Άσκηση 5

Μέτρηση του συντελεστή εσωτερικής τριβής (ιξώδους) υγρού με τη μέθοδο της πτώσης μικρών σφαιρών

5.1. Σκοπός

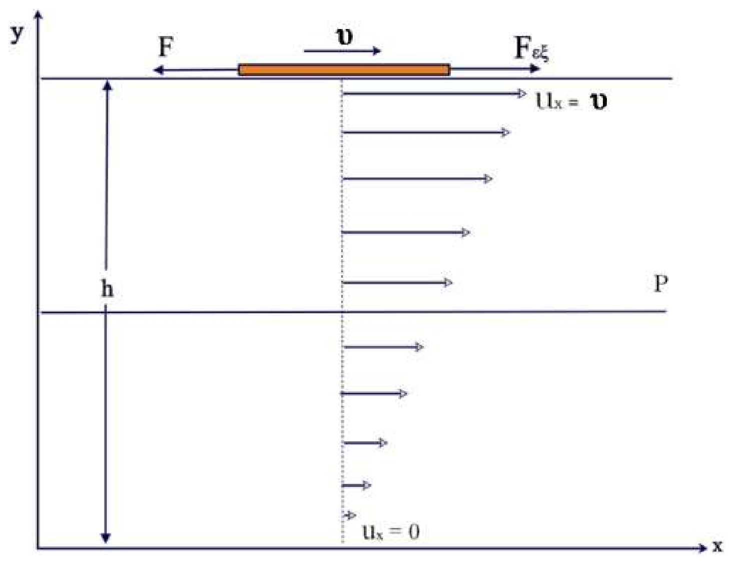
Σκοπός της άσκησης είναι η μέτρηση του ιξώδους ενός υγρού (συντελεστής εσωτερικής τριβής υγρών), με τη μέθοδο μέτρησης της ορικής ταχύτητας που αποκτούν μικρές σφαίρες καθώς πέφτουν μέσα σε ένα υγρό που ηρεμεί.

5.2. Γενικά.

Κατά τη μελέτη μακροσκοπικών συστημάτων που δεν βρίσκονται σε κατάσταση ισορροπίας μεγάλο φυσικό ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα ***φαινόμενα μεταφοράς***. Ο γενικός αυτός όρος αναφέρεται σε ένα πλήθος φαινομένων, τα οποία χαρακτηρίζονται από καθαρή μεταφορά, είτε ύλης, είτε ενέργειας, είτε ορμής σε μακροσκοπικές ποσότητες. Σε αυτά περιλαμβάνονται η μοριακή διάχυση, η θερμική αγωγιμότητα και η εσωτερική τριβή ή ιξώδες.

Η εσωτερική τριβή ή ιξώδες είναι ένα φαινόμενο που εμφανίζεται σε όλα τα άμορφα υλικά (ανεξάρτητα από τη φυσική τους κατάσταση) και καθορίζει σε μεγάλο βαθμό τις μηχανικές ιδιότητες των υλικών.

Θα εξεταστεί παρακάτω το φαινόμενο της ***εσωτερικής τριβής*** που παρατηρείται στα ρευστά (υγρά ή αέρια), όταν μία επίπεδη πλάκα κινείται πάνω στην επιφάνεια του υγρού με σταθερή ταχύτητα υ, σε *μικρό* ύψος h από τον πυθμένα (Σχ. 5.1), καθώς στην πλάκα αυτή ασκείται μια σταθερή εξωτερική δύναμη, $F_{εξ}$.



Σχήμα 5.1

Κάποια στιγμή η ταχύτητα της πλάκας θα στερεοποιηθεί. Στο βαθμό που η ταχύτητά της παραμένει σταθερή στον χρόνο, θα πρέπει να ασκείται σε αυτήν από το υγρό μια δύναμη, F, ίση και αντίθετη με την $F_{εξ}$. Αυτή είναι η ***δύναμη εσωτερικής τριβής***, η προέλευση της οποίας εξηγείται αμέσως πιο κάτω.

Τα στρώματα του υγρού που γειτονεύουν άμεσα με την πλάκα και τον πυθμένα του δοχείου αποκτούν, με καλή προσέγγιση, τις αντίστοιχες ταχύτητες ροής $U_x = V$ και $U_x = 0$, ενώ τα ενδιάμεσα στρώματα του υγρού έχουν ενδιάμεσες ταχύτητες ροής μεταξύ V και 0. Εκτός όμως από τη μεταφορική κίνηση κατά την κατεύθυνση x, υπάρχει και η θερμική κίνηση των μορίων του υγρού που, επομένως, δεν κινούνται αποκλειστικά παράλληλα προς τον πυθμένα. Θεωρούμε ένα επίπεδο P κάθετο στον άξονα y. Λόγω της θερμικής κίνησης τα μόρια θα διασχίζουν συνεχώς το επίπεδο αυτό, άλλα από πάνω προς τα κάτω και άλλα αντιστρόφως. Επίσης, κάθε μόριο έχει επιπλέον και την παράλληλη προς τον πυθμένα συνιστώσα της ορμής. Είναι φανερό ότι τα μόρια που διασχίζουν το επίπεδο P από πάνω προς τα κάτω μεταφέρουν μεγαλύτερη ορμή από εκείνα που κινούνται αντίθετα. Η ολική μεταφερόμενη ορμή είναι βέβαια παράλληλη προς την ταχύτητα ροής, δηλαδή τον άξονα x, η μεταφορά της όμως γίνεται κάθετα προς αυτήν, δηλαδή παράλληλα στον άξονα y. Ένα μόριο που κινείται προς τα πάνω κερδίζει ορμή, ενώ ένα μόριο που κινείται προς τα κάτω χάνει. Η ανταλλαγή αυτή της ορμής ισοδυναμεί με μια επιβραδυντική δύναμη που ασκούν τα χαμηλά στρώματα στα ανώτερα, με μια επιταχυντική που ασκούν τα ανώτερα στα χαμηλότερα.

Η επιβραδυντική δύναμη που δέχονται τα επιφανειακά μόρια, άρα και η ίδια η πλάκα, είναι η εφαπτομενική δύναμη, F, που τείνει να αποκαταστήσει την ισορροπία και λέγεται ***δύναμη εσωτερικής τριβής ή ιξώδους***.

Ορίζεται ως ***πυκνότητα ρεύματος ορμής***, J_p, η ποσότητα της ορμής που διασχίζει σε μονάδα του χρόνου τη μονάδα της επιφάνειας που είναι παράλληλη προς την ταχύτητα ροής του υγρού, δηλαδή στην περίπτωσή μας προς τον άξονα x.

Πειραματικά αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση που η βαθμίδα της ταχύτητας δεν είναι μεγάλη ισχύει η σχέση

$$J_p = -\eta \frac{d\upsilon_x}{dy} \tag{5.1}$$

όπου η είναι ο ***συντελεστής ιξώδους***. Το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στο ότι η μεταφορά της ορμής γίνεται προς την κατεύθυνση κατά την οποία η ταχύτητα του ρευστού ελαττώνεται.

Μονάδα μέτρησης του συντελεστή ιξώδους **στο S.I. είναι kg/m·s**, στην πράξη όμως χρησιμοποιείται η μονάδα **g/cm·s** του συστήματος **CGS,** που ονομάζεται **Poise**.

1 **kg/m·s = 10 g/cm·s**

Αποδεικνύεται ότι ο συντελεστής η εξαρτάται από τη θερμοκρασία. Στα υγρά ελαττώνεται όσο αυξάνει η θερμοκρασία, ενώ στα αέρια αυξάνει. Στον Πίνακα I δίνεται σε Poise το ιξώδες μερικών ρευστών σε διαφορετικές θερμοκρασίες.

Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ισούται με τη δύναμη που την προκαλεί και επειδή, εξ ορισμού, το J_p εκφράζει μεταβολή της ορμής ανά μονάδα χρόνου και επιφάνειας, συμπεραίνεται ότι το J_p είναι ίσο με τη δύναμη που προκαλεί τη μεταβολή της ορμής ανά μονάδα επιφάνειας. Έτσι η δύναμη της εσωτερικής τριβής δίνεται από τη σχέση:

$$F = -\eta S \frac{d\upsilon_x}{dy} \tag{5.2}$$

όπου S στην περίπτωσή μας είναι το εμβαδόν της επιφάνειας επαφής της πλάκας με το υγρό.

Πίνακας Ι
Συντελεστές ιξώδους, η, σε Poise

T (°C)	νερό	καστορέλαιο	αέρας
0	1,792 x 10^{-2}	53	1,71 x 10^{-4}
20	1,005 x 10^{-2}	9,86	1,81 x 10^{-4}
40	0,656 x 10^{-2}	2,31	1,90 x 10^{-4}
60	0,469 x 10^{-2}	0,80	2 ,00 x 10^{-4}
100	0,284 x 10^{-2}	0,17	2,18 x 10^{-4}

Τονίζεται ότι η F είναι ανάλογη, όχι προς την υ_x αλλά προς την $d\upsilon_x/dy$ που εκφράζει τη μεταβολή της υ_x ανά μονάδα μήκους, κάθετα στην κίνηση. Στην απλουστευμένη περίπτωση όπου το βάθος h είναι μικρό, η μεταβολή της υ_x είναι γραμμική. Επομένως $d\upsilon_x/dy_y=\upsilon/h$, οπότε (Σχ. 5.1)

$$J_p = -\frac{\eta\upsilon}{h} \qquad \text{και} \qquad F = -\frac{\eta\upsilon S}{h}$$

Είναι φανερό ότι για να κινηθεί η πλάκα με σταθερή ταχύτητα, υ, απαιτείται η κατανάλωση ισχύος

$$P = F_{\varepsilon\xi}\upsilon = \frac{\eta\upsilon^2 S}{h} \tag{5.3}$$

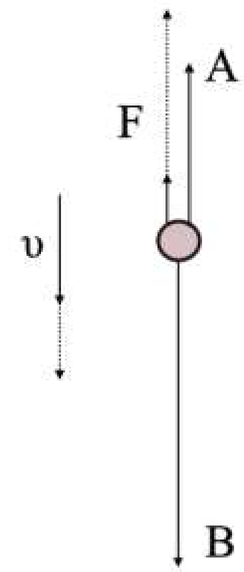
5.3. Μέθοδος

Η ίδια γενικά εικόνα με αυτήν που περιγράφηκε πιο πάνω ισχύει και κατά την κίνηση σώματος, όταν ένα μακροσκοπικό αντικείμενο κινείται μέσα σε ρευστό που ηρεμεί. Πάνω στο αντικείμενο ασκείται μια επιβραδυντική δύναμη F, η οποία για μικρές ταχύτητες του αντικειμένου υ, είναι με καλή προσέγγιση ανάλογη αυτής της ταχύτητας και δίνεται από τη σχέση $F = -K\eta\upsilon$. Ο συντελεστή K εξαρτάται από το σχήμα του σώματος. Για σφαίρα μικρής ακτίνας r αποδεικνύεται ότι $K = 6\pi r$, οπότε

$$F = -6\pi\eta r\upsilon \tag{5.4}$$

Η Εξ. (5.4) είναι γνωστή ως νόμος του Stokes και ισχύει στην περίπτωση όπου σφαίρα ***μικρής*** ακτίνας r κινείται με μικρή ταχύτητα μέσα σε υγρό που βρίσκεται σε δοχείο ***απείρων διαστάσεων***.

Όταν μια σφαίρα πέφτει μέσα στο υγρό υπόκειται σε τρεις δυνάμεις: το βάρος της $B = \rho_\sigma gV$, την άνωση $A = \rho_\upsilon gV$ και τη δύναμη της τριβής $F = -6\pi\eta r\upsilon$, όπως φαίνεται στο Σχ. 5.2. Εδώ ρ_σ και ρ_υ είναι οι πυκνότητες της σφαίρας και του υγρού αντίστοιχα, V ο όγκος της σφαίρας και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.



Σχήμα 5.2

Η εξίσωση κίνησης της σφαίρας είναι:

$$m\,\frac{d\upsilon}{dt} = \rho_\sigma V g - \rho_\upsilon V g - 6\pi\eta r \upsilon \tag{5.5}$$

Και επειδή $m = V\rho_\sigma$ και $V = (4/3)\pi r^3$, έχουμε:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{\rho_\sigma - \rho_\upsilon}{\rho_\sigma} g - \frac{6\pi\eta r\upsilon}{\rho_\sigma V} \tag{5.6}$$

ή

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{\rho_\sigma - \rho_\upsilon}{\rho_\sigma} g - \frac{9}{2r^2}\frac{\eta\upsilon}{\rho_\sigma} \tag{5.7}$$

Είναι φανερό ότι αρχικά η σφαίρα επιταχύνεται. Καθώς όμως αυξάνεται η ταχύτητα αυξάνεται και η αντίσταση του υγρού και θα φθάσει κάποια στιγμή που οι ασκούμενες στη σφαίρα δυνάμεις θα έχουν μηδενική συνισταμένη, οπότε $d\upsilon/dt = 0$ και το σώμα θα κινείται με σταθερή οριακή (ορική) ταχύτητα

$$\upsilon_{o\rho} = \frac{\rho_\sigma - \rho_\upsilon}{\eta}\frac{2r^2 g}{9} \tag{5.8}$$

Η Εξ. (5.7) γράφεται

$$\beta\frac{d\upsilon}{dt} = \upsilon_{o\rho} - \upsilon \tag{5.9}$$

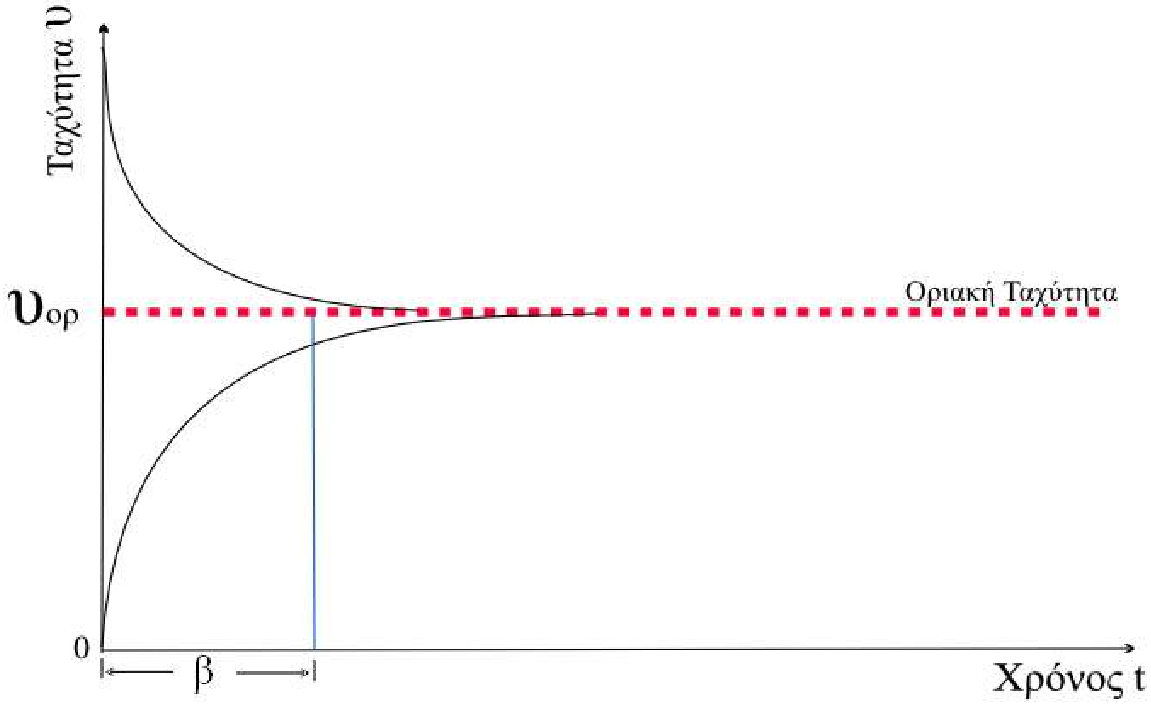
Όπου

$$\beta = \frac{2r^2\rho_\sigma}{9\eta} \tag{5.10}$$

Η λύση της (5.9) είναι

$$\upsilon = \upsilon_{o\rho}(1 - e^{-t/\beta}) \tag{5.11}$$

η γραφική παράσταση της οποίας φαίνεται στο Σχ. 5.3, όπου αποτυπώνεται η εξέλιξη της ταχύτητας για δύο ξεχωριστές περιπτώσεις. Η επάνω καμπύλη αντιστοιχεί σε σφαίρα που εισέρχεται στο υγρό με αρχική ταχύτητα μεγαλύτερη της $\upsilon_{\text{ορ}}$, ενώ η κάτω καμπύλη για τη σφαίρα που εισέρχεται με μηδενική ταχύτητα.



Σχήμα 5.3

Στη σχέση (5.11) ο εκθετικός όρος μειώνεται και κάποτε γίνεται αμελητέος. Έτσι η ταχύτητα σταθεροποιείται σε μια τιμή $\upsilon_{o\rho}$, ύστερα από χρόνο ίσο με *μερικές φορές* τον ***χρόνο αποκατάστασης***, *β* (ανάλογα με την ακρίβεια των οργάνων).

Είναι προφανές ότι αν μετρηθεί η ορική ταχύτητα της σφαίρας που πέφτει στο υγρό, είναι δυνατόν να υπολογιστεί το *η*, από την Εξ. (5.8) που μπορεί να γραφτεί σε μορφή

$$\eta = \frac{2}{9}\frac{r^2(\rho_\sigma - \rho_\upsilon)}{\upsilon_{o\rho}} g \qquad (5.12)$$

Στις μετρήσεις που θα γίνουν θα υποτεθεί ότι πληρούνται οι προϋποθέσεις που απαιτούνται για να ισχύει η σχέση (5.12). Όταν η ροή ρευστού παύει να είναι στρωτή και γίνεται τυρβώδης, η δύναμη τριβής *F* εξαρτάται πιο πολύπλοκα από την ταχύτητα για μεγάλες ταχύτητες.

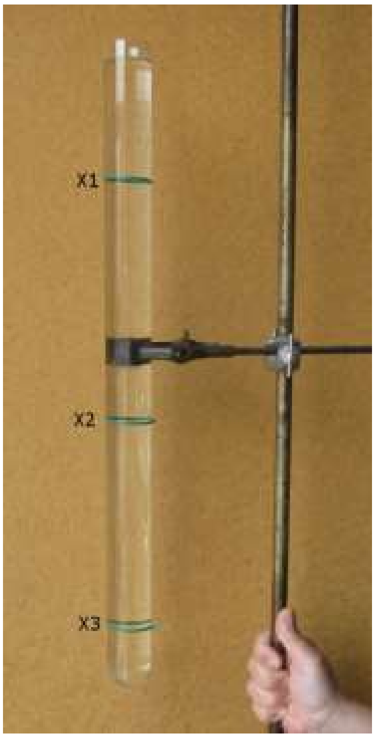
Η αντίσταση την οποία συναντά η σφαίρα κατά την πτώση της εξαρτάται από την μορφή της ροής, η οποία εξαρτάται από την τιμή του αριθμού Reynolds (Re). Ο αριθμός Reynolds (Re) ο οποίος είναι καθαρός αριθμός και η τιμή του είναι σταθερή για όλες τις μηχανικά όμοιες ροές, δίνεται από την Εξ.

$$\mathrm{Re} = \frac{\upsilon d \rho_\upsilon}{\eta} \qquad (5.13)$$

όπου υ είναι η ταχύτητα της σφαίρας, d η διάμετρός της, ρ_υ η πυκνότητα του υγρού και η ο συντελεστής εσωτερικής τριβής.

5.4. Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη περιλαμβάνει



:

Σχήμα 5.4

- **Πυκνόμετρο και θερμόμετρο** για τη μέτρηση της πυκνότητας και της θερμοκρασίας του υγρού, αντίστοιχα
- **μικρές σφαίρες** από σίδηρο
- **χρονόμετρο** για τη μέτρηση του χρόνου
- **υποδεκάμετρο** για τη μέτρηση των αποστάσεων μεταξύ των χαραγών
- **μικρόμετρο** για τη μέτρηση των διαμέτρων των σφαιρών
- και **γυάλινο σωλήνα** που περιέχει το μελετούμενο υγρό (γλυκερίνη)

Στον σωλήνα υπάρχουν τρεις χαραγές: η x_1, η x_2 και η x_3 όπως φαίνεται στο Σχ. 5.4.

Βιβλιογραφία

1. M. Alonso και E.J. Finn. *Θεμελιώδης Πανεπιστημιακή Φυσική*. Τόμος 1: *Μηχανική και Θερμοδυναμική*, Παράγρ. 7.8, 7.9, 15.1, 15.4, 15.7 (Αθήνα 1981).
2. *Μαθήματα Φυσικής Berkeley*. Τόμος 5: *Στατιστική Φυσική*, Παράγρ. 8.1, 8.2. (Αθήνα 1978).
3. Α. Παπαϊωάννου, *Μηχανική των ρευστών*, Τόμος Ι, Εκδόσεις Γκελμπέσης.
4. *Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής*, Τόμος Ι, ΕΜΠ, Τομέας Φυσικής, ΣΕΜΦΕ, Εκδόσεις Συμμετρία (Αθήνα, 2010).

5.5. Εκτέλεση

1. Μετρήστε τις αποστάσεις S_1 μεταξύ των χαραγών x_1 και x_2, S_2 μεταξύ των χαραγών x_2 και x_3 και S μεταξύ των χαραγών x_1 και x_3. Ρίξτε μια σφαίρα στο υγρό, όσο γίνεται πιο κοντά στο κέντρο του σωλήνα. Μετρήστε τον χρόνο που κάνει η σφαίρα να διανύσει τις αποστάσεις S_1 και S_2 (φροντίστε να αποφύγετε το σφάλμα παράλλαξης) και υπολογίστε τις δύο μέσες ταχύτητες για τα δύο αυτά διαστήματα. Ελέγξτε αν είναι περίπου ίδιες. Εάν ‘‘ναι’’, τότε σε όλο το διάστημα S η σφαίρα κινείται με σταθερή ταχύτητα, που είναι η «Ορική».

2. Μετρήστε την πυκνότητα ρ_υ και τη θερμοκρασία του υγρού.

3. Ζυγίστε μαζί 10 σφαίρες

4. Μετρήστε την ακτίνα r_1 μιας σφαίρας, ρίξτε τη σφαίρα στο υγρό και μετρήστε τον χρόνο t_1 που χρειάζεται να διανύσει την απόσταση S μεταξύ των χαραγών x_1 και x_3.

5. Επαναλάβετε το βήμα 4 και για τις υπόλοιπες 9 σφαίρες. Καταχωρήστε τα αποτελέσματα στον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας ΙΙ

i	r_i (cm)	t_i (s)	υ_i (cm/s)
1			
2			
….			
10			

5.6. Επεξεργασία των μετρήσεων

Η ανάλυση που ακολουθεί βασίζεται στο γεγονός ότι οι διαφορές στις ακτίνες των 10 σφαιρών είναι σχετικά μικρές, δηλαδή της τάξης του 1%.

1. Για κάθε σφαίρα υπολογίστε την ορική ταχύτητα $\upsilon_i = S/t_i$ και σημειώστε τα αποτελέσματα στον Πίνακα ΙΙ.

2. Υπολογίστε τις μέσες τιμές και τα σφάλματα των ακολούθων μεγεθών:

(α) της ακτίνας των σφαιρών, $\bar{r} \pm \delta r$

(β) της ορικής ταχύτητας, $\overline{\upsilon_{o\rho}} \pm \delta\upsilon_{o\rho}$

3. Υπολογίστε την πυκνότητα ρ_σ των σφαιρών από τη σχέση $\rho_\sigma = {m_{o\lambda}}/{V_{o\lambda}}$

όπου για 10 σφαίρες είναι $V_{o\lambda} = 10 \times (4/3) \cdot \pi \cdot \bar{r}^3$ Δώστε το αποτέλεσμα σε μορφή $\rho_\sigma \pm \delta\rho_\sigma$. (Αγνοήστε το σφάλμα, δr, της ακτίνας των σφαιρών).

4. Συμπληρώστε στον παρακάτω **πίνακα ΙΙΙ** τις τιμές των μεγεθών, καθώς και το απόλυτο και σχετικό σφάλμα τους.

Πίνακας ΙΙΙ

Μέγεθος	**Τιμή**	**Απ. Σφάλμα**	**Σχ. Σφάλμα(%)**
$\boldsymbol{m}$ μάζα σφαίρας			
$\boldsymbol{r}$ ακτίνα σφαίρας			
$\boldsymbol{\rho_\sigma}$ πυκνότητα σφαίρας			
$\boldsymbol{\rho_\upsilon}$ πυκνότητα υγρού			
$\boldsymbol{\upsilon_{o\rho}}$ ορική ταχύτητα			

5. Υπολογίστε από την Εξ. (5.12) τον συντελεστή ιξώδους, η, του υγρού, όπως και το σφάλμα του, $\delta\eta$. Στον υπολογισμό του $\delta\eta$ λάβετε υπόψη μόνον εκείνο ή εκείνα τα μεγέθη τα οποία, σύμφωνα με τον Πίνακα ΙΙΙ, θα συνεισφέρουν σημαντικά στο σφάλμα της τελικής τιμής. Δίνεται το g = 980 cm/s^2.