gamma_2^*$.

Επειδή η f είναι ολόμορφη στο εσωτερικό του γ_3, από Ο.Τ. Cauchy παίρνω

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_3} \frac{f(w)}{w-z}\,dw. \qquad (1)$$

Η συνάρτηση $w \longmapsto \dfrac{f(w)}{w-z}$ είναι ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των $\gamma_1^*, \gamma_2^*, \gamma_3^*$, οπότε από την Γενικ. Αρχή Παραμόρφ. παίρνουμε

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw + \int_{\gamma_3} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

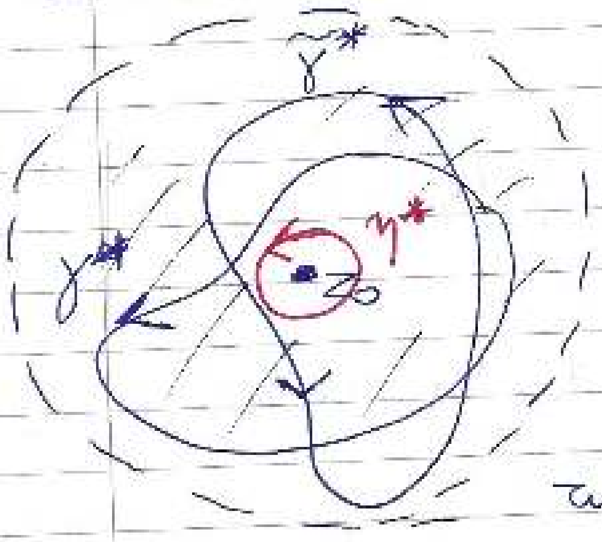
$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad 2\pi i f(z) = \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$\xrightarrow[1,2]{\text{Λήμματα}}$ αποδεικτέα. $\boxtimes$

<u>Λήμμα 4:</u> Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < R \le \infty$ κ' φ ολόμορφη στο $D(z_0,R) \setminus \{z_0\}$. Έστω $\gamma, \tilde{\gamma}$ θετικά προσανατολ. καμπύλες καμπύλες ώστε $z_0 \in int\gamma^* \cap int\tilde{\gamma}^*$, $\gamma \cup \tilde{\gamma}^* \subset D(z_0,R)$.

Τότε, $\int_\gamma \varphi(w)dw = \int_{\tilde{\gamma}} \varphi(w)dw$.

<u>Απόδειξη:</u>



Επιλέγω θετικά προσαν. κύκλο η κέντρου z_0 με

$\eta \subset int\gamma^* \cap int\tilde{\gamma}^*$.

Η φ είναι ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των γ^*, η^* (αντ. μεταξύ των $\tilde{\gamma}^*, \eta^*$) $\xrightarrow[\text{Παραμ.}]{\text{Αρχή}}$

$$\Rightarrow \int_\gamma \varphi(w)dw = \int_\eta \varphi(w)dw = \int_{\tilde{\gamma}} \varphi(w)dw. \quad \boxtimes$$

ΘΕΩΡΗΜΑ LAURENT Έστω f ολόμορφη στον "τρυπημένο" δίσκο $D(z_0,R)\setminus\{z_0\}$ ($z_0\in\mathbb{C}$, $0<R\leq\infty$).

Τότε, $\exists!\,(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}\subset\mathbb{C}\,|$

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k,\quad 0<|z-z_0|<R$$

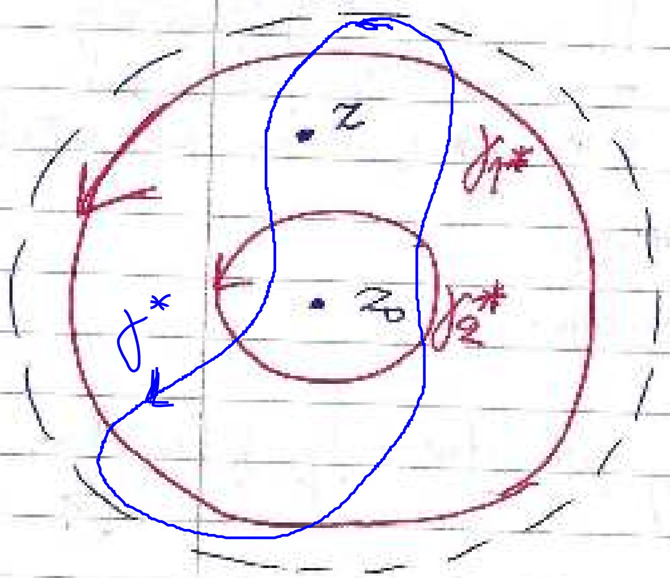
Επιπλέον, αν γ τυχαία θετικά προσαν. κλειστή καμπύλη με

$$z_0\in \operatorname{int}\gamma^*,\ \gamma^*\subset D(z_0,R),$$

τότε

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Απόδειξη:



Έστω $z\in D(z_0,R)\setminus\{z_0\}$.

Θεωρούμε δύο θετικά προσαν. κύκλους γ_1,γ_2 κοινού κέντρου z_0 με

$$z\in \operatorname{int}\gamma_1^*\cap \operatorname{ext}\gamma_2^*$$

κ'

$$\gamma_2^*\subset \operatorname{int}\gamma_1^*,\ \gamma_1^*\subset D(z_0,R).$$

Λήμμα 3 $\Rightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{\gamma_1} \varphi_k(w)\,dw \right] (z-z_0)^k +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{-1} \left[\int_{\gamma_2} \varphi_k(w)\,dw \right] (z-z_0)^k,$$

όπου $\varphi_k(w) = \dfrac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}$, $w \in D(z_0,R) \setminus \{z_0\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Έστω γ τυχαία θετικά προσανατ. κλειστή καμπύλη με $z_0 \in \operatorname{int}\gamma^*$, $\gamma^* \subset D(z_0,R)$.

Επειδή η φ_k είναι ολόμορφη στον $D(z_0,R) \setminus \{z_0\}$,

Λήμμα 4 $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{\gamma_1} \varphi_k = \int_{\gamma_2} \varphi_k = \int_{\gamma} \varphi_k$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{\gamma} \varphi_k(w)\,dw \right] (z-z_0)^k.$$

$\boxtimes$

ΘΕΩΡΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ

Υπενθύμιση:

ΘΕΩΡΗΜΑ LAURENT

Έστω f ολόμορφη στον "τρυπημένο" ανοικτό δίσκο
$$D(z_0, R) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} / 0 < |z - z_0| < R\},$$
όπου $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < R \leq \infty$.

Τότε, $\exists! \, (a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ ώστε

$$\boxed{f(z) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad 0 < |z - z_0| < R.} \tag{1}$$

Επιπλέον, $\forall \gamma \in \mathcal{C}_+$ με
$$z_0 \in \operatorname{int} \gamma^*, \quad \gamma^* \subset D(z_0, R),$$
ισχύει

$$\boxed{a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} \, dw, \quad k \in \mathbb{Z}.} \tag{2}$$

Συμβολή:

$\mathcal{C}_+ = \{$όλες οι κλειστές, θετικά προσανατολ., απλές, τμ. λείες καμπύλες$\}$.

<u>Σχόλιο 1:</u> Οι συντελεστές a_k, $k \in \mathbb{Z}$

στην (2), <u>δεν</u> εξαρτώνται

— από την επιλογή της καμπύλης γ με
$z_0 \in \mathrm{int}\gamma^*$, $\gamma^* \subset D(z_0, R)$.

— από την ακτίνα $R \in (0, \infty]$ ώστε

f - ολόμορφη στον $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$.

Τα παραπάνω προκύπτουν από την Αρχή Παραμόρφωσης.

<u>Σχόλιο 2:</u> Το Θ. Laurent επεκτείνεται

σε ανοικτούς δακτυλίους:

$$\Delta(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\},$$

$$0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$$

• Για $r_1 = 0$, $r_2 < \infty$, έχουμε

$$\Delta(z_0, r_1, r_2) = D(z_0, r_2) \setminus \{z_0\}$$

• Για $0 < r_1 < r_2 = \infty$,

ο $\Delta(z_0, r_1, r_2)$ είναι το <u>εξωτερικό</u>

του ανοικτού δίσκου $D(z_0, r_1)$

• Για $r_1 = 0$, $r_2 = \infty$, $\Delta(z_0, r_1, r_2) = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$

Παραδείγματα:

(i) Να βρείτε το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{2z-3}{z^2-3z+2}$$

στον τρυπημένο δίσκο

$$0 < |z-1| < 1,$$

γύρω από το σημείο $z_0 = 1$.

Λύση: $f(z) = \dfrac{2z-3}{(z-1)(z-2)} = \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{z-2}$.

Θέτουμε $w = z-1$, οπότε για

$0 < |z-1| < 1$ έχουμε

$$0 < |w| < 1$$

και

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{w+1-2} = -\frac{1}{1-w}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} w^n = -\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-1)^k,$$

$$a_k = \begin{cases} -1, & k \geq 0 \\ 1, & k = -1 \\ 0, & k \leq -2 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(ii) Να βρείτε τα αναπτύγματα Laurent της $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$, στους «δακτυλίους»,

$$0 < |z-1| < 1, \quad |z-1| > 1,$$

γύρω από το $z_0 = 1$.

Λύση: • Για $0 < |z-1| < 1$,

Θέτουμε $w = z-1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(w+1)^2 w} = -\frac{1}{w} \cdot \left(\frac{1}{1+w}\right)' =$$

$$\overset{[0<|w|<1]}{=} -\frac{1}{w}\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-w)^n\right]'$$

$$= -\frac{1}{w} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n w^{n-1}$$

$$= -\frac{1}{w}\left(-1 + 2w - 3w^2 + 4w^3 - \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{w} - 2 + 3w - 4w^2 + 5w^3 - \cdots$$

$$= \frac{1}{w} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} (k+2) w^k$$

$$= \frac{1}{z-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} (k+2)(z-1)^k \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-1)^k, \quad \text{όπου}$$

$$a_k = \begin{cases} (-1)^{k+1}(k+2), & k \geq 0 \\ 1, & k = -1, \ k \in \mathbb{Z}. \\ 0, & k \leq -2 \end{cases}$$

• Για $|z-1| > 1$, θέτουμε

$$w = \frac{1}{z-1} \Rightarrow z = 1 + \frac{1}{w} = \frac{1+w}{w}$$

$$\Rightarrow f(z) = \left(\frac{w}{1+w}\right)^2 \cdot w = w^3 \cdot \frac{1}{(1+w)^2}$$

$$= -w^3 \cdot \left(\frac{1}{1+w}\right)' \quad [|w|<1]$$

$$= -w^3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n w^{n-1}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n \frac{1}{(z-1)^{n+2}} =$$

$$= -\left[-\frac{1}{(z-1)^3} + 2\frac{1}{(z-1)^4} - 3\frac{1}{(z-1)^5} + \cdots \right]$$

$$\overset{k=-(n+2)}{=} -\sum_{k=-\infty}^{-3} (-k-2)(-1)^{-k-2}(z-1)^k$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-3} (k+2)(-1)^k (z-1)^k$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-1)^k,$$

$$a_k = \begin{cases} (k+2)\cdot(-1)^k, & k \leq -3 \\ 0, & k \geq -2. \end{cases}$$

<u>(iii)</u> Να βρείτε το ανάπτυγμα Laurent γύρω από το $z_0 = 0$ της

$$f(z) = z^3 e^{1/z}$$

στον "δακτύλιο" $|z| > 0$ (δηλ. στο "τρυπημένο" μιγαδ. επίπεδο).

<u>Λύση:</u> $\forall\ z \neq 0$,

$$z^3 e^{1/z} = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^{n-3}}$$

$$\overset{k=-n+3}{=} \sum_{k=-\infty}^{3} \frac{1}{(3-k)!} z^k$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k, \quad \text{όπου}$$

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{(3-k)!}, & k \leq 3 \\ 0, & k \geq 4. \end{cases}$$

Πιο αναλυτικά, για $z \neq 0$,

$$f(z) = z^3 + \frac{1}{1!} z^2 + \frac{1}{2!} z + \frac{1}{3!} +$$

$$+ \frac{1}{4!} \frac{1}{z} + \frac{1}{5!} \frac{1}{z^2} + \cdots$$

<u>Ορισμός 1</u>: Έστω f ολόμορφη στον "τρυπημένο" ανοικτό δίσκο
$$D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$$
($z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < R \leq \infty$) με ανάπτυγμα Laurent

$$\boxed{f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k, \quad 0 < |z-z_0| < R} \tag{3}$$

Ο συντελεστής a_{-1} του $\dfrac{1}{z-z_0}$ ονομάζεται <u>ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_0</u>.

<u>Συμβολ</u>: $a_{-1} = \mathrm{Res}(f, z_0)$.

<u>Σχόλιο 1:</u> Το ολοκλ. υπόλοιπο στο z_0 ορίζεται καλώς, διότι το ανάπτυγμα Laurent (3) <u>δεν</u> εξαρτάται από την ακτίνα $0 < R \le \infty$, ώστε f ολόμορφη στον $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$.

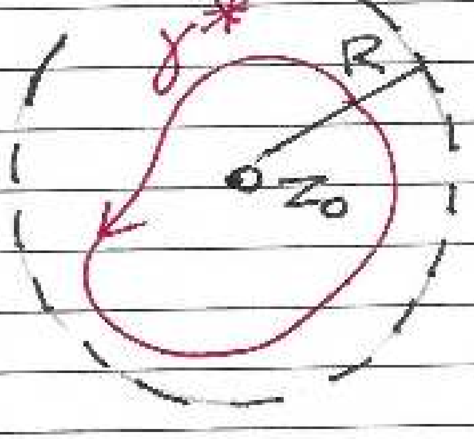
<u>Σχόλιο 2:</u> Από το Θ. Laurent γνωρίζουμε ότι οι συντελεστές a_k, $k \in \mathbb{Z}$ στο ανάπτυγμα (3) δίνονται από τις σχέσεις

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} \, dw, \quad k \in \mathbb{Z},$$

όπου $\gamma \in \mathcal{C}_+$ <u>τυχαία</u> με

$$z_0 \in \operatorname{int} \gamma^*, \quad \gamma^* \subset D(z_0, R).$$

Για $k = -1$, παίρνουμε



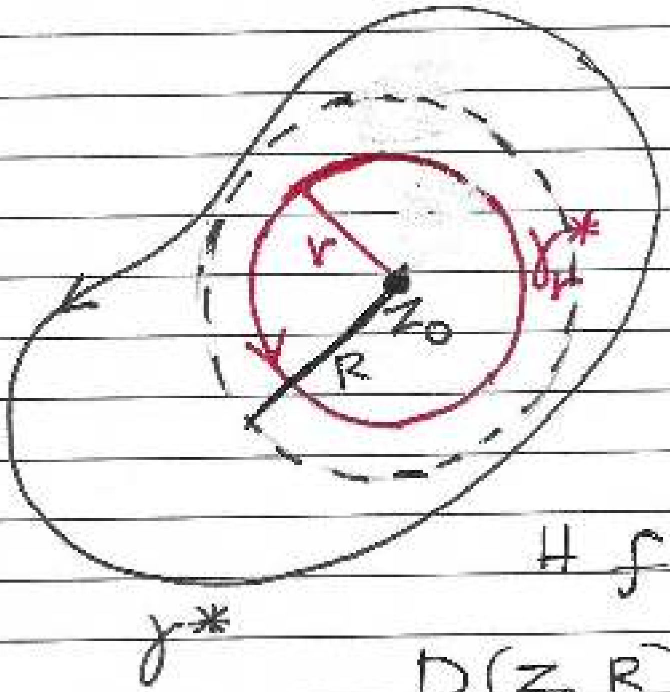
$$\int_\gamma f(w)\,dw = 2\pi i \, a_{-1}$$
$$= 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0).$$

Γενικότερα, έχουμε την παρακάτω:

Πρόταση 2: Έστω $\gamma \in \mathcal{C}_+$ με απλώς με εσωτερικό $U = \operatorname{int}\gamma^*$, $z_0 \in U$ και f ολόμορφη στο $U \setminus \{z_0\}$, ώστε f συνεχής στο γ^*. Τότε,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0).$$

Απόδειξη: Έστω $R>0 \mid D(z_0,R) \subset U$.



Επιλέγουμε $r \in (0,R)$ και θέτουμε

$$\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Η f είναι ολόμορφη στον $D(z_0,R) \setminus \{z_0\} \xrightarrow{[\text{Θ. Laurent}]}$

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k, \quad 0 < |z-z_0| < R$$

και

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw,$$

$k \in \mathbb{Z}$.

Ειδικότερα,

$$\int_{\gamma_r} f(w)dw = 2\pi i\, a_{-1} =$$
$$= 2\pi i \, \mathrm{Res}(f, z_0).$$

Επειδή f ολόμορφη στο πεδίο μεταξύ των γ^*, γ_r^*, από την Αρχή Παραμόρφωσης παίρνουμε

$$\int_\gamma f(w)dw = \int_{\gamma_r} f(w)dw = 2\pi i \, \mathrm{Res}(f, z_0).$$

$\boxtimes$

Παραδείγματα:

<u>(i)</u> $\int_\gamma f(z)dz = ?$, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$,

$$f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^5}.$$

<u>Λύση:</u> f ολόμορφη στο $\mathrm{int}\gamma^* \setminus \{0\}$ και συνεχής στο $\gamma^* \xRightarrow{[\text{Πρότ. } 2]}$

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \, \mathrm{Res}(f, 0).$$

Αλλά, $\forall z \neq 0$,

$$\frac{1}{z^5} \cdot e^{z^2} = \frac{1}{z^5}\left(1 + \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{z^5} + \frac{1}{1!}\frac{1}{z^3} + \boxed{\frac{1}{2!}\frac{1}{z}} + \frac{1}{3!} z + \cdots$$

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{Res}(f,0) = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_\gamma f = \underline{\underline{\pi i}}.$$

$\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\dashv$

(ii) $\int_\gamma f(z)dz = ?$, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$,

$$f(z) = z^4 \sin(1/z).$$

Λύση: $\forall z \neq 0$,

$$f(z) = z^4\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5} - \cdots\right)$$

$$= z^3 - \frac{1}{3!} z + \boxed{\frac{1}{5!}\frac{1}{z}} - \cdots$$

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{Res}(f,0) = 1/5!$$

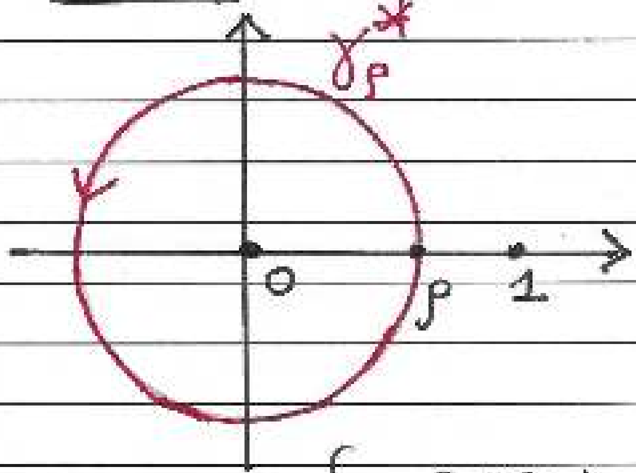
$$\Longrightarrow \quad \int_\gamma f(z)dz = 2\pi i/5! = \pi i/60.$$

$\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\dashv$

(iii) $\int_{\gamma_\rho} f(z)\,dz = ?$, όπου

$$f(z)=\frac{e^{1/z}}{1-z}, \quad \gamma_\rho(t)=\rho e^{it},\ t\in[0,2\pi],\ 0<\rho<1.$$

Λύση:



f ολόμορφη στο $\operatorname{int}\gamma_\rho^* \setminus \{0\}$ και συνεχής στο $\gamma_\rho^* \xRightarrow{\text{Πρότ. 2}}$

$$\int_{\gamma_\rho} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,0).$$

Για $0<|z|<\rho \ (<1)$,

$$e^{1/z} = 1+\frac{1}{1!}\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\frac{1}{4!}\frac{1}{z^4}+\cdots,$$

$$\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+\cdots$$

Ο συντελεστής του $1/z$ στο γινόμενο των παραπάνω "δυναμοσειρών" είναι

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots = e-1$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Res}(f,0)=e-1 \Longrightarrow \int_{\gamma_\rho} f = 2\pi i(e-1).$$

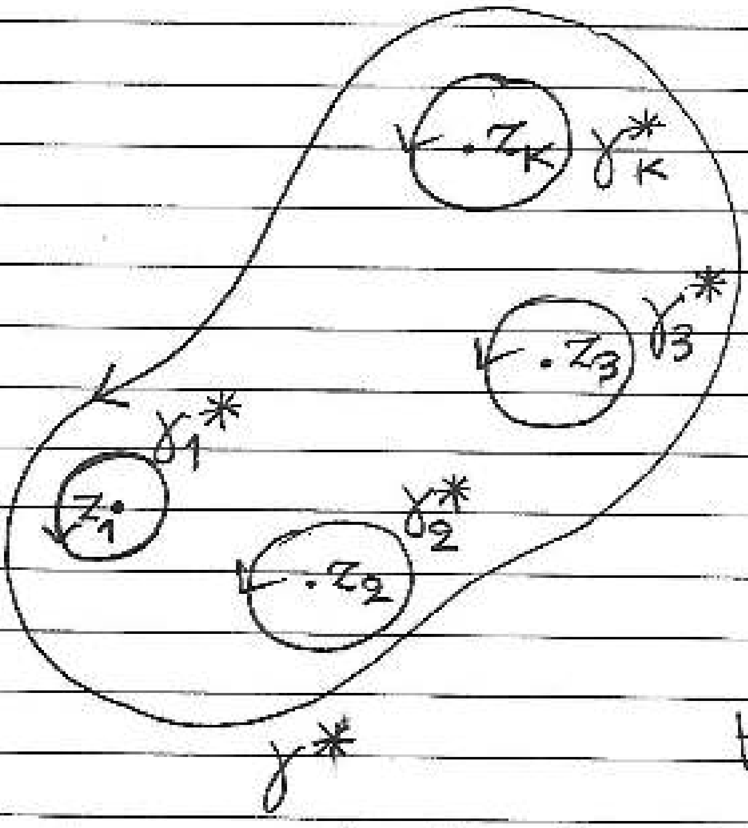
Γενίκευση της Πρότασης 2 είναι το παρακάτω

Θεώρημα 3 (Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων)

Έστω $\gamma \in \mathcal{C}_p$, $z_1, z_2, \dots, z_k \in U = \text{int}\,\gamma^*$ και f ολόμορφη στο $U \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ και συνεχής στο γ^*. Τότε,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \text{Res}(f, z_j).$$

Απόδειξη: Επιλέγουμε $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k \in \mathcal{C}_p$ ώστε



- $z_j \in \text{int}\,\gamma_j^*$, $1 \le j \le k$
- $\gamma_j^* \subset U$, $1 \le j \le k$
- $\text{int}\,\gamma_\lambda^* \cap \text{int}\,\gamma_j^* = \emptyset$, $\forall\, \lambda \neq j$.

Γενικ. Αρχή Παραμ. $\Longrightarrow$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz \quad (\text{Πρότ. 2})$$

$$= 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f, z_j). \qquad \boxtimes$$

Ταξινόμηση μεμονωμένων ανώμαλων σημείων

Ορισμός 4: Ένα $z_0 \in \mathbb{C}$ λέγεται μεμονωμένο ανώμαλο σημείο μιας συνάρτησης f αν $\exists\, R > 0$ ώστε f ολόμορφη στον

$$D(z_0, R) \setminus \{z_0\},$$

δηλ. αν $\exists$ ανοικτός δίσκος κέντρου z_0 που δεν περιέχει άλλα ανώμαλα σημεία της f εκτός του z_0.

Παραδείγματα:

(α) $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$. Τα ανώμαλα σημεία της f είναι $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, τα οποία είναι όλα μεμονωμένα. Πράγματι· έστω $k \in \mathbb{Z}$ και $R = \pi/2$. Εάν $\lambda \in \mathbb{Z}$ με

$\lambda\pi \in D(k\pi, R)$, τότε $|\lambda\pi - k\pi| < \pi/2$

$$\Rightarrow |\lambda - k| < 1/2 \Rightarrow \lambda = k.$$

(β) $f(z) = \dfrac{1}{\sin(1/z)}$.

Το 0 είναι μη μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της f. Πράγματι·

$\forall n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 1$, το $z_n = 1/n\pi$ είναι ανώμαλο σημείο της f, ενώ

$$z_n \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Άρα, $\forall R > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0$,

$$z_n \in D(0, R) \setminus \{0\}.$$

Έστω z_0 μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της συνάρτησης f. Τότε, $\exists R > 0 \mid$

f ολόμορφη στον $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$

[Θ. Laurent] $\Rightarrow$ $\exists ! (a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ ώστε

$$\boxed{f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad 0 < |z - z_0| < R.} \tag{4}$$

Ορισμός 5: Το z_0 λέγεται αιρόμενο ανν

$$a_k = 0, \quad \forall k < 0.$$

Σχόλιο!! Εάν z_0 αιρόμενο, τότε

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} = 0.$$

Έστω z_0 αιρόμενο ανώμαλο σημείο της f. Τότε, για $0 < |z-z_0| < R$,

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \dots$$

Το παραπάνω ανάπτυγμα προσομοιάζει με ανάπτυγμα Taylor αλλά δεν αποτελεί ανάπτυγμα Taylor γιατί

f όχι διαφορίσιμη στο z_0.

Παρ' όλ' αυτά, επεκτείνεται σε ολόμορφη συνάρτηση $\tilde{f}: D(z_0, R) \to \mathbb{C}$. Πράγματι θέτουμε

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D(z_0,R) \setminus \{z_0\} \\ a_0, & z = z_0. \end{cases}$$

Τότε, $\forall z \in D(z_0, R)$,

$$\tilde{f}(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$\Longrightarrow \tilde{f}$ ολόμορφη στον $D(z_0, R)$

Με βάση τα παραπάνω αποδεικνύεται εύκολα η παρακάτω

Πρόταση 5: Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα

(α) z_0 αιρόμενο ανώμαλο σημείο

(β) Στο ανάπτυγμα Laurent (4), ισχύει $a_k = 0, \ \forall k<0$.

(γ) $\exists \tilde{f}$ ολόμορφη στο $D(z_0,R)$ | $\tilde{f}(z)=f(z), \ \forall z\in D(z_0,R)\setminus\{z_0\}$

(δ) $\lim_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.

Παραδείγματα:

(α) $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z}$. Προφανώς 0 ανώμαλο σημείο της f.

Είναι $\lim_{z\to 0} f(z) = (e^z)'\big|_{z=0} = 1\in\mathbb{C}$

[Πρότ.5] $\Longrightarrow$ 0 αιρόμενο. Παρατηρούμε ότι $\forall z\neq 0$, το ανάπτυγμα Laurent της f στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ είναι

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)$$

$$=1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots, \ \forall z\neq 0$$

δηλ. δεν εμφανίζονται δυνάμεις z^k με $k<0$.

(β) $f(z) = \dfrac{\sin z - z}{z(1-\cos z)}$. Προφανώς, 0 ανώμαλο σημείο της f.

• Το 0 είναι μεμονωμένο. Πράγματι· τα ανώμαλα σημεία της f είναι

$$2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

και $\forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$,

$$2k\pi \notin D(0,\pi)$$

δηλ. ο $D(0,\pi)$ περιέχει μόνο το 0 σαν ανώμαλο σημείο.

• Το 0 είναι αιρόμενο. Πράγματι·

$\forall z \in D(0,\pi)\setminus\{0\}$,

$$f(z) = \frac{-z^3/3! + z^5/5! - z^7/7! + \cdots}{z\left(z^2/2! - z^4/4! + z^6/6! - \cdots\right)}$$

$$= \frac{z^3\left(-1/3! + z^2/5! - z^4/7! + \cdots\right)}{z^3\left(1/2! - z^2/4! + z^4/6! - \cdots\right)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^4}{7!} + \cdots}{\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \cdots}$$

$$\Longrightarrow \lim_{z\to 0} f(z) = -\frac{2!}{3!} = -\frac{1}{3} \in \mathbb{C}.$$

Πόλοι

Έστω z_0 μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της f και

$$\boxed{f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k,\quad 0<|z-z_0|<R} \qquad (4)$$

το ανάπτυγμα Laurent της f στον "τρυπημένο" ανοικτό δίσκο

$$D(z_0,R)\setminus\{z_0\},\qquad R>0.$$

<u>Ορισμός 6</u>: Το z_0 λέγεται <u>πόλος</u> αν το σύνολο

$$S=\{k\in\mathbb{Z}:\ a_k\neq 0,\ k<0\}$$

είναι <u>πεπερασμένο</u>, <u>μη κενό</u>.

<u>Π.χ.</u> $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^3}$. Τότε, $\forall z\neq 0$,

$$f(z)=\frac{1}{z^3}\left(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots\right)$$

$$=\underbrace{\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z}}_{\text{πεπερ. πλήθους}}+\frac{1}{3!}+\frac{z}{4!}+\cdots$$

$\Rightarrow$ <u>0 = πόλος.</u>

Έστω z_0 πόλος της f. Θέτουμε

$$m=\max\{|k|:\ k\in S\}.$$

Προφανώς,

$$\underline{a_m\neq 0},\qquad \underline{m\geq 1}$$

Ορισμός 7: Το m ονομάζεται τάξη του πόλου z_0.

Π.χ. $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^3}$. 0 = πόλος τάξης 2.

Πρόταση 8: Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(α) z_0 πόλος τάξης $m \geq 1$.

(β) $\exists\ \tilde{\varphi}$ ολόμορφη σε περιοχή U του z_0 με

$$\tilde{\varphi}(z_0) \neq 0, \quad f(z) = \frac{\tilde{\varphi}(z)}{(z-z_0)^m}, \ \forall z \in U \setminus \{z_0\}$$

(γ) $\lim\limits_{z \to z_0} \left[(z-z_0)^m f(z) \right] \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Απόδειξη: (α) $\Rightarrow$ (β)

Θεωρούμε το ανάπτυγμα Laurent (4) της f. Επειδή

$$m = \max\{|k| : k \in \mathbb{Z},\ k < 0,\ a_k \neq 0\}$$

έχουμε

$$a_{-m} \neq 0$$

και

$\forall\ k < -m$, είναι $|k| = -k > m \Rightarrow a_k = 0$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \frac{a_{-m+2}}{(z-z_0)^{m-2}} +$$

$$+ \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots,$$

$0 < |z-z_0| < R$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m}\varphi(z), \quad 0<|z-z_0|<R,$$

όπου

$$\varphi(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + a_{-m+2}(z-z_0)^2 + \cdots,$$

για $0<|z-z_0|<R$.

Θέτουμε

$$\tilde{\varphi}(z) = \begin{cases} \varphi(z), & 0<|z-z_0|<R \\ a_{-m}, & z=z_0. \end{cases}$$

Τότε,

$$\tilde{\varphi}(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + a_{-m+2}(z-z_0)^2 + \cdots$$

$\forall z \in D(z_0, R)$

$\Rightarrow \tilde{\varphi}$ ολόμορφη στο $D(z_0, R)$.

Επιπλέον,

$$\tilde{\varphi}(z_0) = a_{-m} \neq 0$$

και

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m} = \frac{\tilde{\varphi}(z)}{(z-z_0)^m}, \quad 0<|z-z_0|<R$$

Θέτουμε $U = D(z_0, R)$.

(β) $\Rightarrow$ (γ) Άμεσο.

(γ) ⇒ (α) Έστω το ανάπτυγμα Laurent

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k, \quad 0<|z-z_0|<R.$$

Τότε,

$$(z-z_0)^m f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^{m+k} \underset{[\lambda=m+k]}{=}$$

$$=\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} a_{\lambda-m}(z-z_0)^{\lambda}, \text{ για } 0<|z-z_0|<R$$

Το παραπάνω είναι το ανάπτυγμα Laurent της $(z-z_0)^m f(z)$ στον $D(z_0,R)\setminus\{z_0\}$.

Όμως, $\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]\in\mathbb{C} \xrightarrow{[\text{Πρότ. } 5]}$

$\Rightarrow$ z_0 αιρόμενο ανώμαλο σημείο της $(z-z_0)^m f(z)$ $\Rightarrow a_{\lambda-m}=0, \ \forall \lambda<0$

$\Rightarrow$ $a_k=0, \ \forall k<-m$

$\Rightarrow$ z_0 πόλος της f.

Επιπλέον, για $0<|z-z_0|<R$,

$$f(z)=\sum_{k=-m}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots$$

$$\Rightarrow (z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}\cdot(z-z_0)+\cdots$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^m f(z)\right] = a_{-m}$$

$\overset{[\text{υπόθεση}]}{\Longrightarrow}$ $a_{-m}\neq 0 \Rightarrow z_0$ πόλος τάξης m. $\boxtimes$

<u>Παραδείγματα:</u>

<u>(α)</u> $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}$. Έχουμε

$$\lim_{z\to 0}\left[z^2 f(z)\right] = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z-\sin 0}{z-0} =$$

$$= (\sin z)'\Big|_{z=0} = \cos 0 = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow 0$ πόλος τάξης 2.

<u>(β)</u> $f(z)=\dfrac{z}{\sin^2 z}$. Έχουμε

$$\lim_{z\to 0}\left[z f(z)\right] = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\sin z}\right)^2 = 1^2 = 1\neq 0$$

$\Rightarrow 0$ πόλος τάξης 1.

(γ) $f(z) = \dfrac{\sin z}{(1-\cos z)^2}$. Έχουμε

$\forall z \in D(0,\pi) \setminus \{0\}$,

$$f(z) = \frac{z - z^3/3! + z^5/5! - z^7/7! + \cdots}{(z^2/2! - z^4/4! + z^6/6! - \cdots)^2}$$

$$= \frac{z(1 - z^2/3! + z^4/5! - z^6/7! + \cdots)}{z^4(1/2! - z^2/4! + z^4/6! - \cdots)^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to 0}[z^3 f(z)] = \frac{1}{(1/2!)^2} = 4 \neq 0$$

$\Rightarrow$ 0 πόλος τάξης 3.

<u>Ουσιώδη ανώμαλα σημεία</u>

<u>Ορισμός 8</u>: Έστω z_0 μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της f και

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k, \quad 0 < |z-z_0| < R$$

το ανάπτυγμα Laurent της f στον $D(z_0,R) \setminus \{z_0\}$. Το z_0 λέγεται <u>ουσιώδες</u> αν το

$$S = \{k \in \mathbb{Z} : k < 0, \ a_k \neq 0\}$$

είναι <u>άπειρο</u>.

<u>Παράδειγμα</u>: $f(z) = z^4 \cos(1/z)$.

Για $z \neq 0$,

$$f(z) = z^4\left(1 - \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^4} - \frac{1}{6!}\frac{1}{z^6} + \dots\right)$$

$$= z^4 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{8!}\frac{1}{z^4} - \dots$$

$\Rightarrow$ εμφανίζονται άπειρες δυνάμεις του $1/z$

$\Rightarrow$ 0 ουσιώδες ανώμαλο σημείο.

<u>Συνοψίζοντας</u>, ένα μεμονωμένο ανώμαλο σημείο είναι

— είτε <u>αιρόμενο</u>

— " <u>πόλος</u>

— " <u>ουσιώδες</u>

Υπολογισμός Ολοκλ. Υπολοίπων σε πόλους.

Πρόταση 9: Έστω z_0 πόλος τάξης $m \geq 1$ της συνάρτησης f.

Τότε,

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z) \right].$$

(Η απόδειξη παραλείπεται.)

Πρόταση 10: Έστω φ, ψ ολόμορφες σε περιοχή του z_0 με

$$\varphi(z_0) \neq 0, \quad \psi(z_0) = 0, \quad \psi'(z_0) \neq 0.$$

Τότε, $Res\left(\frac{\varphi}{\psi}, z_0\right) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

Απόδειξη: Έστω $r > 0$ ώστε φ, ψ ολόμορφες στο $D(z_0, r)$.

Είναι

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0} = \psi'(z_0) \neq 0$$

$$\Rightarrow \exists\, \delta \in (0, r) \mid \frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0} \neq 0, \ \forall z \in D(z_0, \delta)$$ με $z \neq z_0$

Για $z \in D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$,

$$(z - z_0)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}} \xrightarrow{(z \to z_0)} \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} \neq 0$$

Από την Πρότ. 8, έπεται ότι z_0 πόλος τάξης 1 της φ/ψ $\overset{[\text{Πρότ. 9}]}{\Longrightarrow}$

$$Res(\varphi/\psi, z_0) = \frac{1}{0!}\lim_{z \to z_0}\left[(z-z_0)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right]$$

$$= \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad \boxtimes$$

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$ με $z_0^6 = -1$.

Τότε, $Res\left(\frac{e^z}{z^6+1}, z_0\right) \overset{[\text{Πρότ. 10}]}{=}$

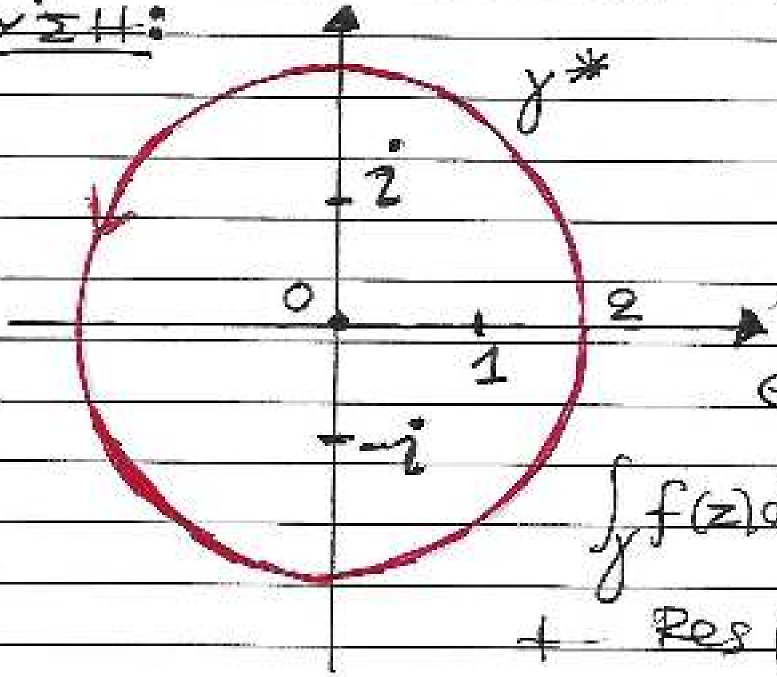
$$= \frac{e^{z_0}}{6z_0^5} = \frac{z_0 e^{z_0}}{6z_0^6} = -\frac{z_0 e^{z_0}}{6}.$$

Εφαρμογές σε υπολογισμό μιγαδικών ολοκληρωμάτων

1 $\int_\gamma f(z)dz = ?$, $f(z) = \dfrac{e^z}{(z^2+1)(z-1)^2}$,

$\gamma(t) = 2e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$

ΛΥΣΗ:



Ανώμαλα σημεία της f:

$\pm i, \ 1 \in \text{int}\,\gamma^*$.

Θ. ολοκ. Υπολ. $\Rightarrow$

$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \left[Res(f, i) + Res(f, -i) + Res(f, 1) \right]$.

• $Res(f, 1)$

$\lim_{z \to 1} \left[(z-1)^2 f(z) \right] = e/2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\Longrightarrow \ 1 =$ πόλος τάξης $m = 2 \ \xrightarrow{[\text{Πρόσ. 9}]}$

$\Longrightarrow \ Res(f, 1) = \dfrac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to 1} \left[(z-1)^2 f(z) \right]'$

$= \lim_{z \to 1} \left(\dfrac{e^z}{z^2+1} \right)' =$

$$= \lim_{z \to 1} \frac{e^z(z^2+1) - 2z e^z}{(z^2+1)^2}$$

$$= \left.\frac{(z-1)^2 e^z}{(z^2+1)^2}\right|_{z=1} = 0.$$

• $\underline{Res(f, \pm i)}$. $\quad f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$,

$$\varphi(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}, \quad \psi(z) = z^2+1.$$

$$\varphi(\pm i) \neq 0, \quad \psi(\pm i) = 0, \quad \psi'(\pm i) \neq 0$$

[Πρότ. 2.10] $\Longrightarrow$

$$Res(f, \pm i) = \frac{\varphi(\pm i)}{\psi'(\pm i)}$$

οπότε

$$Res(f, i) = \frac{e^i}{2i(i-1)^2} = e^i/4,$$

$$Res(f, -i) = \frac{e^{i}}{-2i(-i-1)^2} = \cancel{4}\cdot e^{-i}/4$$

Άρα,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(0 + \frac{e^i + e^{-i}}{4}\right) = \pi i\, \frac{e^i+e^{-i}}{2}$$

$$= \underline{\underline{\pi i \cos(1)}}.$$

(2) $\int_\gamma f(z)dz = ?$, $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$,

$$f(z) = \frac{e^z}{z^4+1}.$$

ΛΥΣΗ: Τα ανώμαλα σημεία της f είναι οι 4ης τάξης ρίζες του -1.

Επειδή $(e^{i\pi/4})^4 = e^{i\pi} = -1$,

ο $a = e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ είναι μια τέτοια ρίζα.

Όμως, το πολυώνυμο z^4+1 έχει πραγματικούς συντελεστές και είναι άρτια συνάρτηση, οπότε οι ρίζες του είναι

$$\pm a, \quad \pm \bar{a}.$$

$\forall z_0 \in \{\pm a, \pm \bar{a}\}$, έχουμε $|z_0| = 1 < 2$

άρα $z_0 \in \text{int}\,\gamma^*$ και

$$\text{Res}(f, z_0) \overset{[\text{Πρότ-}10]}{=} \frac{e^{z_0}}{4z_0^3} = \frac{z_0 e^{z_0}}{4z_0^4}$$

$$= -\frac{z_0 e^{z_0}}{4}.$$

Θ. ολοκλ. Υπολ. $\Longrightarrow$

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\,[\text{Res}(f,a) + \text{Res}(f,-a) +$$

$$+ \text{Res}(f, \bar{a}) + \text{Res}(f, -\bar{a})] =$$

$$= 2\pi i\left(-\frac{1}{4}\right)\left(ae^{a} - ae^{-a} + \bar{a}e^{\bar{a}} - \bar{a}e^{-\bar{a}}\right)$$

$$= -\frac{\pi i}{2}\left[\left(ae^{a} + \overline{ae^{a}}\right) - \left(ae^{-a} + \overline{ae^{-a}}\right)\right]$$

$$= -\pi i\left[\operatorname{Re}(ae^{a}) - \operatorname{Re}(ae^{-a})\right],$$

όπου $a = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

(3) $\int_\gamma f(z)dz = ?$, $f(z) = \frac{1}{z^2 \sin z}$, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

ΛΥΣΗ:

Ανώμαλα σημεία: $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Μόνο το $0 \in \operatorname{int}\gamma^*$

$$\Longrightarrow \int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0).$$

$\forall z \in \mathbb{C}$, $z^2 \sin z = z^3 \psi(z)$, όπου

$$\psi(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots,$$

$\psi(0) = 1$, $\psi'(0) = 0$, $\frac{\psi''(0)}{2!} = -\frac{1}{3!}$

$$\Longrightarrow \psi''(0) = -\frac{2!}{3!} = -\frac{1}{3}$$

Επειδή $\psi(0) \neq 0$ και ψ ολόμορφη στο $\mathbb{C}$,

$\exists$ περιοχή U του 0 ώστε
η $\varphi = \frac{1}{\psi}$ ολόμορφη στο U.

Επιπλέον,
$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z^3}, \quad z \in U \setminus \{0\}, \quad \varphi(0) \neq 0$$

[Πρόταση 8] $\Rightarrow$ 0 πόλος τάξης $m=3$

[Πρότ. 9] $\Rightarrow$ $\mathrm{Res}(f,0) = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z\to 0} \left[z^3 f(z)\right]''$

$$= \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \varphi''(z) = \frac{\varphi''(0)}{2}.$$

Αλλά $\varphi' = -\frac{\psi'}{\psi^2}$, $\varphi'' = -\frac{\psi''\psi^2 - \psi' 2\psi\psi'}{\psi^4}$

$$= \frac{2(\psi')^2 - \psi''\psi}{\psi^3}$$

$$\Rightarrow \varphi''(0) \overset{[\psi'(0)=0]}{=} -\frac{\psi''(0)}{\psi(0)^2} = \frac{1/3}{1^2}$$

=1/3

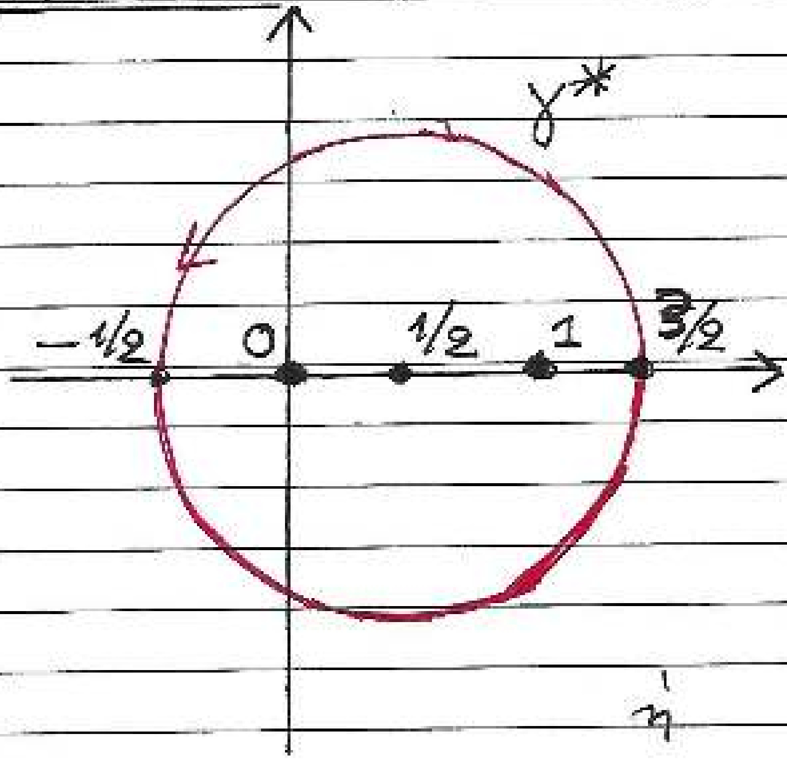
$$\Rightarrow \mathrm{Res}(f,0) = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i/6 = \pi i/3$$

(4) $\int_\gamma f(z)dz = ?$, $f(z) = \frac{z-1}{\sin(\pi z)}$,

$\gamma(t) = \frac{1}{2} + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

ΛΥΣΗ:



Ανώμαλα σημεία: $\lambda \in \mathbb{Z}$

$\gamma : |z - \frac{1}{2}| = 1$

Εάν $\lambda \in \mathbb{Z}$ με $|\lambda - \frac{1}{2}| < 1$, έχουμε $-1/2 < \lambda < 3/2$

ή $\lambda = 0$ ή 1.

Επομένως, μόνο τα $0, 1 \in \text{int}\gamma^* \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \int_\gamma f(z)dz = 2\pi i[\text{Res}(f,0) + \text{Res}(f,1)]$.

- $\text{Res}(f,0) = \left.\frac{z-1}{[\sin(\pi z)]'}\right|_{z=0} =$

$= \left.\frac{z-1}{\pi\cos(\pi z)}\right|_{z=0} = -1/\pi$

• $\underline{Res(f,1) = ?}$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{z\to 1} f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{\sin(\pi z) - \sin(\pi \cdot 1)} = \frac{1}{[\sin(\pi z)]'\big|_{z=1}} = \frac{1}{\pi \cos\pi} = \frac{-1}{\pi} \in \mathbb{C}$$

$\Longrightarrow$ $\underline{1 = \text{αιρόμενο}}$ $\Longrightarrow$ $Res(f,1) = 0.$

Άρα,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\left(-\tfrac{1}{\pi} + 0\right) = \underline{\underline{-2i}}.$$

(5) $\int_\gamma f(z)dz = ?$, $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z(1-\cos z)}$,
$\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

ΛΥΣΗ: Ανώμαλα σημεία: $2\lambda\pi$, $\lambda \in \mathbb{Z}$,
δηλ. $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$

Μόνο $0 \in \operatorname{int}\gamma^* \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \, Res(f,0).$$

$$\forall z \in D(0,\pi)\setminus\{0\},$$

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z(1-\cos z)} = \frac{z + z^2/2! + z^3/3! + \cdots}{z(z^2/2! - z^4/4! + z^6/6! - \cdots)}$$

$$= \frac{zA(z)}{z^3 B(z)} = \frac{1}{z^2}\cdot\frac{A(z)}{B(z)},$$

όπου

$$A(z) = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots,$$

$$B(z) = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \cdots,$$

$$A(0) = 1, \quad A'(0) = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}, \quad B(0) = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2},$$

$$B'(0) = 0.$$

Επειδή $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ ολόμορφες στο $\mathbb{C}$ και $B(0) \neq 0$, η $\varphi = A/B$ είναι ολόμορφη σε περιοχή U του 0.

Επιπλέον,

$$\varphi(0) \neq 0, \quad f(z) = \frac{\varphi(z)}{z^2}, \quad \forall z \in U\setminus\{0\}$$

[Προτ. 8] $\Longrightarrow$ 0 = διπλός πόλος της f

[Προτ. 9] $\Longrightarrow$ $Res(f,0) = \dfrac{1}{(2-1)!} \lim\limits_{z\to 0} [z^2 f(z)]' =$

$$= \lim_{z\to 0} \varphi'(z) = \varphi'(0) = \frac{A'(0)B(0) - A(0)B'(0)}{[B(0)]^2}$$

$$[B'(0)=0] \quad \frac{A'(0)}{B(0)} = \frac{1/2}{1/2} = 1.$$

Επομένως,

$$\mathrm{Res}(f,0) = 1 \Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i.$$

(6) $\int_\gamma f(z)\,dz = ?$, $f(z) = \frac{z e^{z^2}}{z^6} + z^7\cos\left(\frac{1}{z^2}\right)$,

$\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

ΛΥΣΗ:

$\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\frac{z e^{z^2}}{z^6} = \frac{1}{z^7}\left(1 + \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \dots\right)$

$$= \underbrace{\frac{1}{z^7} + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{2!z^3} + \boxed{\frac{1}{3!}\frac{1}{z}} + \dots}_{f_1(z)}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{z e^{z^2}}{z^6}\,dz = \int_\gamma f_1(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f_1, 0)$$

$$= 2\pi i/3! = \pi i/3.$$

Επιπλέον, $\forall z \neq 0$,

$$z^7\cos\left(\frac{1}{z^2}\right) = z^7\left(1 - \frac{1}{2!z^4} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^8} - \frac{1}{6!}\frac{1}{z^{12}} + \dots\right)$$

$$= z^7 - \frac{z^3}{2!} + \boxed{\frac{1}{4!}\frac{1}{z}} - \frac{1}{6!}\frac{1}{z^5} + \dots$$

$$\Longrightarrow \int_\gamma z^7 \cos\left(\frac{1}{z^2}\right) dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}\left(z^7 \cos\left(\frac{1}{z^2}\right), 0\right)$$

$$= 2\pi i / 4! = \pi i / 12 .$$

Άρα,

$$\int_\gamma f(z)dz = \pi i/3 + \pi i/12 = \underline{\underline{\frac{5\pi i}{12}}} .$$

(7) $\int_\gamma f(z)dz = ;$, $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

<u>ΛΥΣΗ:</u> Είναι $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f, 0)$

$\forall z \neq 0$, $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}} = e^z \cdot e^{1/z}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$$

$$= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} \left(\frac{1}{z}\right)^{m-n} .$$

Ο συντελεστής του $1/z$ στο παραπάνω ανάπτυγμα προκύπτει για $m - n = 1$ $\Leftrightarrow m = n+1$

Άρα,

$$\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(n+1)!} .$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ Θ. ΟΛΟΚΛ. ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ

I. Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα

Ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt, \qquad (1)$$

όπου $R(u,v)$ ρητή συνάρτηση 2 μεταβλητών u, v.

Το ολοκλ. (1) μετασχηματίζεται σε μιγαδικό ολοκλ. πάνω στον κύκλο $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ ως εξής:

Θέτουμε $z = e^{it}$, οπότε $\bar{z} = 1/z$ κ'

$$\cos t = Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),$$

$$\sin t = Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$$

$$dz = i e^{it} dt = iz\,dt$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \cos t &= \frac{z^2+1}{2z} \\ \sin t &= \frac{z^2-1}{2iz} \\ dt &= \frac{dz}{iz} \end{aligned} \right\} \qquad (2)$$

$(1) \xRightarrow{(2)}$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt = \int_\gamma R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz}$$

Παραδείγματα:

(1) $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5+4\sin t} = ?$

$$I = \int_\gamma \frac{dz/iz}{5+4\,\frac{z^2-1}{2iz}} = \int_\gamma \frac{dz}{2z^2+5iz-2}$$

όπου $\gamma(t) = e^{it}, t\in[0,2\pi]$

$2z^2+5iz-2 = 2z^2+4iz+iz-2$

$= 2z(z+2i)+i(z+2i) = (z+2i)(2z+i)$

ρίζες: $-2i, \ -i/2$

Μόνο η $-i/2 \in \operatorname{int}\gamma^*$

$\Longrightarrow \quad I = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -i/2),$

όπου $f(z) = \frac{1}{2z^2+5iz-2}$.

Το $-i/2$ είναι απλός πόλος της f

$$\Longrightarrow \quad I = 2\pi i \left.\frac{1}{4z+5i}\right|_{z=-i/2} = \underline{\underline{2\pi/3}}.$$

(ii) $I = \int_0^{\pi} \frac{dt}{(3+\cos t)^2} = ?$

Είναι $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{dt}{(3+\cos t)^2} \overset{\xi = 2\pi - t}{=} \int_{\pi}^{0} \frac{(-d\xi)}{(3+\cos\xi)^2}$

$= I$

$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(3+\cos t)^2} = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} = 2I$

$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(3+\cos t)^2} =$

$= \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{\frac{dz}{iz}}{\left(3 + \frac{z^2+1}{2z}\right)^2} = \frac{2}{i} \int_{\gamma} \frac{z}{(z^2+6z+1)^2} dz$

$z^2+6z+1 = 0 \Leftrightarrow z_{1,2} = -3 \pm 2\sqrt{2}$

Μόνο η $z_1 = -3+2\sqrt{2} \in \text{int}\,\gamma^*$

$\Rightarrow I = \frac{2}{i} 2\pi i \, \text{Res}[f(z), z_1]$

$= 4\pi \, \text{Res}[f(z), z_1]$,

όπου $\quad f(z) = \dfrac{z}{(z^2+6z+1)^2} = \dfrac{z}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}$.

Το z_1 είναι διπλός πόλος της f, οπότε

$$\operatorname{Res}[f(z), z_1] = \lim_{z\to z_1}\left[(z-z_1)^2 f(z)\right]'$$

$$= \lim_{z\to z_1}\left[\frac{z}{(z-z_2)^2}\right]'$$

$$= \lim_{z\to z_1}\left[\frac{1}{z-z_2} + z_2\frac{1}{(z-z_2)^2}\right]'$$

$$= -\frac{1}{(z-z_2)^2} - \frac{2z_2}{(z-z_2)^3}\Bigg|_{z=z_1}$$

$$= -\frac{z_1+z_2}{(z_1-z_2)^3} = -\frac{-6}{(4\sqrt{2})^3}$$

$$= \frac{6}{4^3\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{3}{64\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad I = 4\pi\frac{3}{64\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{16\sqrt{2}}.$$

II. Γενικευμένα ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)}\, dt,$$

όπου P, Q πολυώνυμα τέτοια ώστε

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ Q(t) \neq 0,\ \forall t \in \mathbb{R} \\ \bullet\ \deg Q - \deg P \geq 2. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Θεώρημα II.1: Εάν ισχύουν οι (3), τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)}\, dt = 2\pi i \sum_{k=1}^{\nu} \operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_k\right],$$

όπου $z_1, z_2, \ldots, z_\nu \in \mathbb{C}$ οι ρίζες του Q με θετικό Im.

Παράδειγμα:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\, dt = ?$$

$P(z) = z^2$, $Q(z) = 1 + z^4$, $Q(t) \neq 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$

$$\deg Q - \deg P = 4 - 2 = 2$$

Ρίζες του Q: $\pm a$, $\pm \bar{a}$, $a = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

Μόνο οι $a, -\bar{a}$ έχουν $\operatorname{Im} > 0$

$$\xRightarrow{\Theta.\text{II}.1} I = 2\pi i \left[\operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}, a\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}, -\bar{a}\right)\right].$$

$\forall \rho \in \{a, -\bar{a}\}$, $P(\rho) \neq 0$, $Q(\rho) = 0$, $Q'(\rho) \neq 0$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}, \rho\right) = \frac{P(\rho)}{Q'(\rho)} = \frac{\rho^2}{4\rho^3}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{\rho} = \frac{\bar{\rho}}{4}$$

$$\Rightarrow I = 2\pi i \cdot \frac{1}{4}\left(\bar{a} + -\bar{\bar{a}}\right) = \frac{\pi i}{2}\left(\bar{a} - a\right)$$

$$= -\frac{\pi i}{2}\left(a - \bar{a}\right) = -\frac{\pi i}{2} 2i \operatorname{Im}(a)$$

$$= \pi/\sqrt{2}.$$

III. Γενικευμένα ολοκληρώματα Fourier:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{i\lambda t} dt, \quad \lambda > 0$$

όπου P, Q πολυώνυμα με

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ Q(t) \neq 0,\ \forall t \in \mathbb{R}. \\ \bullet\ \deg Q - \deg P \geq 1 \end{array}\right\} (4)$$

Θεώρημα III.1. Εάν ισχύουν οι (4), τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{i\lambda t} dt = 2\pi i \sum_{k=1}^{\nu} \operatorname{Res}(f, z_k), \text{ όπου}$$

$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}$, z_k, $1 \leq k \leq \nu$, οι ρίζες του Q με $\operatorname{Im} > 0$.

Παραδείγματα:

(i) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\pi t)}{t^2-2t+2}\,dt = ?$

Είναι $I = Re(J)$, όπου

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2-2t+2} e^{i\pi t} dt.$$

$P(z)=1$, $Q(z) = z^2-2z+2$, $Q(t)\neq 0$, $\forall t\in\mathbb{R}$

$Q(z)=0 \Leftrightarrow z=a$ ή $\bar{a}$, $a=1+i$.

Επειδή $Im(a)>0$, έχουμε

$$J \overset{\Theta.\text{III}.1}{=\!=} 2\pi i \, Res\left(\frac{e^{i\pi z}}{z^2-2z+2}, a\right)$$

$$= 2\pi i \left.\frac{e^{i\pi z}}{2z-2}\right|_{z=a}$$

$$= 2\pi i \frac{e^{i\pi a}}{2(a-1)} = \pi i \frac{e^{\pi(-1+i)}}{i}$$

$$= \pi \cdot e^{-\pi} \cdot e^{i\pi} = -\pi e^{-\pi}.$$

$\Longrightarrow$ $I = -\pi e^{-\pi}$.

(ii) $$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^3 \sin t}{(1+t^2)^2}\, dt = ?$$

$$I = \mathrm{Im}(J), \quad J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^3}{(1+t^2)^2} e^{it}\, dt.$$

$P(z) = z^3$, $Q(z) = (1+z^2)^2$, $\deg Q - \deg P = 1$.

Ρίζες του Q: $\pm i$, $\mathrm{Im}(i) > 0$

$\Longrightarrow J = 2\pi i \, \mathrm{Res}(f(z), i)$, όπου

$f(z) = \dfrac{z^3 e^{iz}}{(1+z^2)^2}$. Το i είναι διπλός πόλος της f, οπότε

$$\mathrm{Res}(f, i) = \lim_{z \to i} \left[(z-i)^2 \frac{z^3 e^{iz}}{(z-i)^2 (z+i)^2} \right]'$$

$$= \lim_{z \to i} \left[\frac{z^3 e^{iz}}{(z+i)^2} \right]'$$

$$= \left. \frac{(3z^2 e^{iz} + i z^3 e^{iz})(z+i) - 2 z^3 e^{iz}}{(z+i)^3} \right|_{z=i}$$

$$= \left. \frac{z^2 e^{iz} \left[(3+iz)(z+i) - 2z \right]}{(z+i)^3} \right|_{z=i}$$

$$= \cdots = 1/4e \leftarrow \lambda\pi$$

Αποδείξεις των Θ. ΙΙ.1, ΙΙΙ.1 (σελ. 5, 6).

Λήμμα 1: Έστω $P(z)$ πολυώνυμο βαθμού $n \geq 1$ με μεγιστοβάθμιο όρο $a_n z^n$ ($n \geq 1$, $a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$). Τότε:

(i) $$\lim_{|z|\to\infty} \left| \frac{P(z)}{a_n z^n} - 1 \right| = 0.$$

(ii) $\exists R_0 > 0 \,|\, \forall z \in \mathbb{C}$ με $|z| \geq R_0$, ισχύει
$$\frac{1}{2}|a_n|\cdot|z|^n \leq |P(z)| \leq \frac{3}{2}|a_n|\cdot|z|^n.$$

Απόδειξη: (i) Το $P(z)$ έχει τη μορφή
$$P(z) = a_n z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C},\ 0 \leq k \leq n-1$$

$\Rightarrow \forall z \neq 0$,
$$\left| \frac{P(z)}{a_n z^n} - 1 \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} \cdot \frac{1}{z^{n-k}} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|} \cdot \frac{1}{|z|^{n-k}},$$

ενώ $\lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{|z|^{n-k}} = 0$, για $0 \leq k \leq n-1$

$$\Rightarrow \lim_{|z|\to\infty} \left| \frac{P(z)}{a_n z^n} - 1 \right| = 0$$

(ii) Για $\varepsilon = 1/2$, από το (i), $\exists R_0 > 0 \,|$

$$\forall |z| \geq R_0, \quad \left| \frac{P(z)}{a_n z^n} - 1 \right| < 1/2$$

οπότε

$$\left|\frac{P(z)}{a_n z^n}\right| \leq \left|\frac{P(z)}{a_n z^n}-1\right| + 1 < 1/2 + 1 = 3/2$$

$$\Rightarrow \quad |P(z)| < \frac{3}{2}|a_n|\cdot|z|^n$$

κ'

$$\left|\frac{P(z)}{a_n z^n}\right| = \left|1-\left(1-\frac{P(z)}{a_n z^n}\right)\right|$$

$$\geq 1-\left|1-\frac{P(z)}{a_n z^n}\right| > 1-1/2 = 1/2$$

$$\Rightarrow \quad |P(z)| > \frac{1}{2}|a_n|\cdot|z|^n. \qquad \boxtimes$$

<u>Λήμμα 2</u>: Έστω $P(z), Q(z)$ πολυώνυμα με $\deg Q = m$, $\deg P = n$, $m>n$.

Τότε, $\exists\, R_0>0, M>0 \,|$

$$\frac{|P(z)|}{|Q(z)|} \leq \frac{M}{|z|^{m-n}}, \quad \forall\, |z| \geq R_0.$$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\beta_m z^m$, $a_n z^n$ οι μεγιστοβάθμιοι όροι των Q, P αντίστοιχα ($\beta_m \neq 0$, $a_n \neq 0$).
Σύμφωνα με το Λήμμα 1, $\exists\, R_1, R_2 > 0 \,|$

$$\forall\, |z| \geq R_1, \quad \frac{1}{2}|a_n|\cdot|z|^n \leq |P(z)| \leq \frac{3}{2}|a_n|\cdot|z|^n \quad (1)$$

$$\forall\, |z| \geq R_2, \quad \frac{1}{2}|\beta_m|\cdot|z|^m \leq |Q(z)| \leq \frac{3}{2}|\beta_m|\cdot|z|^m \quad (2)$$

Επιλέγουμε $R_3 > \max\{|z| : Q(z)=0\}$ κ'

$$R_0 > \max\{R_1, R_2, R_3\}.$$

Τότε, $\forall\, |z| \geq R_0$, ισχύουν οι (1), (2) κ' $Q(z) \neq 0$, οπότε

$$\frac{|P(z)|}{|Q(z)|} \leq \frac{\frac{3}{2}|a_n| \cdot |z|^n}{\frac{1}{2}|\beta_m| \cdot |z|^m} = \frac{3|a_n|}{|\beta_m|} \cdot \frac{1}{|z|^{m-n}}.$$

Επομένως, η αποδεικτέα ισχύει για $M = \dfrac{3|a_n|}{|\beta_m|}$.

$\boxtimes$

<u>Λήμμα 3</u>: Έστω $P(z)$, $Q(z)$ πολυώνυμα με

$$\deg Q = m, \quad \deg P = n, \quad m-n \geq 2.$$

Εάν $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [\varphi_0, \varphi_1]$, $R>0$, τότε

$$\lim_{R\to+\infty} \left| \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz \right| = 0.$$

<u>Απόδειξη</u>: Σύμφωνα με το Λήμμα 2, $\exists\, M, R_0 > 0 \mid$

$\forall\, |z| \geq R_0$, $\quad \left| \dfrac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \dfrac{M}{|z|^{m-n}}$. Έστω $R > R_0$.

Τότε, $\forall\, z \in \gamma_R^*$, $\quad \left| \dfrac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \dfrac{M}{R^{m-n}}$

$$\xRightarrow{[ML-ανισ.]} \forall R > R_0, \left| \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz \right| \leq (\varphi_1 - \varphi_0) R \frac{M}{R^{m-n}}$$

$$= \frac{M(\varphi_1 - \varphi_0)}{R^{m-n-1}} \xrightarrow{R\to+\infty} 0$$

$\boxtimes$

Απόδειξη Θ. ΙΙ.1:

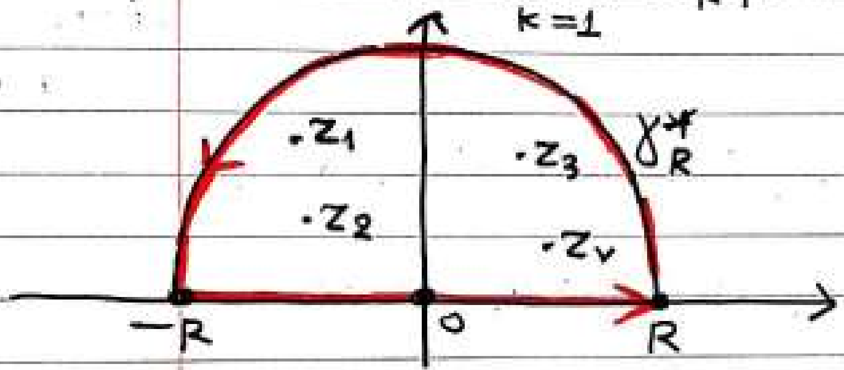
Θέτουμε

$$\mathcal{R}_+ = \{z\in\mathbb{C} : Q(z)=0,\ \operatorname{Im} z>0\} = \{z_1, z_2, \dots, z_\nu\} \quad (\nu\geq 1).$$

Θεωρούμε την κλειστή καμπύλη $\Gamma_R \in \mathcal{C}_+$, όπου

$$\Gamma_R = \gamma_R + [-R,R], \quad \gamma_R(t) = Re^{it}, \quad t\in[0,\pi]$$

κ' $R > \max\limits_{k=1}^{\nu} |z_k|$.



Τα ανώμαλα σημεία της P/Q που περιέχονται στο $\operatorname{int}\Gamma_R^*$ είναι τα z_k, $1\leq k\leq \nu$

$$\Longrightarrow \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{\nu} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_k\right)$$

$$\Longrightarrow \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz + \int_{-R}^{R} \frac{P(t)}{Q(t)}\,dt = 2\pi i \sum_{k=1}^{\nu} \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}, z_k\right).$$

Για $R\to+\infty$, η αποδεικτέα έπεται από το Λήμμα 3. ☒

Για την απόδειξη του Θ. ΙΙΙ.1 θα χρειαστούμε τρία επιπλέον λήμματα:

Λήμμα 4: $\sin t \geq \frac{2t}{\pi}, \ \forall t \in [0, \pi/2]$.

Απόδειξη: Θέτουμε $\varphi(t) = \sin t / t, \ t \in (0, \pi/2]$.
Έχουμε
$$\varphi'(t) = g(t)/t^2, \ g(t) = t\cos t - \sin t, \ t \in (0, \tfrac{\pi}{2}]$$

επί $g'(t) = -t\sin t < 0, \ \forall t \in (0, \pi/2)$

$$\Rightarrow g \downarrow \text{ στο } [0, \pi/2] \Rightarrow g(t) < g(0) = 0, \ \forall t \in (0, \tfrac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow \varphi \downarrow \text{ στο } (0, \pi/2] \Rightarrow \varphi(t) > \varphi(\pi/2), \ \forall t \in (0, \tfrac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow \sin t > \frac{2t}{\pi}, \ \forall t \in (0, \tfrac{\pi}{2}).$$

Επειδή $\sin t = \frac{2t}{\pi}$, για $t = 0$ ή $\pi/2$, έπεται η αποδεικτέα. $\boxtimes$

Λήμμα 5: $\forall R > 0, \ \forall \lambda > 0,$

$$\int_0^{\pi} \left| \exp(i\lambda R e^{it}) \right| dt \leq \frac{\pi}{\lambda R}\left(1 - e^{-\lambda R}\right).$$

Απόδειξη: Έχουμε

$$\left| \exp(i\lambda R e^{it}) \right| = \left| \exp(i\lambda R \cos t - \lambda R \sin t) \right|$$
$$= e^{-\lambda R \sin t}, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \left| \exp\left(i\lambda R e^{it}\right) \right| dt = \int_0^{\pi} e^{-\lambda R \sin t}\, dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R \sin t}\, dt + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-\lambda R \sin t}\, dt.$$

Αλλά, το β' ολοκλήρωμα με την αντικατάσταση $\xi = \pi - t$ γράφεται

$$\int_{\pi/2}^{0} e^{-\lambda R \sin(\pi - \xi)} (-d\xi) = \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R \sin \xi}\, d\xi$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \left| \exp\left(i\lambda R e^{it}\right) \right| dt = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R \sin t}\, dt$$

$$\overset{[\text{Λήμμα } 4]}{\leq} 2 \int_0^{\pi/2} e^{-2\lambda R t/\pi}\, dt$$

$$= -\frac{\pi}{\lambda R} e^{-\frac{2\lambda R t}{\pi}} \Big|_{t=0}^{t=\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{\lambda R} \left(1 - e^{-\lambda R}\right).$$

$\boxtimes$

Λήμμα 6: (Θ. Jordan) Έστω $\lambda > 0$ κ' $P(z)$, $Q(z)$ πολυώνυμα με $\deg Q = m$, $\deg P = n$, $m - n \geq 1$. Τότε,

$$\lim_{R \to +\infty} \left| \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z} dz \right| = 0,$$

όπου $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$.

Απόδειξη: Σύμφ. με Λήμμα 2, $\exists M > 0$, $R_0 > 0$ |

$$\forall\ |z| \geq R_0, \quad \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \frac{M}{|z|^{m-n}}.$$

Έστω $R > R_0$. Τότε, $\forall\ t \in [0, \pi]$,

$$\left| \frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})} \right| \leq \frac{M}{R^{m-n}}, \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z} dz \right| =$$

$$= \left| \int_0^{\pi} \frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})} \exp(i\lambda Re^{it}) \, iRe^{it} dt \right|$$

$$\leq R \int_0^{\pi} \left| \frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})} \right| \cdot \left| \exp(i\lambda Re^{it}) \right| dt$$

$$\overset{(3)}{\leq} \frac{M}{R^{m-n-1}} \int_0^{\pi} \left| \exp(i\lambda Re^{it}) \right| dt \overset{[\text{Λήμμα } 5]}{\leq}$$

$$\leq \frac{M}{R^{m-n-1}} \frac{\pi}{\lambda R}\left(1-e^{-\lambda R}\right)=\frac{M\pi}{\lambda R^{m-n}}\left(1-e^{-\lambda R}\right), \quad \forall R>R_0$$

$$\xrightarrow{R\to+\infty} 0. \quad \boxtimes$$

Απόδειξη Θ. ΙΙΙ.1

Έστω z_k, $1\leq k\leq \nu$, οι ρίζες του Q με θετικό φανταστικό μέρος. Επιλέγουμε

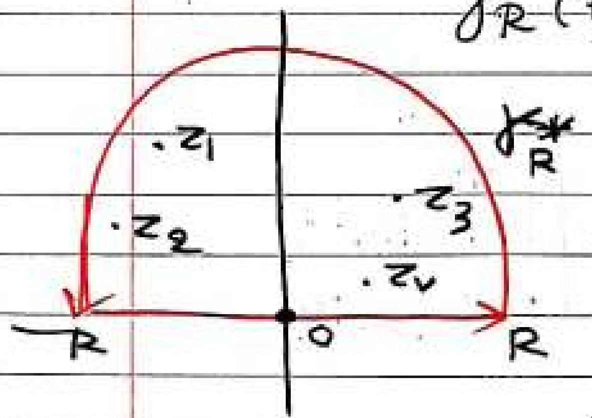
$$R_0 > \max\{|z_k| : 1\leq k\leq \nu\}.$$

$\forall R>R_0$, θεωρούμε την καμπύλη

$$\Gamma_R = \gamma_R + [-R, R],$$

όπου

$$\gamma_R(t) = Re^{it}, \quad t\in[0,\pi].$$



Εάν $R>R_0$, τα ανώμαλα σημεία της

$$z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}$$

που βρίσκονται στο $\mathrm{int}\,\Gamma_R^*$ είναι τα z_k, $1\leq k\leq \nu$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{\nu} \mathrm{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}, z_k\right]$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z} dz + \int_{-R}^{R} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{i\lambda t} dt =$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{\nu} \mathrm{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}, z_k\right].$$

Για $R \to +\infty$, από το Λήμμα 5 έπεται η απόδειξη. $\boxtimes$

ΑΡΧΗ ΜΕΓΙΣΤΟΥ

$$D(z_0,R)=\{z\in\mathbb{C} \mid |z-z_0|<R\},$$

$z_0\in\mathbb{C}$, $0<R<\infty$.

Λήμμα 1: Έστω f ολόμορφη στον $D(z_0,R)$.

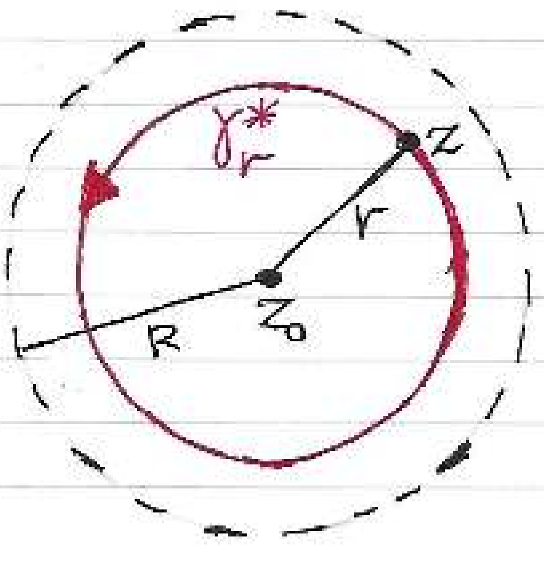
Υποθέτουμε ότι η $|f|$ λαμβάνει μέγιστο στο κέντρο z_0 του $D(z_0,R)$, δηλ.

$$|f(z_0)| = \max_{z\in D(z_0,R)} |f(z)|.$$

Τότε, $f=$ σταθερή στον $D(z_0,R)$.

Απόδειξη: Θα δ.ο. $|f(z)|=|f(z_0)|$,

$\forall z\in D(z_0,R)$.



Έστω $z\in D(z_0,R)$.
Θέτουμε
$r=|z-z_0|$
και
$\gamma_r(t)=z_0+re^{it}$,
$t\in[0,2\pi]$.

Προφανώς, $\gamma_r^*\subset D(z_0,R)$.

Ολοκλ. τύπος Cauchy $\Longrightarrow$

$$\Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z_0}\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})}{re^{it}}\, ire^{it}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})\,dt.$$

Λόγω της υπόθεσης, έχουμε

$$|f(z_0+re^{it})| \le |f(z_0)|, \ \forall t\in[0,2\pi],$$

οπότε

$$|f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+re^{it})|\,dt$$

$$\le |f(z_0)|$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+re^{it})|\,dt = |f(z_0)|$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big[|f(z_0)| - |f(z_0+re^{it})|\Big]\,dt = 0.$$

Όμως, η συνάρτηση $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$

με $\varphi(t) = |f(z_0)| - |f(z_0 + re^{it})|$

είναι συνεχής, μη αρνητική και

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t)\, dt = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi(t) = 0, \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

$$\Longrightarrow \quad \forall w \in \gamma_r^*, \quad |f(w)| = |f(z_0)|$$

$$\Longrightarrow \quad |f(z)| = |f(z_0)|.$$

Η τελευταία ισχύει $\forall z \in D(z_0, R)$

$\Longrightarrow$ $|f| =$ σταθερή στον $D(z_0, R) \equiv$ πεδίο

$\Longrightarrow$ $f =$ σταθερή στον $D(z_0, R)$.

$\boxtimes$

Λήμμα 2: Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο (= ανοικτό, συνεκτικό) και V_1, V_2 ανοικτά ώστε

$$U = V_1 \cup V_2, \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset.$$

Τότε, κάποιο εκ των V_1, V_2 είναι $\emptyset$.

(Η απόδειξη παραλείπεται.)

<u>Λήμμα 3:</u> Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f: U \to \mathbb{C}$ συνεχής, $\rho > 0$. Τότε, το σύνολο

$$V_1 = \{ z \in U \mid |f(z)| < \rho \}$$

είναι ανοικτό.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $z_1 \in V_1$. Επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ με $0 < \varepsilon < \rho - |f(z_1)|$. Επειδή $|f|$ συνεχής στο $z_1 \in U$ = ανοικτό, $\exists\, \delta > 0 \mid D(z_1, \delta) \subset U$, $\forall z \in D(z_1, \delta)$, $|f(z)| < \underbrace{|f(z_1)| + \varepsilon}_{< \rho}$

$\Rightarrow D(z_1, \delta) \subset V_1$

$\Rightarrow z_1$ εσωτερικό σημείο του V_1. $\boxtimes$

Θεώρημα 4 (Αρχή Μεγίστου, $1^{\underline{η}}$ μορφή):

Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο (= ανοικτό, συνεκτικό) και $f : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, μη σταθερή.
Τότε, η $|f|$ δεν λαμβάνει μέγιστο στο U.

Απόδειξη: Υποθέτουμε αντιθέτως ότι $\exists z_0 \in U$ ώστε $|f(z_0)| = \max\limits_{z\in U} |f(z)|$.
Τότε, $\forall z \in U$, $|f(z)| \leq |f(z_0)|$.

Θέτουμε
$$V_1 = \{z \in U : |f(z)| < |f(z_0)|\},$$
$$V_2 = \{z \in U : |f(z)| = |f(z_0)|\}.$$

Τότε, $U = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ και V_1 ανοικτό (βλ. Λήμμα 3), $V_2 \neq \emptyset$.

Ισχυριζόμαστε ότι και V_2 ανοικτό.

Πράγματι· έστω $z_2 \in V_2$. Αφού $z_2 \in U =$ = ανοικτό, $\exists\, \delta > 0 \,|\, D(z_2, \delta) \subset U$.
Έχουμε
$\forall z \in D(z_2, \delta)$, $|f(z)| \leq |f(z_0)| = |f(z_2)|$

$\Longrightarrow$

$$\Rightarrow |f(z_2)| = \max_{z \in D(z_2,\delta)} |f(z)|$$

$$\xRightarrow{(\text{Λήμμα 1})} f \text{ σταθερή στο } D(z_2,\delta), \text{ δηλ.}$$

$$\forall z \in D(z_2,\delta), \quad f(z) = f(z_2)$$

$$\Rightarrow |f(z)| = |f(z_2)| = |f(z_0)|, \ \forall z \in D(z_2,\delta)$$

$$\Rightarrow D(z_2,\delta) \subseteq V_2$$

$$\Rightarrow z_2 \text{ εσωτερικό σημείο του } V_2.$$

Δείξαμε λοιπόν ότι V_2 ανοικτό.
Συνοψίζοντας έχουμε ότι

$$U = V_1 \cup V_2, \ V_1, V_2 \text{ ανοικτά}, \ V_1 \cap V_2 = \emptyset,$$
$$V_2 \neq \emptyset.$$

$$\text{Λήμμα 2} \xRightarrow{(U \text{ πεδίο})} V_1 = \emptyset$$

$$\Rightarrow U = V_2 \Rightarrow \forall z \in U, \ |f(z)| = |f(z_0)|$$

$$\Rightarrow |f| = \text{σταθερή στο } U$$

$$\Rightarrow f = \text{ " \quad " \quad " } \quad (\text{ΑΤΟΠΟ!})$$

$\boxtimes$

<u>Θεώρημα 5 (Αρχή Ελαχίστου, 1η εκδοχή)</u>

Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο και $f : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη μη σταθερή, ώστε

$$f(z) \neq 0, \quad \forall z \in U.$$

Τότε, η $|f|$ <u>δεν</u> λαμβάνει ελάχιστη τιμή στο U.

<u>Απόδειξη:</u> Θέτουμε $g = 1/f \in \mathcal{H}(U)$.

Ας υποθέσουμε αντιθέτως ότι $\exists z_0 \in U \,|$

$$|f(z_0)| = \min_{z \in U} |f(z)|.$$

Τότε,

$$|g(z_0)| = \max_{z \in U} |g(z)|$$

$$\xrightarrow[\text{(Αρχή Μεγίστου)}]{\Theta.4} \quad g = \text{σταθερή} \Rightarrow f = \text{σταθερή (Άτοπο!)}$$

$\boxtimes$

<u>Σχόλιο:</u> Η υπόθεση "$f(z) \neq 0, \forall z \in U$" στο Θ.5 <u>δεν μπορεί να παραλειφθεί</u>. Π.χ.

$$f(z) = z, \qquad z \in D(0,1).$$

Τότε, f ολόμορφη, μη σταθερή, ενώ

$$\min_{|z|<1} |f(z)| = 0 = f(0).$$

Θεώρημα 6 (Αρχή Μεγίστου, 2η εκδοχή):

Έστω $U \subset \mathbb{C}$ φραγμένο πεδίο με σύνορο ∂U.
Θέτουμε
$$\overline{U} = U \cup \partial U \;(= \text{κλειστό, φραγμένο})$$
και
$$f : \overline{U} \to \mathbb{C} \quad \text{συνεχής}$$
με
$$f\big|_U \in \mathcal{H}(U).$$
Τότε,
$$\max_{z \in \overline{U}} |f(z)| = \max_{z \in \partial U} |f(z)|. \qquad (1)$$

Εάν επιπλέον f μη σταθερή, τότε το $\max_{z \in \overline{U}} |f(z)|$ λαμβάνεται μόνο σε σημεία του ∂U.

Απόδειξη: Η $|f|$ είναι συνεχής στο κλειστό κ' φραγμένο σύνολο $\overline{U}$, οπότε υπάρχει το
$$\max_{z \in \overline{U}} |f(z)| = M.$$

- Εάν f = σταθερή, η (1) προφανώς ισχύει.
- Εάν f μη σταθερή, το M δεν λαμβάνεται σε σημεία του U (Θ. 4 – Αρχή Μεγίστου, 1η εκδοχή), οπότε λαμβάνεται μόνο στο ∂U ($\Rightarrow$ ισχύει η (1)).

$\boxtimes$

Θεώρημα 7 (Αρχή Ελαχίστου, 2η εκδοχή):

Έστω U, f όπως στο Θ.6. Υποθέτουμε επιπλέον ότι

$$f(z) \neq 0, \quad \forall z \in U.$$

Τότε,

$$\min_{z \in \overline{U}} |f(z)| = \min_{z \in \partial U} |f(z)|. \qquad (2)$$

Εάν επιπλέον f μη σταθερή, τότε το $\min\limits_{z \in \overline{U}} |f(z)|$ λαμβάνεται μόνο σε σημεία του ∂U.

Απόδειξη: Η $|f|$ είναι συνεχής στο κλειστό κ' φραγμένο σύνολο $\overline{U}$, οπότε υπάρχει το

$$\min_{z \in \overline{U}} |f(z)| = m.$$

• Εάν f = σταθερή, η (2) προφανώς ισχύει.
• Εάν f μη σταθερή, επειδή

$$f(z) \neq 0, \quad \forall z \in U,$$

η Αρχή Ελαχίστου – 1η εκδοχή (Θ.5) μας δίνει ότι το $m = \min\limits_{z \in \overline{U}} |f(z)|$ δεν λαμβάνεται σε σημεία του U, οπότε λαμβάνεται μόνο σε σημεία του ∂U ($\Rightarrow$ ισχύει η (2)). $\boxtimes$

Ασκήσεις:

(1) Εάν $f(z)=z^2+z-1$, $z\in\mathbb{C}$, να βρεθούν τα

$$\max_{|z|\leq 1}|f(z)|, \quad \min_{|z|\leq 1}|f(z)|,$$

καθώς κ' τα σημεία z πάνω στα οποία τα παραπάνω max, min λαμβάνονται.

Λύση: Θέτουμε $U=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$.

Τότε, $\overline{U}=\{z\in\mathbb{C}: |z|\leq 1\}$, $\partial U=\{z\in\mathbb{C}: |z|=1\}$.

f συνεχής στο $\overline{U}$, f ολόμορφη στο U και f μη σταθερή.

Από την Αρχή Μεγίστου – 2η εκδοχή (Θ.6) έπεται ότι το

$$\max_{|z|\leq 1}|f(z)| = M$$

λαμβάνεται μόνο σε σημεία $z\in\partial U$.

$\forall z\in\partial U$, έχουμε $\overline{z}=1/z$ και

$$|f(z)| = \left|z\left(z+1-\frac{1}{z}\right)\right| = |1+z-\overline{z}|$$

$$= |1+2i\,\mathrm{Im}(z)| = \sqrt{1+4(\mathrm{Im}z)^2}.$$

Εάν $z\in\partial U$, $\exists\,\theta\in(-\pi,\pi] \mid z=e^{i\theta}$, οπότε

$$|f(z)| = \sqrt{1+4\sin^2\theta} \leq \sqrt{5}.$$

Το "=" στην παραπάνω ανισότητα ισχύει μόνο για

$$\sin^2\theta = \Leftrightarrow |\sin\theta| = 1$$

$$\Leftrightarrow \theta = \pi/2 \text{ ή } -\pi/2$$

$$\Leftrightarrow z = \pm i.$$

Άρα, $\max_{|z|\leq 1} |f(z)| = \sqrt{5}$ κ' λαμβάνεται μόνο για $z = \pm i$.

Για τον υπολογισμό του $\min_{|z|\leq 1} |f(z)|$ δεν πρέπει να βιαστούμε να εφαρμόσουμε την Αρχή του Ελαχίστου, πριν εξετάσουμε αν η f έχει ρίζες στο $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Έχουμε

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 + z - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Επειδή $\left|\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right| < 1 < \left|\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right|$,

η f έχει (μοναδική) ρίζα στο U την $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow$ δεν εφαρμόζεται η Αρχή Ελαχίστου.

Προφανώς, $\min_{|z|\leq 1} |f(z)| = 0 = f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

2 Εάν $f(z)=e^{z^2}$, να βρείτε το $\min_{1\leq|z|\leq 2}|f(z)|$, καθώς κ' τα σημεία στα οποία το παραπάνω min λαμβάνεται.

<u>Λύση:</u> Θέτουμε $U=\{z\in\mathbb{C}: 1<|z|<2\}$.
Τότε,
$$\bar{U}=\{z\in\mathbb{C}: 1\leq|z|\leq 2\},$$
$$\partial U=\{z\in\mathbb{C}: |z|=1 \text{ ή } |z|=2\}.$$
f ≠ σταθερή κ' $f(z)\neq 0$, $\forall z\in \bar{U}$, οπότε,

από την Αρχή Ελαχίστου, το $m=\min_{z\in\bar{U}}|f(z)|$

λαμβάνεται <u>μόνο</u> σε σημεία του ∂U.
Τότε,
$$m=\min\left\{\min_{|z|=1}|f(z)|,\ \min_{|z|=2}|f(z)|\right\}.$$
Έστω $r>0$ κ' $z\in\mathbb{C}$ με $|z|=r$.
Τότε,
$$z=re^{i\theta}, \text{ για κάποιο } \theta\in(-\pi,\pi].$$
$$\Rightarrow |f(z)|=e^{Re(z^2)}=e^{r^2\cos(2\theta)}$$
$$\geq e^{-r^2}$$
και το "=" ισχύει μόνο για

$$\cos(2\theta)=-1 \Leftrightarrow 2\theta=\pm\pi \Leftrightarrow \theta=\pm\pi/2$$
$$\Leftrightarrow z=\pm ri.$$

Άρα, $\min_{|z|=r}|f(z)|=e^{-r^2}$ κ' το "=" λαμβάνεται μόνο για $z=\pm ri$.

Άρα,

$$\underset{1\le |z|\le 2}{\cancel{\max}\ \min} |f(z)| = \min\{e^{-1}, e^{-4}\} = e^{-4} =$$

$$= f(\pm 2i).$$

③ Έστω $U \subset \mathbb{C}$ φραγμένο πεδίο και $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ συνεχής, $f|_U \in \mathcal{H}(U)$, ώστε $f|_{\partial U}$ σταθερή. Αν η f είναι μη σταθερή, να δείξετε ότι $\exists z_0 \in U \,/\, f(z_0) = 0$.

<u>Λύση:</u> Έστω $f|_{\partial U} = c \in \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι $f(z) \neq 0,\ \forall z \in \cancel{\mathbb{C}}\ U$. Από Αρχή Μεγίστου-Ελαχίστου, παίρνουμε

$$\max_{\overline{U}} |f| = \max_{\partial U} |f| = |c|,$$

$$\min_{\overline{U}} |f| = \min_{\partial U} |f| = |c|$$

$$\Rightarrow \max_{\overline{U}} |f| = \min_{\overline{U}} |f| \Rightarrow |f| = \text{σταθερή στο } U$$

$$\Rightarrow f = \text{σταθερή}.$$

(+) M θετική σταθερά

4 Έστω πολυώνυμο

$$P(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k,\ a_k\in\mathbb{C},\ 0\leq k\leq n,\ a_n\neq 0,$$

ώστε $|P(z)|\leq M$ (+), για κάθε z με $|z|=1$.

Να δ.ο. $|P(z)|\leq M\cdot|z|^n$, για $|z|\geq 1$.

(Υπόδειξη: Να δ.ο. ∃ πολυώνυμο $Q(z)$ ώστε

$$P(z)=z^n Q(1/z),\ \forall z\neq 0.)$$

Λύση: $\forall z\neq 0$,

$$P(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0$$

$$=z^n\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_1}{z^{n-1}}+\frac{a_0}{z^n}\right).$$

Θέτουμε $Q(w)=a_0 w^n+a_1 w^{n-1}+\cdots+a_{n-1}w+a_n$, $w\in\mathbb{C}$

$\Longrightarrow$ $\underline{P(z)=z^n Q(1/z),\ \forall z\neq 0,}$

$\overset{(w=1/z)}{\Longrightarrow}$ $\underline{Q(w)=w^n P(1/w),\ \forall w\neq 0.}$

Αρχή Μεγίστου (2η εκδοχή) $\Big\}\Longrightarrow$ $\max\limits_{|w|\leq 1}|Q(w)|=$

$$=\max_{|w|=1}|Q(w)|=\max_{|w|=1}|P(1/w)|\overset{(\text{υπόθεση})}{\leq} M$$

$\Rightarrow$ για $|z|\geq 1$, $|P(z)|=|z|^n|Q(1/z)|\leq M|z|^n$.

Θεώρημα 8 (Θεμελιώδες Θεώρημα Άλγεβρας):

Κάθε μη σταθερό πολυώνυμο με συντελεστές στο $\mathbb{C}$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{C}$.

Απόδειξη: Έστω πολυώνυμο

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

όπου $a_k \in \mathbb{C}$, $0 \leq k \leq n$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$.

Ισχυρισμός: $\lim\limits_{|z|\to\infty} |P(z)| = +\infty$.

Πράγματι $\forall\ z \neq 0$,

$$|P(z)| = |z|^n \cdot \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right|$$

$$\geq |z|^n \left(|a_n| - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|z|^{n-k}} \right).$$

Για $0 \leq k \leq n-1 < n$, έχουμε

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{|z|^{n-k}} = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{|z|\to\infty} \left(|a_n| - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|z|^{n-k}} \right) = |a_n| > 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{|z|\to\infty} |P(z)| = +\infty.$$

Στη συνέχεια, υποθέτουμε αντίθετα ότι

$$P(z) \neq 0, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Τότε, $|P(0)| > 0$. Λόγω του ισχυρισμού,

$\exists R > 0 \mid \forall z \in \mathbb{C}$ με $|z| \geq R$, ισχύει

$$|P(z)| > |P(0)|.$$

Από την Αρχή του Ελαχίστου (2η εκδοχή — Θεώρημα 7) έπεται ότι

$$\min_{|z| \leq R} |P(z)| = \min_{|z| = R} |P(z)| > |P(0)|$$

$$\Longrightarrow \quad |P(0)| > |P(0)| \text{ (Άτοπο!)}. \qquad \boxtimes$$

<u>Πόρισμα 9</u>: Εάν $P(z)$ πολυώνυμο βαθμού $n \geq 1$, το $P(z)$ έχει ακριβώς n ρίζες στο $\mathbb{C}$ (<u>όχι κατ' ανάγκη διαφορετικές ανά δύο</u>).

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο n.