Άσκηση 4

Προσδιορισμός του μέτρου στρέψης υλικού με τη μέθοδο του στροφικού εκκρεμούς

4.1. Σκοπός

Σκοπός της άσκησης είναι ο προσδιορισμός του μέτρου στρέψης υλικού με τη μέθοδο του στροφικού εκκρεμούς.

4.2. Εισαγωγή

4.2.1. Τα μέτρα ελαστικότητας των στερεών

Ένα σώμα υπό την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων παραμορφώνεται. Οι παραμορφώσεις αυτές, εφ' όσον δεν υπερβαίνουν ορισμένα όρια, παύουν να υπάρχουν αμέσως μόλις πάψουν να επιδρούν οι δυνάμεις, οπότε το σώμα επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση. Τέτοιου είδους παραμορφώσεις ονομάζονται ***ελαστικές.***

Η ελαστικότητα ενός σώματος εκδηλώνεται:
(α) κατά τον εφελκυσμό και θλίψη,
(β) κατά τη διάτμηση και στρέψη,
(γ) κατά την ομοιόμορφη συμπίεση από όλες τις διευθύνσεις.

Κάθε είδος παραμόρφωσης χαρακτηρίζεται από ένα μέγεθος που εξαρτάται από το υλικό.

Η ελαστικότητα ενός σώματος διέπεται από τον θεμελιώδη νόμο του Hooke. Κατά τον νόμο αυτόν οι ελαστικές παραμορφώσεις που αναπτύσσονται σε ένα σώμα είναι ανάλογες των εξωτερικών δυνάμεων που τις προκαλούν, εφ' όσον αυτές είναι μικρές. Είναι σκόπιμο τα τρία είδη παραμορφώσεων να μελετηθούν χωριστά.

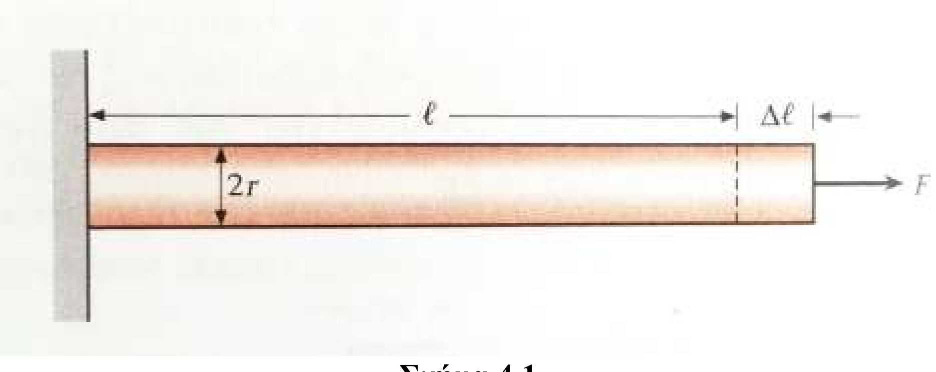
(α) Εφελκυσμός

Έστω μια ράβδος με μήκος l και διάμετρο $2r << l$, το αριστερό άκρο της οποίας είναι στερεωμένο, όπως φαίνεται στο Σχ. 4.1.

Η ράβδος δέχεται την επίδραση μιας δύναμης F κατά μήκος του άξονά της. Κατά τον εφελκυσμό, ο νόμος του Hooke έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha \frac{F}{S} \tag{4.1}$$

όπου Δl είναι η επιμήκυνση της ράβδου και S το εμβαδόν της διατομής της.



Σχήμα 4.1.

Η Εξ. (4.1) δηλώνει ότι η σχετική επιμήκυνση, $\Delta l/l$, είναι ανάλογη προς την τάση, F/S, που την προκαλεί.

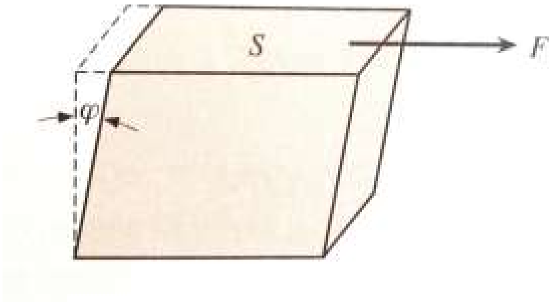
Στη σχέση 4.1, ο συντελεστής α ονομάζεται ***συντελεστής εφελκυσμού του υλικού*** της ράβδου, ενώ το μέγεθος $E = 1/\alpha$ είναι γνωστό ως **μέτρο ελαστικότητας** ή **μέτρο του Young**.

(β) Διάτμηση και στρέψη

Κατά τη διάτμηση (Σχ. 4.2), σύμφωνα με το νόμο του Hooke, έχουμε

$$\varphi = \beta \frac{F}{S} \tag{4.2}$$

δηλαδή η γωνία διάτμησης, φ, είναι ανάλογη προς τη διατμητική τάση, F/S.



Σχήμα 4.2.

Στη σχέση 4.2, β είναι ο ***συντελεστής διάτμησης*** *ή* ***στρέψης*** του υλικού, ενώ το αντίστροφό του G=l/β είναι γνωστό ως **μέτρο διάτμησης ή στρέψης.**

(γ) Ομοιόμορφη συμπίεση

Κατά την ομοιόμορφη συμπίεση του σώματος από όλες τις διευθύνσεις, ο νόμος του Hooke έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \Delta p \tag{4.3}$$

όπου V είναι ο όγκος του σώματος, ΔV η μεταβολή του όγκου, που οφείλεται στη μεταβολή Δp στην πίεση, και κ ο ***συντελεστής ελαστικότητας όγκου***, ενώ το μέγεθος $B = 1/\kappa$ ονομάζεται **μέτρο ελαστικότητας όγκου**.

Λόγος του Poisson. Για ράβδο με σχετικά μεγάλη διάμετρο, μπορεί κανείς να παρατηρήσει τη μεταβολή της εγκάρσιας διατομής της, Δd, που συνοδεύει την επιμήκυνσή της κατά Δl, (Σχ. 4.3).

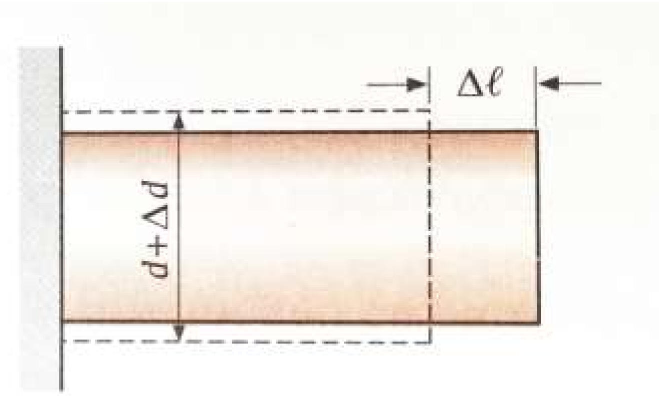
Για μικρές παραμορφώσεις η σχετική μεταβολή της εγκάρσιας διατομής είναι ανάλογη προς τη σχετική επιμήκυνση, δηλαδή:

$$\frac{\Delta d}{d} = -\mu \frac{\Delta l}{l} \tag{4.4}$$

Ο λόγος

$$\mu = -\frac{\Delta d/d}{\Delta l/l} \tag{4.5}$$

είναι γνωστός ως ***λόγος του Poisson***.



Σχήμα 4.3.

Ο συντελεστής εφελκυσμού, α, ο συντελεστής διάτμησης, β, και ο λόγος του Poisson, μ, συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση:

$$\beta = 2\alpha(1+\mu) \tag{4.6}$$

Επομένως για τα ισότροπα σώματα αρκεί να γνωρίζουμε τους δύο από τους τρεις αυτούς συντελεστές.

4.2.2. Η κατευθύνουσα ροπή σύρματος

Έστω ένα σύρμα μήκους l και ακτίνας r, το ένα άκρο του οποίου είναι πακτωμένο ενώ στο άλλο του άκρο ασκείται ροπή στρέψης, M. Η γωνία στρέψης, φ, του ελεύθερου άκρου είναι ανάλογη της ροπής στρέψης και ισχύει η σχέση

$$M = D\varphi \tag{4.7}$$

όπου ο συντελεστής D είναι γνωστός ως κατευθύνουσα ροπή του σύρματος, από το υλικό και τις διαστάσεις του οποίου και εξαρτάται.

Για τον υπολογισμό του D, συναρτήσει των διαστάσεων του σύρματος και του μέτρου στρέψης, G, του υλικού, το σύρμα θεωρείται ότι αποτελείται από πολλούς πολύ λεπτούς κυλινδρικούς χιτώνες. Ας θεωρήσουμε έναν τέτοιο χιτώνα με ακτίνα x και πάχος dx (Σχ. 4.4).

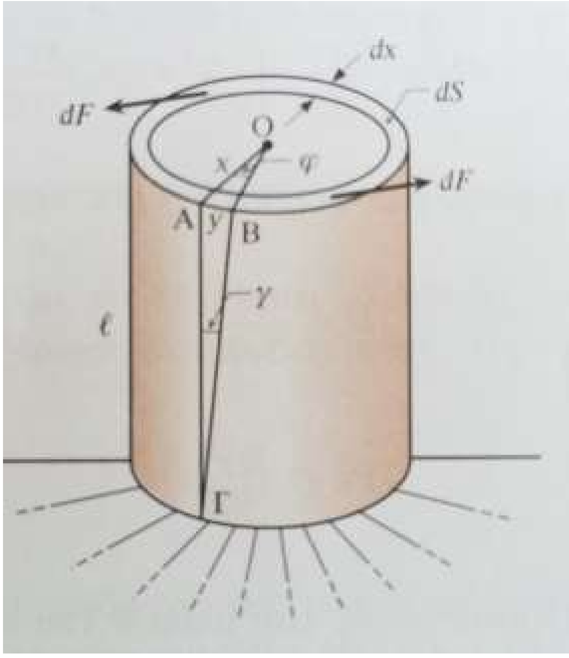
Αν στο ελεύθερο άκρο του ασκηθεί ζεύγος δυνάμεων dF, που ισοδυναμεί με ροπή στρέψης dM = 2xdF, τότε αυτό το άκρο θα στραφεί κατά γωνία φ, που ισοδυναμεί με στροφή της γενέτειρας ΓΑ κατά τη γωνία γ.

Σύμφωνα με το νόμο του Hooke (Εξ. 4.2), η γωνία γ δίνεται από τη σχέση

$$\gamma = \beta\frac{2dF}{dS} = \beta\frac{dM}{xdS} = \beta\frac{dM}{2\pi x^2 dx} \tag{4.8}$$

Για μικρές γωνίες, γ, το τόξο AB είναι

$$AB = y = l\gamma = x\varphi \tag{4.9}$$



Σχήμα 4.4.

και επομένως

$$\gamma = \frac{x\varphi}{l} \tag{4.10}$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (4.10) στην (4.8), παίρνουμε

$$dM = \frac{2\pi x^3 \varphi dx}{l\beta} \tag{4.11}$$

Για όλους τους χιτώνες με ακτίνες μεταξύ $x = 0$ και $x = r$, η γωνία στρέψης, φ, έχει την ίδια τιμή και επομένως η ολική ροπή που απαιτείται για τη στρέψη του σύρματος είναι

$$M = \int_0^M dM = \frac{2\pi\varphi}{l\beta}\int_0^r x^3 dx = \frac{\pi r^4}{2l\beta}\varphi \tag{4.12}$$

Η κατευθύνουσα ροπή του σύρματος, $D = M/\varphi$, είναι

$$D = \frac{\pi r^4}{2l\beta} \tag{4.13}$$

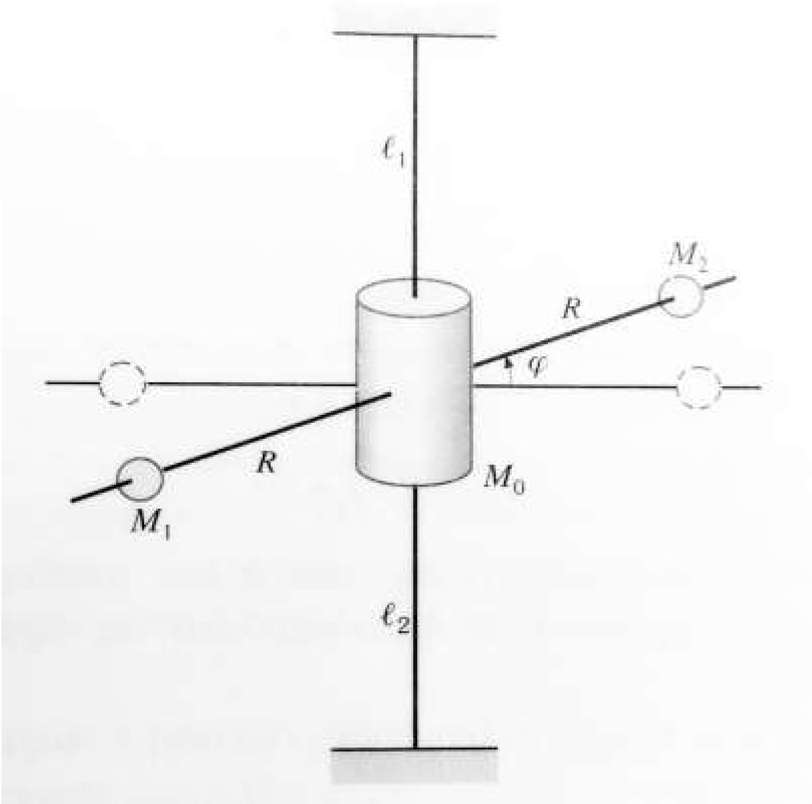
ή τελικά

$$D = G\frac{\pi r^4}{2l} \tag{4.14}$$

όπου G το μέτρο στρέψης του υλικού του σύρματος.

4.3. Μέθοδος

Από την Εξ. (4.14) προκύπτει ότι, αν προσδιοριστεί πειραματικά η κατευθύνουσα ροπή της σύρματος με γνωστές διαστάσεις, εύκολα υπολογίζεται το μέτρο στρέψης του υλικού του σύρματος.



Σχήμα 4.5.

Έτσι, αν το σύστημα του Σχ. 4.5, στο οποίο ένα αξονικά συμμετρικό στερεό σώμα είναι συνδεδεμένο με το σύρμα που μελετάται έτσι ώστε ο άξονάς του να συμπίπτει με το σύρμα, στραφεί κατά γωνία φ από τη θέση ισορροπίας, η ροπή επαναφοράς που ασκεί το σύρμα είναι

$$M = -D\varphi \tag{4.15}$$

όπου το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι η φορά της M είναι αντίθετη της γωνίας στρέψης, φ.

Αν το σώμα αφεθεί να εκτελέσει ελεύθερες στροφικές ταλαντώσεις, η διαφορική εξίσωση που διέπει αυτές της ταλαντώσεις είναι

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M \tag{4.16}$$

που σημαίνει ότι το γινόμενο της ροπής αδράνειας, I, του σώματος επί την γωνιακή του επιτάχυνση $\mathrm{d}^2\varphi/\mathrm{d}t^2$ είναι ίσο με τη ροπή, M, που ασκεί το σύρμα πάνω στο σώμα. Επομένως από της Εξ. (4.15) και (4.16), προκύπτει ότι

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} + D\varphi = 0 \tag{4.17}$$

ή

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\omega^2\varphi=0 \tag{4.18}$$

όπου

$$\omega=\sqrt{\frac{D}{I}} \tag{4.19}$$

είναι η γωνιακή συχνότητα των απλών αρμονικών στροφικών ταλαντώσεων. Η λύση της Εξ. (4.18) έχει τη μορφή

$$\varphi=\varphi_0\cos(\omega t+\theta) \tag{4.20}$$

όπου φ_0 είναι το πλάτος της ταλάντωσης και θ μια σταθερά, γνωστή ως ***σταθερά φάσης***. Τα φ_0 και θ εξαρτώνται από της αρχικές συνθήκες του συστήματος.

Ο χρόνος για μια πλήρη ταλάντωση, δηλαδή η περίοδος, T, είναι

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \tag{4.21}$$

από τον προσδιορισμό της οποίας και τη γνωστή τιμή της ροπής αδρανείας, I, υπολογίζεται η D και επομένως και η G.

Στην πράξη, επειδή το σύστημα ανάρτησης του σώματος έχει περίπλοκο γεωμετρικό σχήμα και ο υπολογισμός της ολικής ροπής αδράνειας, I, είναι πολύ δύσκολος, θα χρησιμοποιηθεί μια μέθοδος εύρεσης του D η οποία δεν απαιτεί γνώση του I.

Το περιστρεφόμενο σώμα αποτελείται από μια οριζόντια ράβδο και το σύστημα ανάρτησής της στα σύρματα (Σχ. 4.5).

Δύο όσο το δυνατό πανομοιότυπες μάζες M_1 και M_2 τοποθετούνται πάνω στη ράβδο, συμμετρικά ως της τον άξονα περιστροφής και σε απόσταση R από αυτόν.

Αν I_0 είναι η ροπή αδράνειας του σώματος (χωρίς της μάζες M_1 και M_2), ως προς τον άξονα του σύρματος, I_1 και I_2 είναι οι ροπές αδράνειας των M_1 και M_2 αντίστοιχα, ως προς άξονες παράλληλους προς το σύρμα που περνάνε από τα κέντρα μάζας της, τότε η ολική ροπή αδράνειας του συστήματος είναι σύμφωνα με το θεώρημα των παραλλήλων αξόνων (Steiner),

$$I=I_0+I_1+I_2+M_1R^2+M_2R^2 \tag{4.22}$$

Αν $M_1 = M_2$ και $M_1 + M_2 = M$, ενώ $I_0 + I_1 + I_2 = I'$, τότε από την Εξ. (4.21), που μπορεί να γραφεί και ως

$$\frac{T^2}{4\pi^2}=\frac{I}{D} \tag{4.23}$$

προκύπτει τελικά ότι

$$\frac{T^2}{4\pi^2}=\frac{I'}{D}+\frac{M}{D}R^2 \tag{4.24}$$

και επομένως η γραφική παράσταση του μεγέθους $y = T^2/4\pi^2$ ως συνάρτησης του $x = R^2$ είναι ευθεία, με κλίση M/D, που τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $y = I'/D$.

Η μέτρηση της περιόδου των στροφικών ταλαντώσεων για διάφορες τιμές της απόστασης, R, κάνει δυνατό τον προσδιορισμό του D και επομένως και του G.

4.4. Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη αποτελείται από δύο όμοια σύρματα, των οποίων το G θέλουμε να προσδιορίσουμε και μια οριζόντια ράβδο (οδηγό) στερεωμένη συμμετρικά ως προς τον άξονα περιστροφής, όπως φαίνεται στο Σχ. 4.5. Δύο, όσο το δυνατόν όμοιες μάζες M_1 και M_2 μπορούν να στερεωθούν πάνω στη ράβδο, σε διάφορες αποστάσεις από το σύρμα. Οι περίοδοι των στροφικών ταλαντώσεων μετρούνται με τη βοήθεια χρονομέτρου. Οι μάζες M_1 και M_2 μπορούν να αφαιρεθούν από τους οδηγούς για να ζυγιστούν.

Βιβλιογραφία

1. Κ. Δ. Αλεξόπουλος. Γενική Φυσική. Τόμος 1: Μηχανική – Ακουστική. (Αθήνα, 1953). Κεφ. 12, 10.
2. *Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής*, Τόμος Ι, ΕΜΠ, Τομέας Φυσικής, ΣΕΜΦΕ, Εκδόσεις Συμμετρία (Αθήνα, 2010).

4.5. Εκτέλεση

1. Μετρήστε τα μήκη l_1 και l_2 των δύο συρμάτων της συσκευής καθώς και τη διάμετρό τους $2r$.
2. Αφαιρέστε τις δύο μάζες από τους οδηγούς τους και ζυγίστε τις ξεχωριστά και βρείτε την ολική τους μάζα M.
3. Τοποθετήστε πάλι τις μάζες στους οδηγούς τους σε ίσες αποστάσεις R από τον άξονα περιστροφής και προκαλώντας στροφικές ταλαντώσεις στο σύστημα, μετρήστε τον χρόνο για 10 πλήρεις ταλαντώσεις, προσδιορίζοντας έτσι την περίοδο, T, της ταλάντωσης.
4. Επαναλάβετε τη διαδικασία για 10 συνολικά διαφορετικές αποστάσεις R, καταγράφοντας τις μετρήσεις σας στον πίνακα:

Α/Α	R (m)	$10T$ (s)	T (s)	$x = R^2$ (m^2)	$y = T^2/4\pi^2$ (s^2/rad^2)
1					
2					
3					
…					

4.6. Επεξεργασία των μετρήσεων

1. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση του $y = T^2/4\pi^2$ ως συνάρτηση του $x = R^2$.
2. Αποφασίστε αν κάποιο πειραματικό σημείο απέχει πολύ από την αναμενόμενη ευθεία, ώστε να πρέπει να αγνοηθεί στην επεξεργασία που θα ακολουθήσει.
3. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για να βρείτε την καλύτερη ευθεία $y = a + bx$ που αντιστοιχεί στα πειραματικά σημεία.
4. Από την κλίση της ευθείας και το σφάλμα της, $b \pm \delta b$, όπως προκύπτουν από τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, και από τη συνολική μάζα, M, υπολογίστε την κατευθύνουσα ροπή του σύρματος $D \pm \delta D$, δεδομένου ότι $D = M/b$.
5. Από την Εξ. (4.14) και τα γνωστά D, r και l, υπολογίστε το μέτρο στρέψης $G \pm \delta G$ του υλικού του σύρματος. Λάβετε υπόψη ότι η Σχ. (4.14) αναφέρεται *σε ένα σύρμα* του οποίου το ένα άκρο είναι πακτωμένο και το άλλο ελεύθερο, ενώ στη συσκευή που χρησιμοποιήθηκε υπήρχαν δύο τέτοια σύρματα, και συνεπώς η πειραματικά μετρούμενη κατευθύνουσα ροπή, D, είναι το άθροισμα των κατευθυνουσών ροπών των 2 συρμάτων.