ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Ανασκόπηση στοιχείων

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

Εργαστήριο Συστημάτων Τεχνητής Νοημοσύνης και Μάθησης
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Τανυστές

- Τανυστές μηδενικής τάξης - Βαθμωτά (Scalars)
  - ένας μόνο αριθμός ($s \in \Re$)

- Τανυστές πρώτης τάξης - Διανύσματα (Vectors)
  - μονοδιάστατος πίνακας όπου $x_1 .. x_n \in \Re$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

- Τανυστές δεύτερης τάξης - Πίνακες (Matrices)
  - δισδιάστατοι πίνακες, με $a_{11} ... a_{nn} \in \Re$
    και

$$A \in \Re^{mxn}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Τανυστές μεγαλύτερης από 2ης τάξης - Τανυστές (Tensors)
  - πολυδιάστατοι πίνακες π.χ. 3ης τάξης όπου $b_{111} ... b_{kmn} \in \Re$
    και $B \in \Re^{kxmxn}$

Ανάστροφο διάνυσμα x^T και πίνακας A^T

- Ορίζουμε τον **ανάστροφο (transpose) του διανύσματος x** και συμβολίζουμε **x^T**, ως τον πίνακα γραμμή N θέσεων με στοιχεία:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$x^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & .. & x_n \end{bmatrix}$$

- Ορίζουμε τον **ανάστροφος πίνακα του πίνακα** $A = (a_{ij}) \in M_{mxn}$ και συμβολίζουμε **A^T**, ως τον πίνακα που προκύπτει από τον A με εναλλαγή μεταξύ γραμμών και στηλών του:

$$(\mathbf{A}^T)_{i,j} = (\mathbf{A})_{j,i} \quad ,$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \end{bmatrix}$$

Κύρια διαγώνιος

Ανάστροφος πίνακας A^T

Παραδείγματα

$$A=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}_{mxn}$$

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -6 \\ -4 & 3 & 0 \\ -1 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{4x3}$$

$$A^T=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}_{nxm}$$

$$C^T=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & 8 \\ -1 & -6 & 0 & 9 \end{bmatrix}_{3x4}$$

Ιδιότητες

$$(A^T)^T = A$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Τετραγωνικοί Πίνακες

Ένας πίνακας A είναι **<u>τετραγωνικού τύπου n</u>** όταν έχει διάσταση **nxn**

π.χ. $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ είναι τετραγωνικού τύπου 2

Διαγώνιοι Πίνακες

Ένας πίνακας **$A \in R^{n \times n}$** ονομάζεται **<u>διαγώνιος πίνακας</u>**, αν και μόνο αν $a_{ij}=0$ όταν $i \neq j$

δηλαδή όλα τα στοιχεία <u>έξω από την κύρια διαγώνιο</u> είναι 0

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

Μοναδιαίος Πίνακας Τύπου n, I_n

Ένας διαγώνιος πίνακας **$I \in R^{n \times n}$** ονομάζεται **<u>μοναδιαίος πίνακας</u>** αν και μόνο αν

$$(I_n)_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ για } i=j \\ 0, \text{ για } i \neq j \end{cases}$$

Ίχνος Τετραγωνικού Πίνακας

Έστω $A \in R^{n \times n}$, τότε το **<u>ίχνος του A</u>** ορίζεται ως : $tr(A) = trace(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \ldots a_{nn}$

δηλαδή ίσο με το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου.

Κάτω Τριγωνικός Πίνακας

Ένας πίνακας **A∈ R**$^{n\times n}$ ονομάζεται **<u>κάτω τριγωνικός</u>** αν και μόνο αν a_{ij} =0 όταν i<j , δηλαδή όλα τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι 0

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Άνω Τριγωνικός Πίνακας

Ένας πίνακας **A∈ R**$^{n\times n}$ ονομάζεται **<u>άνω τριγωνικός</u>** αν και μόνο αν a_{ij} =0 όταν i>j , δηλαδή όλα τα στοιχεία κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι 0

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Αντίστροφος πίνακας

Ο πίνακας **$A \in R^{n\times n}$** είναι **<u>αντιστρέψιμος</u>** εάν υπάρχει ένας πίνακας **$B \in R^{n\times n}$** έτσι ώστε

$B \cdot A = I$ και **$A \cdot B = I$**, όπου **I** είναι nxn μοναδιαίος πίνακας.

Υπάρχει το πολύ ένας τέτοιος **B** και λέγεται **<u>αντίστροφος</u>** του **A** και συμβολίζεται με **A^{-1}** : $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

→ Οπότε, για να είναι ο πίνακας **$A \in R^{n\times n}$** αντιστρέψιμος θα πρέπει η ορίζουσά του είναι διάφορη του 0 : **$\det A \neq 0$**

Ιδιότητες

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$$

Αντίστροφος πίνακας

Παράδειγμα 1.1 **(Υπαρξη αντιστρόφου πίνακα 2x2)** Θεωρούμε έναν πίνακα $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2x2}$. Αν τον πολλαπλασιάσουμε με τον πίνακα $B = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2x2}$
τότε θα έχουμε $= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\mathbf{I}$
Τότε ο αντίστροφος $^{-1}$ του πίνακα θα είναι ο

$$A^{-1} = \frac{1}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

αν και μόνο αν $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \neq 0$ (όπου $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ είναι η ορίζουσα του πίνακα A. Μπορούμε να χρησιμοποιούμε την ορίζουσα ενός πίνακα για να αποφανθούμε αν αυτός είναι αντιστρέψιμος.

- Εάν Α = [α] τότε A^{-1} = [1/α]
- Εάν $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ και $ad - bc \neq 0$ τότε $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Συμμετρικοί πίνακες

- Ένας **τετραγωνικός** πίνακας S ∈ $R^{n \times n}$ ο οποίος είναι **ίσος** με τον **ανάστροφό** του, δηλαδή $S = S^T$, είναι ένας **συμμετρικός πίνακας**.

  π.χ. εάν A είναι ένας πίνακας μέτρησης αποστάσεων, με $A_{i,j}$ που δίνει την απόσταση από το σημείο i στο σημείο j, τότε $A_{i,j} = A_{j,i}$ επειδή οι συναρτήσεις απόστασης είναι συμμετρικές.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & -5 & 2 \\ -5 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 6 & -4 & -3 \\ 6 & 7 & 2 & 9 \\ -4 & 2 & 1 & 5 \\ -3 & 9 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Αντισυμμετρικοί πίνακες

- Αν αντίθετα, ο **τετραγωνικός** πίνακας $S \in R^{n \times n}$ ο οποίος είναι **ίσος** με τον αρνητικό του ανάστροφο, δηλαδή $S = S^{-T}$ τότε λέμε ότι ο S είναι ένας **αντισυμμετρικός πίνακας**.

Δηλαδή: $(A)^{ij}=-(A)^{ji}, \ \forall \ i,j$

Παραδείγματα

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ -5 & 0 & 4 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 & 3 \\ -6 & 0 & 2 & 9 \\ 4 & -2 & 0 & -5 \\ -3 & -9 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Hermitian πίνακες

- Σε μιγαδικούς πίνακες, η συμμετρία συχνά αντικαθισταται από την έννοια **Hermitian πίνακες** A^H, που ικανοποιεί $\mathbf{A^* = \overline{A}^T =} A$

  όπου ο αστερίσκος υποδηλώνει το συζυγή ανάστροφο ενός πίνακα, δηλαδή, η μετάθεση του συζυγή του A: $a_{ij}=\overline{a_{ji}}$

Παράδειγμα

$$A: \begin{bmatrix} a & b+ic \\ b-ic & d \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^T: \begin{bmatrix} a & b-ic \\ b+ic & d \end{bmatrix} \qquad \overline{\mathbf{A}^T} \begin{bmatrix} a & b+ic \\ b-ic & d \end{bmatrix}$$

Πράξεις πινάκων

- **Πρόσθεση πινάκων**
  Αν οι πίνακες έχουν το ίδιο μέγεθος μπορούμε να προσθέτουμε τα αντίστοιχα στοιχεία τους: $C = A + B$ όπου $C_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$

- **Πίνακας με βαθμωτό ή διάνυσμα**
  Προσθέτουμε/πολλαπλασιάζουμε το βαθμωτό με κάθε στοιχείο του πίνακα:
  D = α · **B** + c όπου $D_{i,j} = a \cdot B_{i,j} + c$

- **Πολλαπλασιασμός πινάκων**
  Προϋπόθεση: Οι στήλες του A ίσες με τις γραμμές του B
  $C = A * B, C_{i,j} = \sum_k (A_{i,j} \cdot B_{i,j})$ $\quad$ $C(mxp) = A(mxn) * B(nxp)$

- **Γινόμενο στοιχείο προς στοιχείο** (Element-wise product ή Hadamard product)

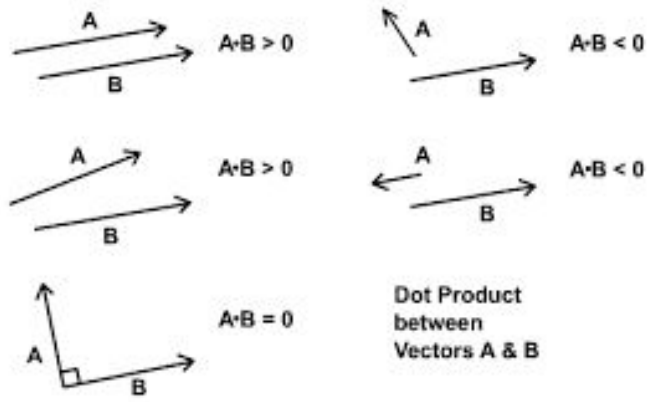
$$A \cdot B = a_{i,j} \cdot b_{i,j}$$

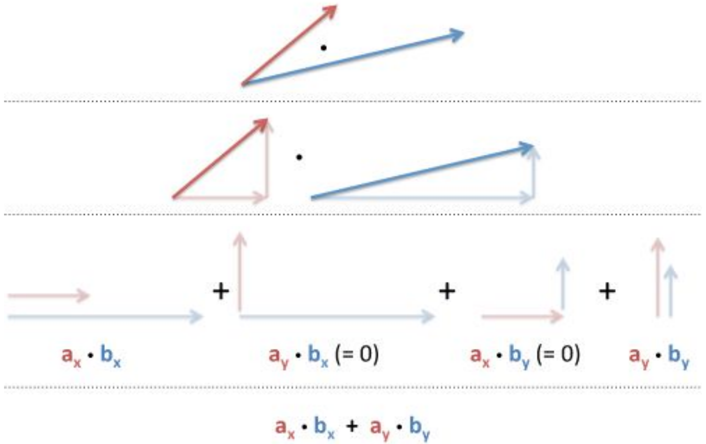
Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

Η ποσότητα $x^T y$ είναι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων x και y του $\mathfrak{R}^n$

Αν τα x,y είναι ορθογώνια , $x^{\mathrm{T}} y = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 * y_1 + x_2 * y_2 \dots + x_n * y_n$$





Γραμμική Ανεξαρτησία Διανυσμάτων

Εάν ο τετριμμένος συνδυασμός είναι ο μόνος που παράγει το μηδέν δηλαδή

$c_1 u_1 + c_2 u2 + \ldots c_n u_n = 0$ συμβαίνει μόνον όταν $c_1 = c_2 = \ldots c_n = 0$,

τότε τα διανύσματα $u_1, u_2, .. u_n$ είναι <u>γραμμικώς ανεξάρτητα</u>.

Πχ. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$

Αν αυτό δεν συμβαίνει, τότε είναι <u>γραμμικώς εξαρτημένα</u> και κάποιο από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

$$c_1 - c_2 + 2c_3 = 0$$
$$c_2 + 3/2 c_3 = 0$$

$$\mathrm{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix} \rightarrow c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Γραμμική Ανεξαρτησία Διανυσμάτων

Άσκηση Εξετάστε αν τα διανύσματα $(1,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$, $(0,0,1,1)$, $(0,1,0,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα ή όχι και ελέγξτε εάν το διάνυσμα $(0,0,0,1)$ βρίσκεται στο χώρο που παράγουν.

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{array}{l}1\\(-)\\ \\ \\ \end{array}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{array}{l} \\(-1)\\(-)\\ \end{array}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\1\\(-)\end{array}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=U\,,\quad \text{άρα } r(A)=[\text{πλήθος μη-μηδεν. γραμμών του } U]$$

$$\Rightarrow r(A)=3$$ → Πλήθος βασικών μεταβλητών

και $\dim N(A)=n-r(A)=4-3=1\neq 0$ → Πλήθος ελευθέρων μεταβλητών

άρα $\exists\ c\neq 0$ τ.ω. $Ac=0$ και τα διανύσματα είναι γρ. εξαρτημένα

Γραμμική Ανεξαρτησία Διανυσμάτων

Άσκηση Εξετάστε αν τα διανύσματα $(1,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$, $(0,0,1,1)$, $(0,1,0,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα ή όχι και ελέγξτε εάν το διάνυσμα $(0,0,0,1)$ βρίσκεται στο χώρο που παράγουν.

Το διάνυσμα $(0,0,0,1)$ βρίσκεται στο χώρο που παράγουν ανν $\exists$ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

η τελευταία γραμμή είναι $0\lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 + 0\lambda_4 = 1$, άρα το σύστημα είναι ασύμβατο και επομένως,

$$(0,0,0,1) \notin \langle (1,1,0,0), (1,0,1,0), (0,0,1,1), (0,1,0,1) \rangle$$

Αν δεν υπάρχει λύση, τότε λέμε ότι το σύστημα είναι **ασύμβατο** (inconsistent).

Γραμμική Ανεξαρτησία Διανυσμάτων

ε.δε.μ²
ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

Ένα σύνολο **n διανυσμάτων** του $\mathfrak{R}^m$ είναι κατ' ανάγκην εξαρτημένο, όταν **n>m**

Κάθε διάνυσμα **u** του διανυσματικού χώρου V μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός του w : $u = c_1 w_1 + \dots c_l w_l$ για κάποιους συντελεστές $\mathbf{c}_i$

Έστω διανύσματα που ξεκινούν από την αρχή ενός 3D χώρου:

2 εξαρτημένα διανύσματα ⇒ Περιέχονται στην ίδια ευθεία

3 εξαρτημένα διανύσματα ⇒ Περιέχονται στο ίδιο επίπεδο

Βάση και Διάσταση Διανυσματικού Χώρου

<u>Βάση</u> ενός διανυσματικού χώρου είναι ένα σύνολο διανυσμάτων που έχει ταυτόχρονα τις δύο ιδιότητες:

1. Είναι γραμμικώς ανεξάρτητο
2. Παράγει τον χώρο.

Όταν ένας τετραγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος, τότε οι στήλες του είναι ανεξάρτητες και αποτελούν μία βάση του $\mathfrak{R}^n$.

Αν $u_1, .., u_m$ και $w_1, ... w_n$ είναι δύο βάσεις του ίδιου διανυσματικού χώρου V, τότε **m=n**

Το m (ή το n) εκφράζει τους "<u>βαθμούς ελευθερίας</u>" του χώρου και ονομάζεται **<u>διάσταση</u>** <u>του V</u>

→ dim(V) = [μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων του V]

π.χ. dim(R^2)=2, dim(R^3)=3

Βάση και Διάσταση Διανυσματικού Χώρου

Να βρεθεί μία βάση και η διάσταση του χώρου

$$V = \{(x, y, z) \in \Re^3) | x - y + 2z = 0\}$$

$$x - y + 2z = 0 \rightarrow x = y - 2z, y, z \in \Re$$

$$V = \{(x, y, z) \in \Re^3) | x = y - 2z\} = \{(y - 2z, y, z) | y, z \in \Re\}$$

$$= \{(y, y, 0) + (-2z, 0, z) | y, z \in \Re\}$$

$$= \{y(1, 1, 0) + z(-2, 0, 1) | y, z \in \Re\}$$

$$= < (1, 1, 0), (-2, 0, 1) >$$

e_1 , e_2

Οδηγοί

Για να αποτελέσουν βάση του χώρου αυτά τα 2 διανύσματα θα πρέπει να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1st*2+2nd} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ορθογώνιοι πίνακες

ε.δε.μ^2
ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

- Ένας τετραγωνικός πίνακας ονομάζεται <u>**ορθογώνιος πίνακας**</u> εάν και μόνο αν τα **n διανύσματα- στήλες** (ή -γραμμές) του αποτελούν ορθοκανονικό σύστημα του χώρου διάστασης nxn

Π.χ. (ταυτοτικός)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(μετάθεσης)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(περιστροφή)

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- Ισοδύναμα, ένας τετραγωνικός πίνακας Α είναι **ορθογώνιος** αν **η μετάθεσή του είναι ίση με τον αντίστροφό του :** $A^T = A^{-1}$

και ισχύει $A^T \mathrm{A} = A\mathrm{A}^T = I$

Αντίστροφος πίνακας

Παράδειγμα

5) Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμος, τότε: $\boxed{(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}}$

π.χ. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5-6}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^{-1})^T = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

και $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^T)^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Ορθογώνιοι πίνακες

- Η ορίζουσα οποιουδήποτε ορθογώνιου πίνακα είναι είτε +1 (κάνει μια καθαρή περιστροφή), ή -1 (είναι μια καθαρή αντανάκλαση, ή μια σύνθεση της αντανάκλασης και της περιστροφής).

- Εάν $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ είναι ορθογώνιος πίνακας, τότε $A^T A = I_n$

Έπεται ότι:

$$\det(A^T A) = \det(I_n) = 1 \,,$$

$$\det(A^T)\det(A) = 1 \,,$$

$$\det(A) = \pm 1$$

Σύστημα Γραμμικών Εξισώσεων

$\mathbf{A} \in R^{m \times n}$, γνωστός πίνακας,

$\mathbf{b} \in R^{m}$, διάνυσμα,

$\mathbf{x} \in R^{n}$, διάνυσμα με τις άγνωστες μεταβλητές

$$\mathbf{Ax = b}$$

Αναλύεται σε:

$$A_{1,:}x = b_1$$
$$A_{2,:}x = b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$A_{m,:}x = b_m$$

ή

$$\begin{aligned} A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 + \cdots + A_{1,n}x_n &= b_1 \\ A_{2,1}x_1 + A_{2,2}x_2 + \cdots + A_{2,n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ A_{m,1}x_1 + A_{m,2}x_2 + \cdots + A_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Μπορεί να έχει καμία λύση, πολλές λύσεις, ακριβώς μία λύση (πολ/σμό με ανάστροφο)

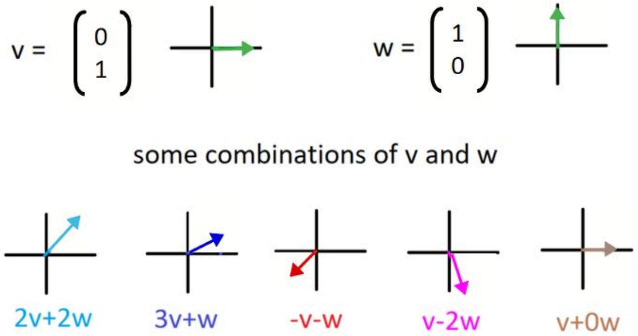
Σύστημα Γραμμικών Εξισώσεων $\mathbf{Ax = b}$

Σκέψη :

Οι στήλες του A ορίζουν διαφορετικές κατευθύνσεις που μπορούμε να “κινηθούμε” στο χώρο από το αρχικό σημείο 0 για να προσεγγίσουμε το b.

$$Ax = \sum_i x_i A_{:,i} \rightarrow$$ Γραμμικός συνδυασμός

Το **εύρος** (span) ενός ... μάτων είναι το σύνολο όλων των ... τορούν να ληφθούν με γρα... των αρχικών διανυσμάτων.



Σύστημα Γραμμικών Εξισώσεων $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

Έχει λύση η $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$;

Θα ελέγχουμε αν το $\mathbf{b}$ είναι στο <u>εύρος των στηλών</u> του $\mathbf{A}$

Για να μπορεί το σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ να έχει λύση για όλες τις τιμές του $\mathbf{b} \in \Re_m$, απαιτούμε ο χώρος των στηλών του $\mathbf{A}$ να είναι ο $\Re_m$

Πρέπει <u>να έχει ακριβώς **m** γραμμικές ανεξάρτητες στήλες</u>, όχι τουλάχιστον **m**.

Σύστημα Γραμμικών Εξισώσεων $\mathbf{Ax = b}$

Προκειμένου η μήτρα **A** να έχει αντίστροφο, πρέπει επιπλέον να διασφαλίσουμε ότι η εξίσωση έχει το πολύ μία λύση για κάθε τιμή του **b**.

(Διαφορετικά, υπάρχουν περισσότεροι από έναν τρόποι παραμετροποίησης κάθε λύσης)

Για να έχει αντίστροφο η μήτρα A θα πρέπει:

- **να είναι τετράγωνη, δηλαδή, απαιτούμε ότι m = n και**
- **όλες οι στήλες πρέπει να είναι γραμμικώς ανεξάρτητες**

Μια τετράγωνη μήτρα με γραμμικά εξαρτημένες στήλες είναι γνωστή ως μοναδική.

Εάν η A δεν είναι τετράγωνη, αλλά μοναδική, μπορεί ακόμα να επιλυθεί η εξίσωση.

→ Ωστόσο, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της αντιστροφής της μήτρας για να βρούμε τη λύση.

Σύστημα Γραμμικών Εξισώσεων

$$\mathbf{Ax = b}$$

Λύση: Αντιστροφή της μήτρας

$$Ax = b$$

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$I_n x = A^{-1}b$$

$$x = A^{-1}b$$

Τριγωνική παραγοντοποίηση A=LU

Αν δεν απαιτούνται εναλλαγές γραμμών, ο αρχικός πίνακας μπορεί να γραφεί ως γινόμενο A=LU

L : κάτω τριγωνικός

U : άνω τριγωνικός

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ \lambda_{2,1} & 1 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & .. & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & \dots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{m,n} \end{bmatrix}$$

- Εμφανίζεται **μετά τη διαδοχική απαλοιφή** και **πριν την ανάδρομη αντικατάσταση.**
- Τα **διαγώνια στοιχεία του είναι οι οδηγοί**

π.χ.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = LU$$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & -3 & 4 \\ 8 & -7 & 3 & 2 \\ -3 & -6 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{8}{5} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{33}{27} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -\frac{27}{5} & -\frac{9}{5} & \frac{42}{5} \\ 0 & 0 & 3 & -\frac{41}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{68}{3} \end{bmatrix} = LU$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = LU$$

Εύρεση A^{-1} : Μέθοδος των Gauss-Jordan

Έστω η εξίσωση : $AA^{-1}=I$.

Εάν θεωρηθεί στήλη προς στήλη αυτή η εξίσωση προσδιορίζει τις στήλες του A^{-1}

$$Ax_1 = e_1, Ax_2 = e_2, Ax_3 = e_3$$

όπου

$$\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & L \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U & L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & A^{-1} \end{bmatrix}$$

Εύρεση A^{-1} : Μέθοδος των Gauss-Jordan

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[\,A \quad e_1 \quad e_2 \quad e_3\,] = [\,U \quad L\,]$$
$$[\,U \quad L\,] = [\,I \quad A^{-1}\,]$$

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/3 & 20/9 & -4/9 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 5/9 & -1/9 & 0 & 1 \end{array}\right);$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & 0 & 9/5 & -9/5 & 0 \\ 0 & 5/3 & 20/9 & -4/9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1/15 & -2/5 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & 0 & 9/5 & -9/5 & 0 \\ 0 & 5/3 & 0 & 0 & -5/3 & 20/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1/15 & -2/5 & 1 \end{array}\right)$$

Διαιρούμε όλα τα στοιχεία της i-γραμμής του πίνακα εκ δεξιών της διακεκκομένης γραμμής με το μη μηδενικό στοιχείο της i- γραμμής του διαγώνιου πίνακα και παίρνουμε:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1/5 & 6/5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Παραγοντοποίηση A=LDU

Ο L παραμένει ίδιο όπως στην A=LU

Ο πίνακας D είναι διαγώνιος και περιέχει την διαγώνιο του πίνακα U της παραγοντοποίησης LU (στοιχεία οδηγών):

Ο νέος άνω τριγωνικός πίνακας U προκύπτει από τον πίνακα U της παραγοντοποίησης LU διαιρώντας κάθε στοιχείο του με το στοιχείο της διαγωνίου (δηλ. τον οδηγό) της ίδιας γραμμής

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = LDU$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = LU$$

Νόρμες (Norms)

Μέτρηση μεγέθους ενός διανύσματος x

$$L^p = \|x\|_p = \left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad p \subset \Re, p \geq 1$$

Η νόρμα είναι μία συνάρτηση f που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$f(\boldsymbol{x}) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \leq f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \text{ (the \textbf{triangle inequality})}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, f(\alpha \boldsymbol{x}) = |\alpha| f(\boldsymbol{x})$$

L^2 νόρμα (Ευκλείδια νόρμα)

- Για p=2 → η ευκλείδεια απόσταση από την αρχή μέχρι το σημείο που προσδιορίζεται από το x.

- Δηλώνεται συχνά ως || x ||, με το δείκτη 2 να παραλείπεται.

- Συνήθως υπολογίζουμε το τετράγωνο της L^2 νόρμας, απλά ως $x^{\mathrm{T}}x$

- Υπολογιστικά, συχνά, το τετράγωνο της L^2 νόρμα μπορεί να αυξάνεται πολύ αργά κοντά το σημείο που προσδιορίζεται από το x
→ απαγορευτικό υπολογιστικά

L^1 νόρμα

- Συχνά είναι σημαντικό να γίνεται διάκριση μεταξύ στοιχείων που είναι ακριβώς μηδενικά και αυτών που είναι μικρά αλλά μη μηδενικά.

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$$

- Κάθε φορά που ένα στοιχείο του **x** μετακινείται κατά **e** μακριά από το 0, η **L^1** αυξάνεται κατά **e**

- Υποκαθιστά το πλήθος των μη μηδενικών τιμών.

Μερικές φορές μετράμε το μέγεθος του διανύσματος υπολογίζοντας τον αριθμό των μη-μηδενικών στοιχείων (Λανθασμένη ορολογία το νόρμα L^0).

L^∞ νόρμα (Max νόρμα)

Υπολογίζει την απόλυτη τιμή του μεγαλύτερου στοιχείου του διανύσματος x

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

Υπολογισμός μεγέθους μήτρας

Νόρμα Frobenius

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} A_{i,j}^2}$$

Είναι το ανάλογο της L^2 ενός διανύσματος.

Εσωτερικό γινόμενο με χρήση νόρμας

$$x^T y = \|x\|_2 \|y\|_2 cos\theta$$ όπου θ η γωνία μεταξύ x και y

Διαγώνιοι πίνακες

Ένας πίνακας D είναι διαγώνιος εάν και μόνο εάν $D_{i,j} = 0$ για όλα τα $i \neq j$

$diag(v)$: τετραγωνικός διαγώνιος πίνακας,
το διάνυσμα **u** περιέχει τις τιμές της διαγωνίου

Ο πολ/σμός του με άλλο πίνακα είναι υπολογιστικά αποδοτικός.

$$diag(v)x = v \odot x$$

Αντίστροφος : $\exists$ αν τα στοιχεία της διαγωνίου είναι μη μηδενικά

$$diag(v)^{-1} = diag([1/v_1, \ldots, 1/v_n])$$

- Σε πολλές περιπτώσεις, αλγόριθμοι μηχανικής μάθησης περιορίζουν πίνακες να είναι διαγώνιοι, κερδίζοντας υπολογιστικό κόστος και χρόνο.
- Είναι δυνατή η κατασκευή διαγώνιου πίνακα

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

ε.δε.μ²
ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

Επίλυση γραμμικών συστημάτων

Επινοήθηκαν για επίλυση διαφορικών εξισώσεων :

Ιδιοτιμή Ιδιοδιάνυσμα

Η λύση θα είναι της μορφής : $\frac{dy}{dt} = Ay$

$$y(t) = e^{\lambda t}x$$

$$\Rightarrow \lambda e^{\lambda t}x = \mathrm{A}e^{\lambda t}x \Rightarrow \underline{\mathrm{A}x = \lambda x}$$

- Ο αριθμός λ είναι ιδιοτιμή του A όταν και μόνον όταν ισχύει $det(A - \lambda I) = 0$
- Αυτή είναι η χαρακτηριστική εξίσωση και σε κάθε λύση της λ αντιστοιχεί ένα ιδιοδιάνυσμα x:

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad \text{ή} \quad Ax = \lambda x$$

Βήματα επίλυσης του προβλήματος ιδιοτιμών

1. Υπολογισμός της ορίζουσας του
2. Εύρεση των ριζών αυτού του πολυωνύμου $A - \lambda \mathrm{I}$ → ιδιοτιμές
3. Για κάθε ιδιοτιμή, επίλυση του συστήματος $(A - \lambda \mathrm{I})x = 0$ → ιδιοδιανύσματα

π.χ. Διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy_1}{dt} = 4y_1 - 5y_2$$
$$\frac{dy_2}{dt} = 2y_1 - 3y_2$$
$$t = 0 : y_1 = 8, y_2 = 5$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

1. ,2.

$$|A - \lambda \mathrm{I}| = (4-\lambda)(3-\lambda) + 10 = \lambda^2 - \lambda - 2 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$$

3.

$$(A - \lambda_1 I)x = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 I)x = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to x_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ειδικές λύσεις :

$$u = e^{\lambda_1 t} x_1 = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u = e^{\lambda_2 t} x_2 = e^{2t} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Γενική λύση: $u = c_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} x_2$

Χρήση αρχικών συνθηκών → $8 = c_1 + 5c_2$
$5 = c_1 + 2c_2$

$$u = 3e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{2t} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Εξίσωση-κλειδί: $Ax = \lambda x$

- Οι **ιδιοτιμές** παριστάνουν το **βηματισμό στο χρόνο** (magnitude)

- Τα **ιδιοδιανύσματα** παριστάνουν τις **“κανονικές καταστάσεις” του συστήματος** και επιδρούν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο (direction)

- Μπορούμε να παρακολουθήσουμε τη <u>συμπεριφορά κάθε ιδιοδιανύσματος</u> και να συνδυάσουμε αυτές τις κανονικές καταστάσεις για να βρούμε <u>μια λύση</u>

→ Διαγωνοποίηση

Διαγωνοποίηση

$$A = V\Lambda V^{-1}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= Ay \\ y(t) &= e^{\lambda t}x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda e^{\lambda t}x = \mathrm{A}e^{\lambda t}x \Rightarrow \mathrm{A}x = \lambda x$$

Eigenvector Matrix

Eigenvalue Matrix

$$\Rightarrow A\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AV = V\Lambda$$

$$\Rightarrow AVV^{-1} = V\Lambda V^{-1}$$

$$\Rightarrow AI = V\Lambda V^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = V\Lambda V^{-1}}$$

A^2 = ;

Ο πίνακας ιδιοτιμών υψωμένος στο τετράγωνο

$$A^2 = V\Lambda V^{-1}V\Lambda V^{-1} = V\Lambda I\Lambda V^{-1} = V\Lambda^2 V^{-1}$$

$$A^n = ;$$

Ίδιος πίνακας ιδιοδιανυσμάτων όπως ο Α

$$\boxed{A^n = V\Lambda^n V^{-1}}$$

Ο πίνακας ιδιοτιμών υψωμένος στην n

Πίνακες, ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα

Συμμετρικός πίνακας → πραγματικές ιδιοτιμές

$$S = S^T$$

→ ορθογώνια ιδιοδιανύσματα

Ανάστροφος πίνακας → φανταστικές ιδιοτιμές

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{A}$$

→ ορθογώνια μιγαδικά ιδιοδιανύσματα

Ορθογώνιος πίνακας → για όλες τις ιδιοτιμές ισχύει: $|\lambda| = 1$

$$Q^{\mathrm{T}} Q = I$$

→ ορθογώνια μιγαδικά ιδιοδιανύσματα

Ένας πίνακας ονομάζεται **ιδιάζων (singular)** ανν οποιαδήποτε από τις ιδιοτιμές του είναι μηδέν.

Πίνακες, ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα

ε.δε.μ²
ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

Ορισμένος πίνακας

- Ένας **συμμετρικός n×n** πίνακας ονομάζεται **θετικά** (αρνητικά) ορισμένος, εάν για όλα τα μη μηδενικά διανύσματα x ∈ R^n το $Q(x) = x^T A x$ παίρνει μόνο θετικές τιμές (αρνητικές τιμές).
- Εάν ένας **συμμετρικός nxn** πίνακας παίρνει μόνο θετικές (αρνητικές) ονομάζεται **γνησίως-θετικός** (αρνητικός) → $x^T A x = 0 \Rightarrow x = 0$
- Εάν ένας **συμμετρικός nxn** πίνακας παίρνει θετικές (αρνητικές) ή μηδενικές ονομάζεται **ημι-θετικός** (αρνητικός) → $\forall x, x = x^T A x \geq 0$
- Εάν ένας **συμμετρικός nxn** δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός τότε ο πίνακας είναι **αόριστος**.

Παραγοντοποίηση

$A=LU$ (Απαλοιφή)

$A=QR$ (Gram-Schmidt)

$S=Q\Lambda Q^T$ (Symmetric: $\begin{bmatrix}\sigma_1 & \cdots & \sigma_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1^T \\ \vdots \\ \sigma_n^T\end{bmatrix}$)

$A=X\Lambda X^{-1}$

$A=U\Sigma V^T$ (Ορθογώνιος x Διαγώνιος x Ορθογώνιος)

Trace Operator

Δίνει το άθροισμα όλων των διαγωνίων τιμών ενός πίνακα $Tr(\mathbf{A}) = \sum_i A_{i,i}$

Frobenius νόρμα του A: $\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{Tr(AA^T)}$

<u>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ</u>

$$Tr(A) = Tr(A^T)$$

$Tr(ABC) = Tr(CAB) = Tr(BCA)$, αν το επιτρέπουν οι διαστάσεις των πινάκων ή

$$Tr\left(\prod_{i=1}^{n} F^{(i)}\right) = Tr\left(F^{(n)} \prod_{i=1}^{n} F^{(i)}\right)$$

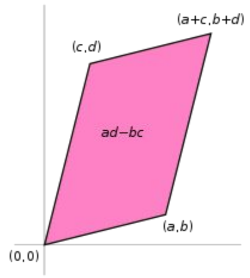
Παράδειγμα

$$Tr\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{00} + a_{11} + a_{22}$$

Ένα βαθμωτό είναι το δικό του ίχνος: $a = Tr(a)$

Ορίζουσα (Determinant)

det(A) : αντιστοιχεί πίνακα σε βαθμωτό

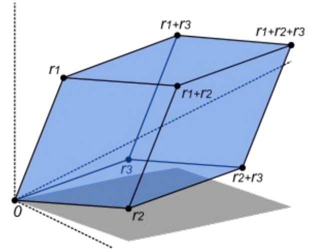


- Ισούται με το **γινόμενο όλων των ιδιοτιμών του πίνακα**
- <u>Γεωμετρική ερμηνεία</u>
    - Η απόλυτη τιμή της ορίζουσας δίνει την κλίμακα με την οποία το εμβαδόν ή ο όγκος (ή μιας μεγαλύτερης διάστασης αναλογία) πολλαπλασιάζεται με τον σχετικό γραμμικό μετασχηματισμό,
    - το πρόσημό της δείχνει αν ο μετασχηματισμός διατηρεί τον προσανατολισμό.

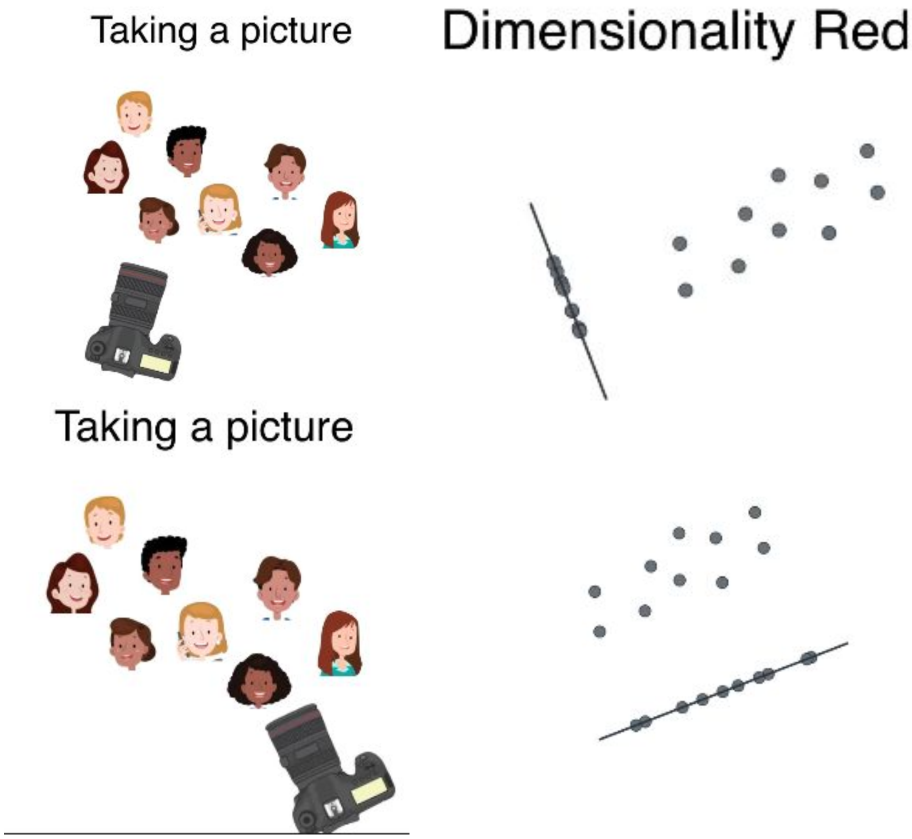
π.χ. $A_{2\times 2}$, det(A)=−2 : όταν εφαρμόζεται στην περιοχή ενός επιπέδου με πεπερασμένο εμβαδόν, θα μετασχηματιστεί σε μια περιοχή με το διπλάσιο εμβαδόν, ενώ αντιστρέφει τον προσανατολισμό της.

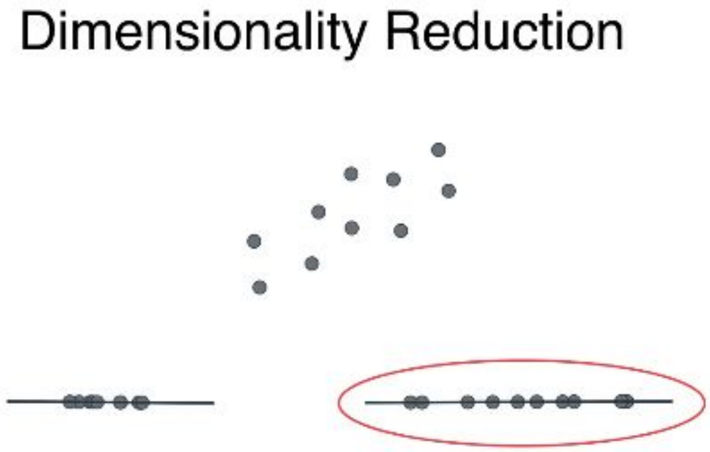
det(A)=0 : ο χώρος συστέλλεται

det(A)=1 : ο μετασχηματισμός διατηρεί τον όγκο



Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα





Ποια είναι η ιδανική γραμμή για προβολή των δεδομένων (όπου αυτά θα είναι όσο πιο διακριτά γίνεται);

[10.6 Key Steps of PCA in Practice pg 336, MATHEMATICS FOR MACHINE LEARNING]

Housing Data

Dataset' features

Size
Number of rooms
Number of bathrooms

Schools around
Crime rate

Διάνυσμα 5 χαρακτηριστικών $\xrightarrow{\text{Μείωση διαστάσεων}}$ Διάνυσμα 2 χαρακτηριστικών

Size, Number of rooms, Number of bathrooms → Size feature

Schools around, Crime rate → Location feature

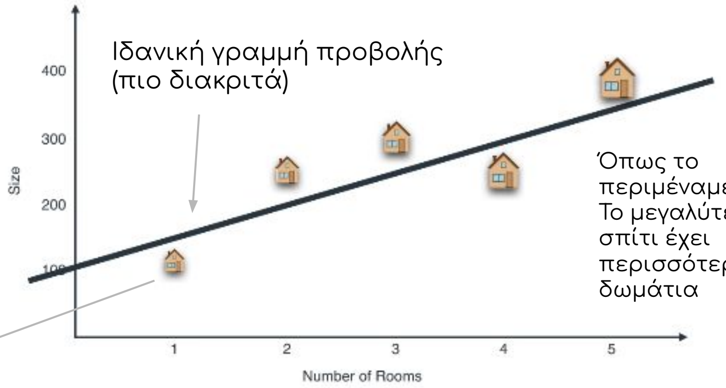
Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα

Θα δούμε πώς πάμε από το χώρο των 2 χαρακτηριστικών (2D) στο 1D

Housing Data

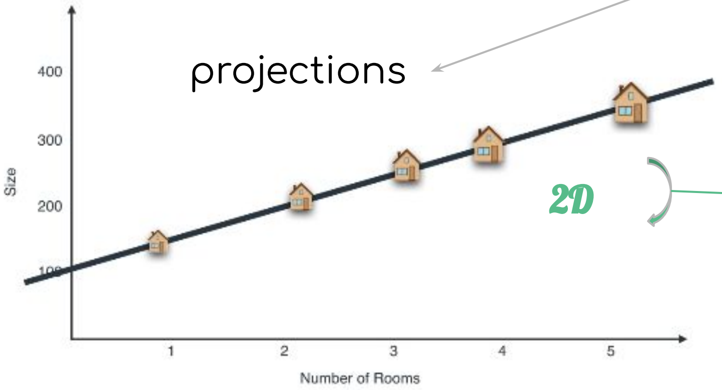
Size
Number of rooms → Size feature
Number of bathrooms

Schools around → Location feature
Crime rate



Όπως το περιμέναμε
Το μεγαλύτερο σπίτι έχει περισσότερα δωμάτια

projections

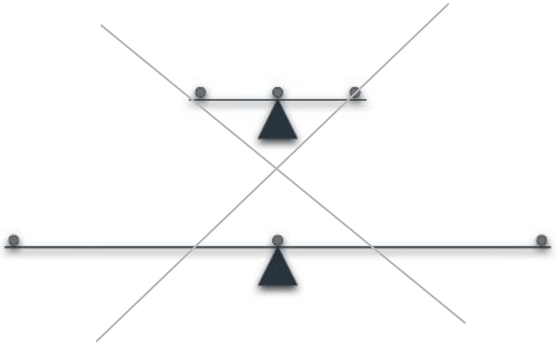


Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα

σημείο ισορροπίας

Mean

$$\text{Mean} = \frac{1+2+6}{3} = 3$$



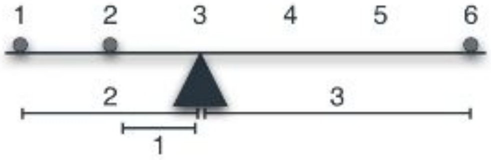
Ίδιο mean value

Variance

Παίρνω την απόσταση κάθε σημείου από το κέντρο.

$$\text{Variance} = \frac{1^2+0^2+1^2}{3} = 2/3$$

$$\text{Variance} = \frac{5^2+0^2+5^2}{3} = 50/3$$



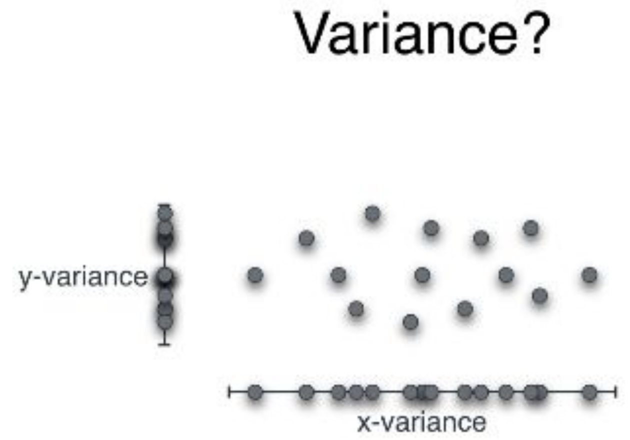
$$\text{Variance} = \frac{2^2+1^2+3^2}{3} = 14/3$$

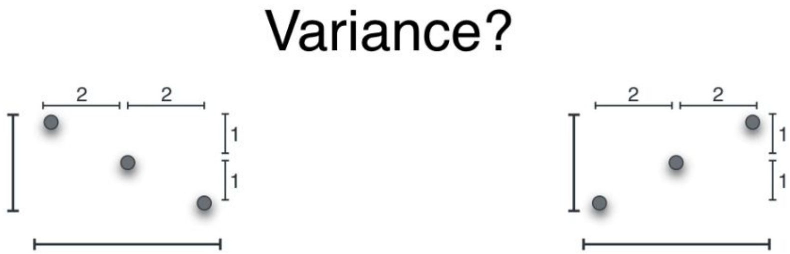
Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα

ε.δε.μ²
ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

Εξετάζουμε τη διακύμανση στο χώρο

→ εξετάζουμε και τις δύο διαστάσεις





$$\text{x-variance} = \frac{2^2+0^2+2^2}{3} = 8/3$$

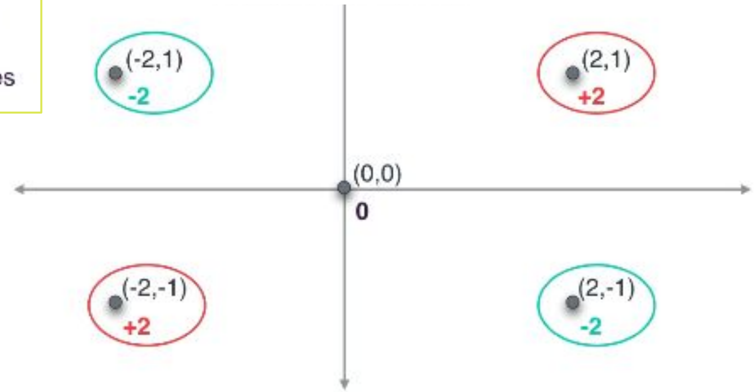
$$\text{y-variance} = \frac{1^2+0^2+1^2}{3} = 2/3$$

- *Έχω δύο διαφορετικά σύνολα*
  - *έχουν την ίδια διακύμανση στις προβολές x και y*

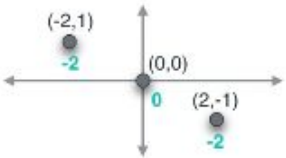
Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα

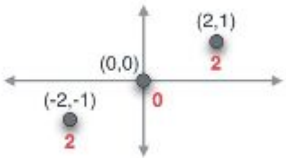
Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα

Product of oordinates



Covariance



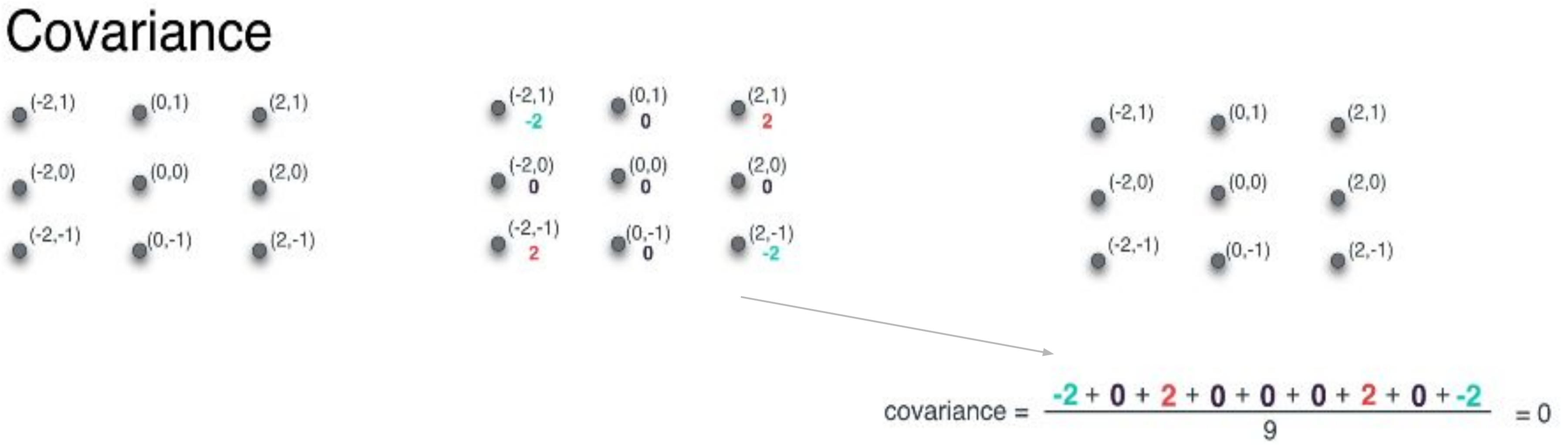


$$\text{covariance} = \frac{(-2) + 0 + (-2)}{3} = -4/3$$

$$\text{covariance} = \frac{2 + 0 + 2}{3} = 4/3$$

Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα

Ας υπολογίσουμε το covariance των σημείων



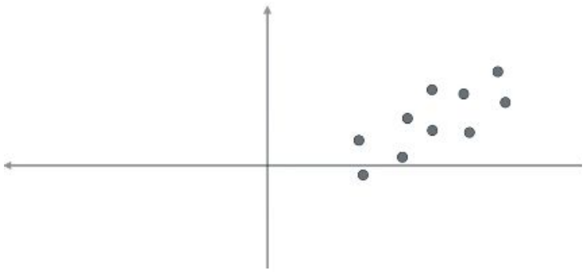
Είναι 0 και αυτό φαίνεται λογικό αφού δεν φαίνεται να υπάρχει κάποια θετική ή αρνητική συσχέτιση

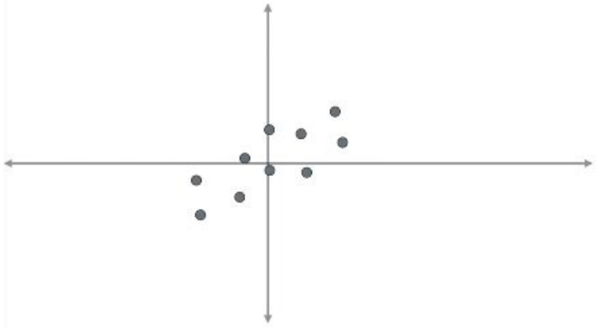
Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα

Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα

Πώς θα βρούμε την τέλεια προβολή;

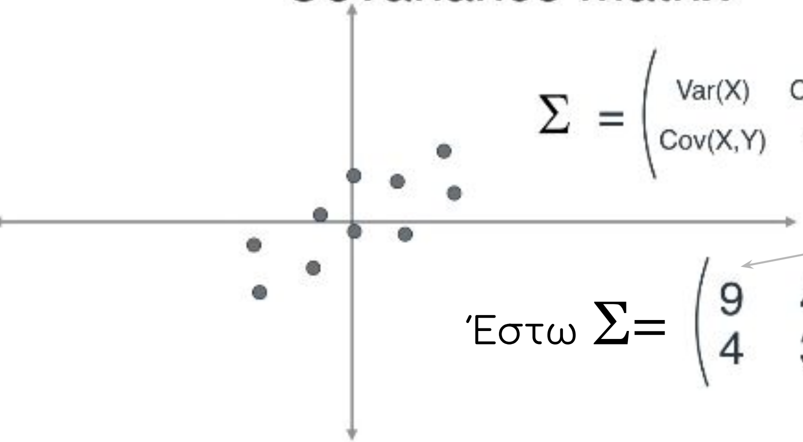
Θα ορίσουμε σύστημα αξόνων -> θα βρούμε το σημείο όπου τα δεδομένα ισορροπούν





Covariance matrix

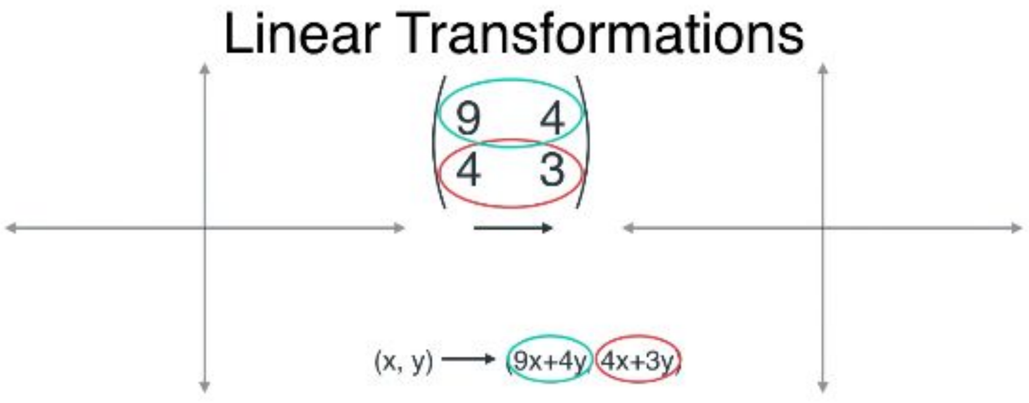
$$\Sigma = \begin{pmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & Var(Y) \end{pmatrix}$$

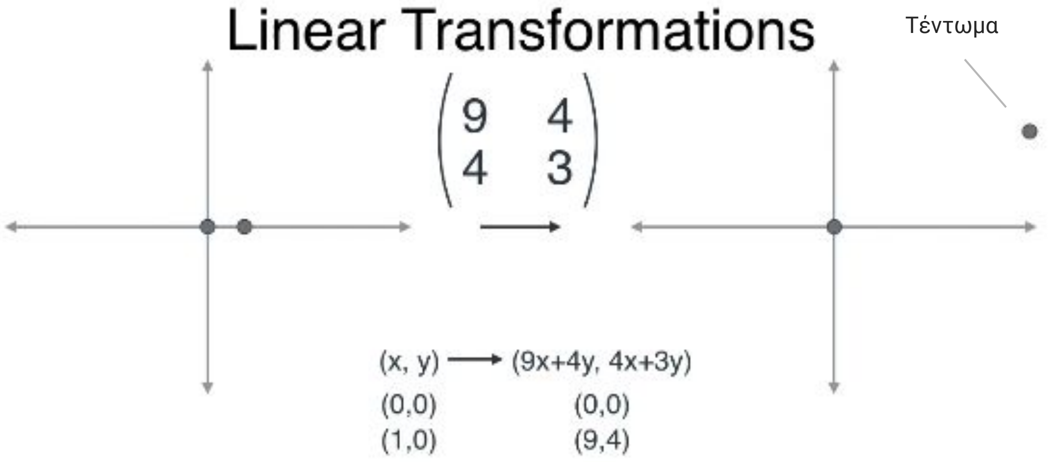


Μεγάλη διακύμανση στο x άξονα σε αντίθεση με τον y

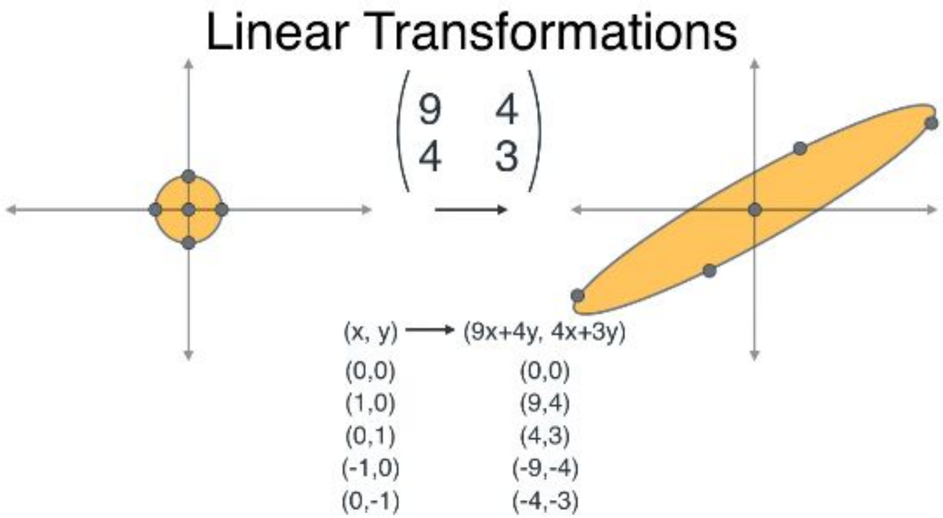
Έστω $\Sigma = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

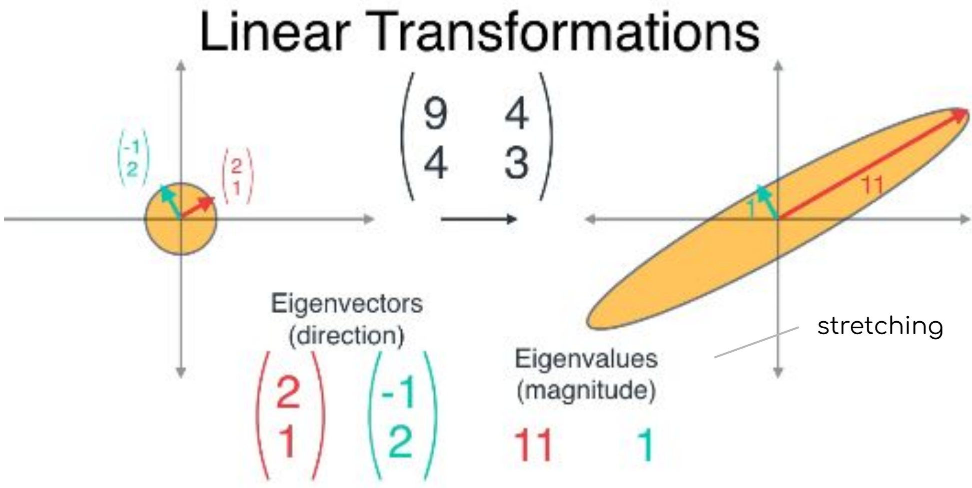
Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα





Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα





$$\begin{vmatrix} x-9 & -4 \\ -4 & x-3 \end{vmatrix} = (x-9)(x-3) - (-4)(-4) = x^2 - 12x + 11$$

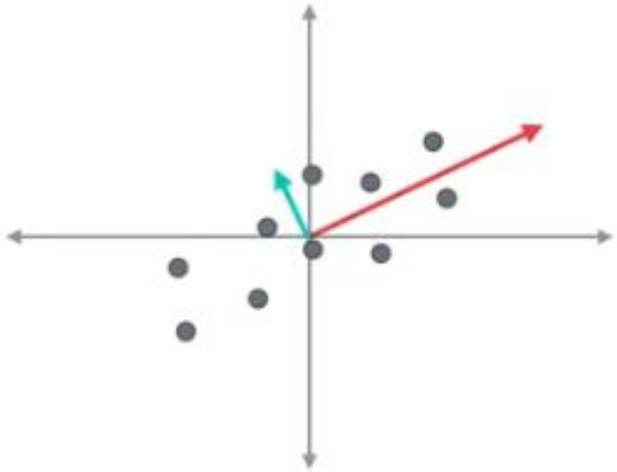
$$= (x-11)(x-1)$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 11\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα

Principal Component Analysis (PCA)

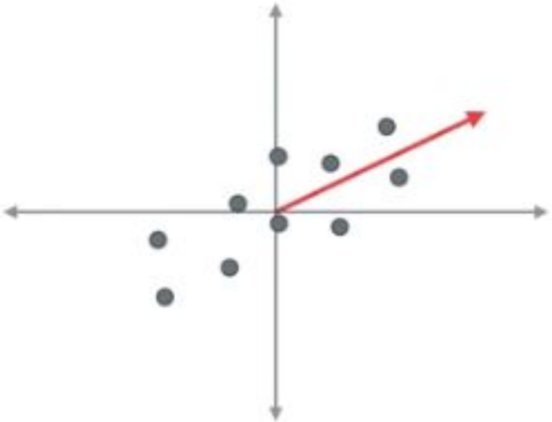


$$\Sigma = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$	Eigenvectors (direction)
11	1	Eigenvalues (magnitude)

Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα

Principal Component Analysis (PCA)

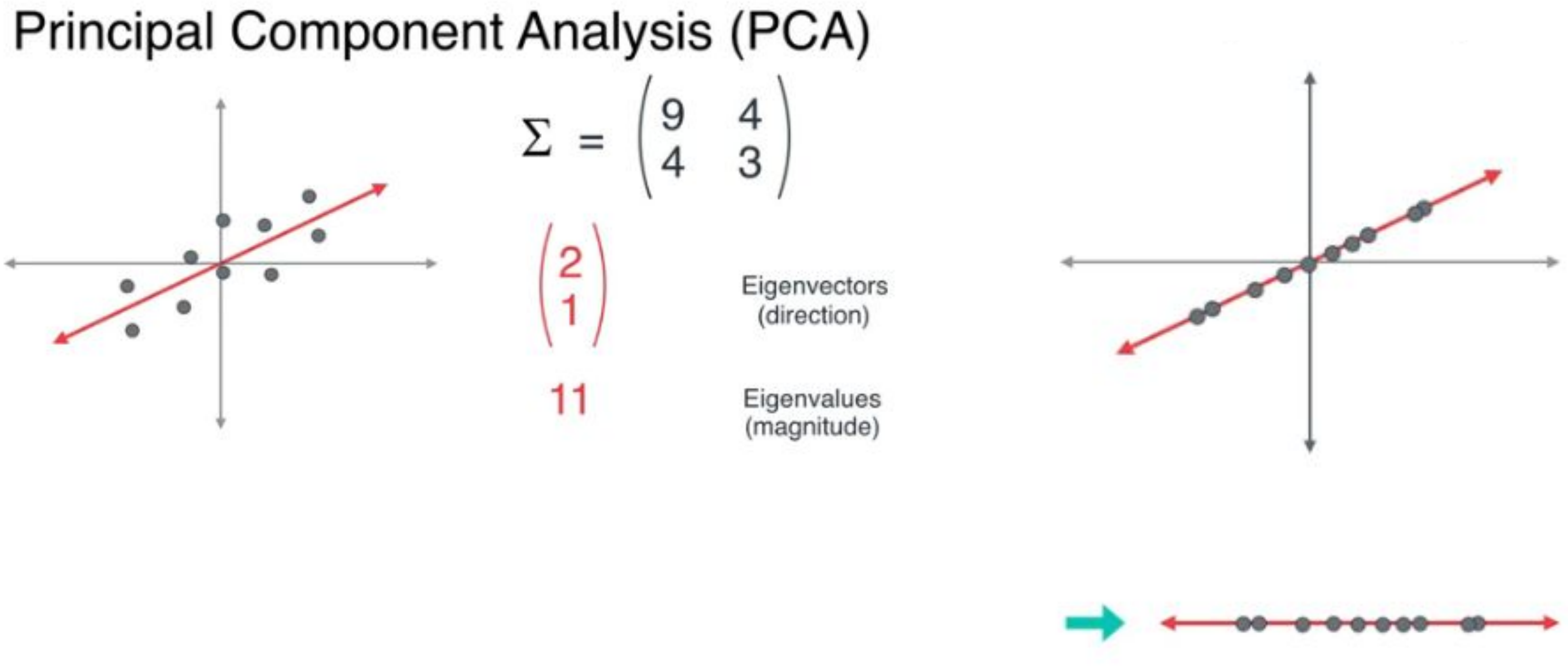


$$\Sigma = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

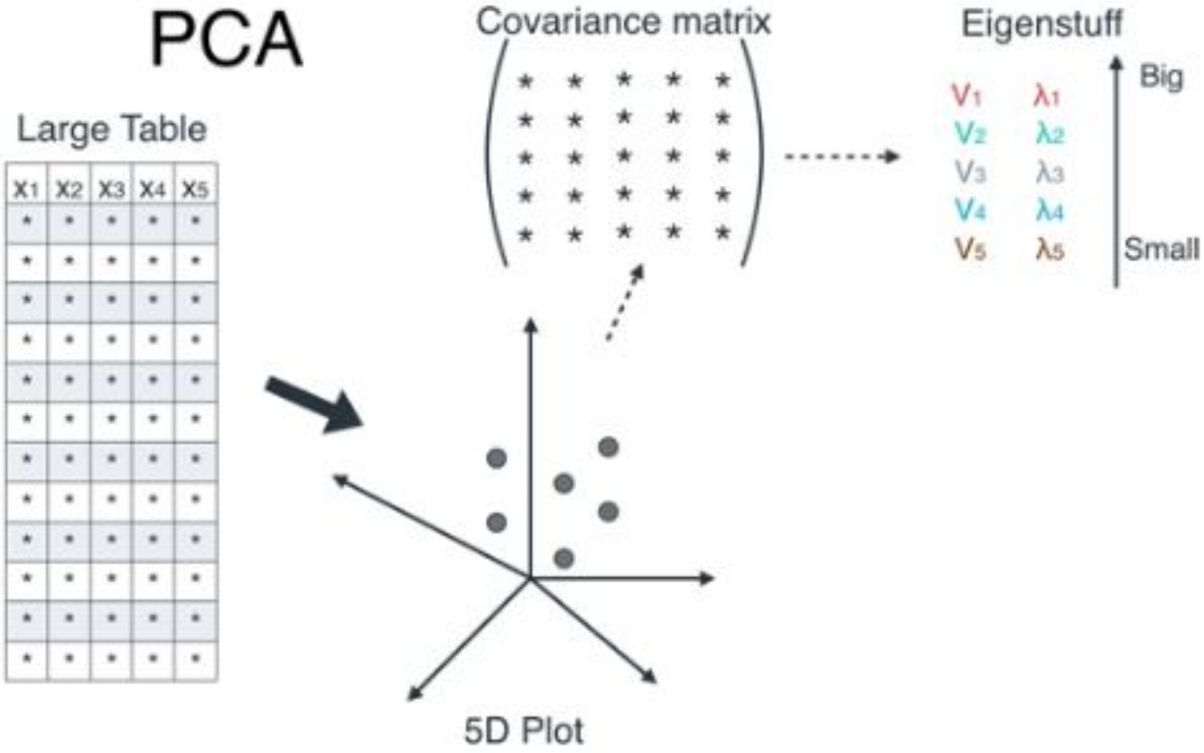
$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvectors (direction)

11 Eigenvalues (magnitude)

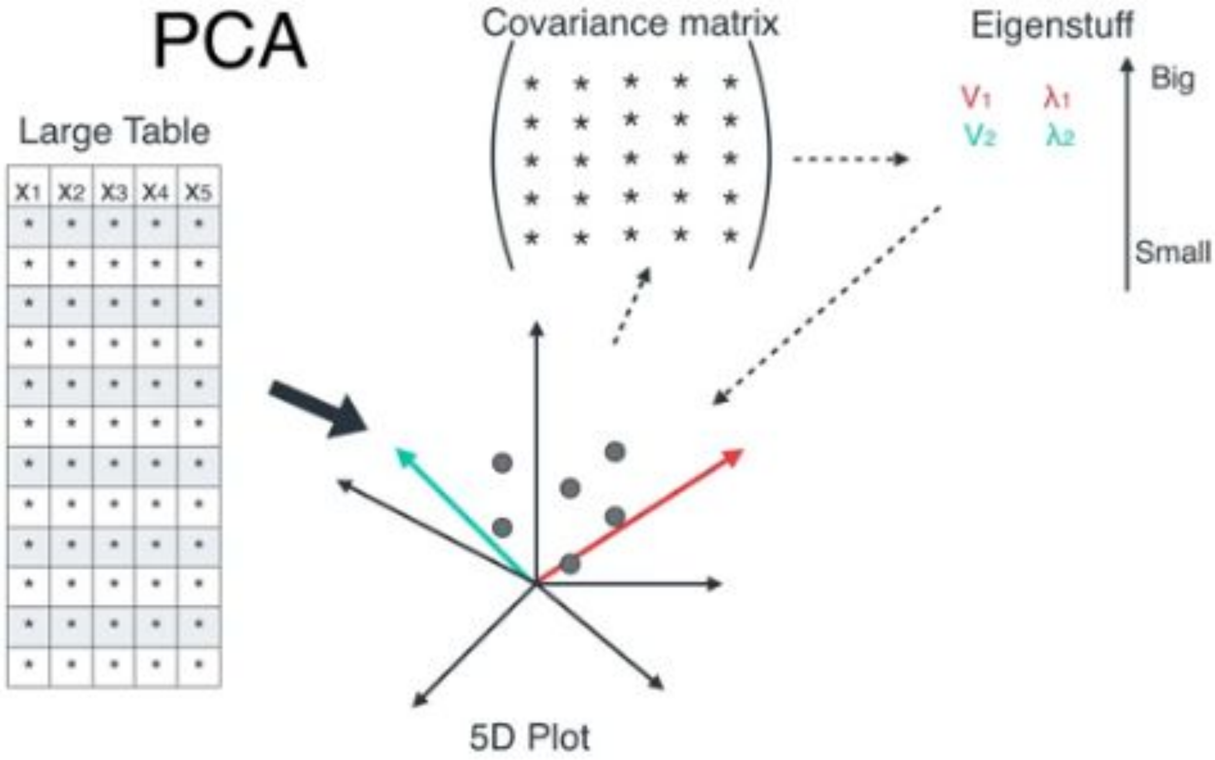
Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα



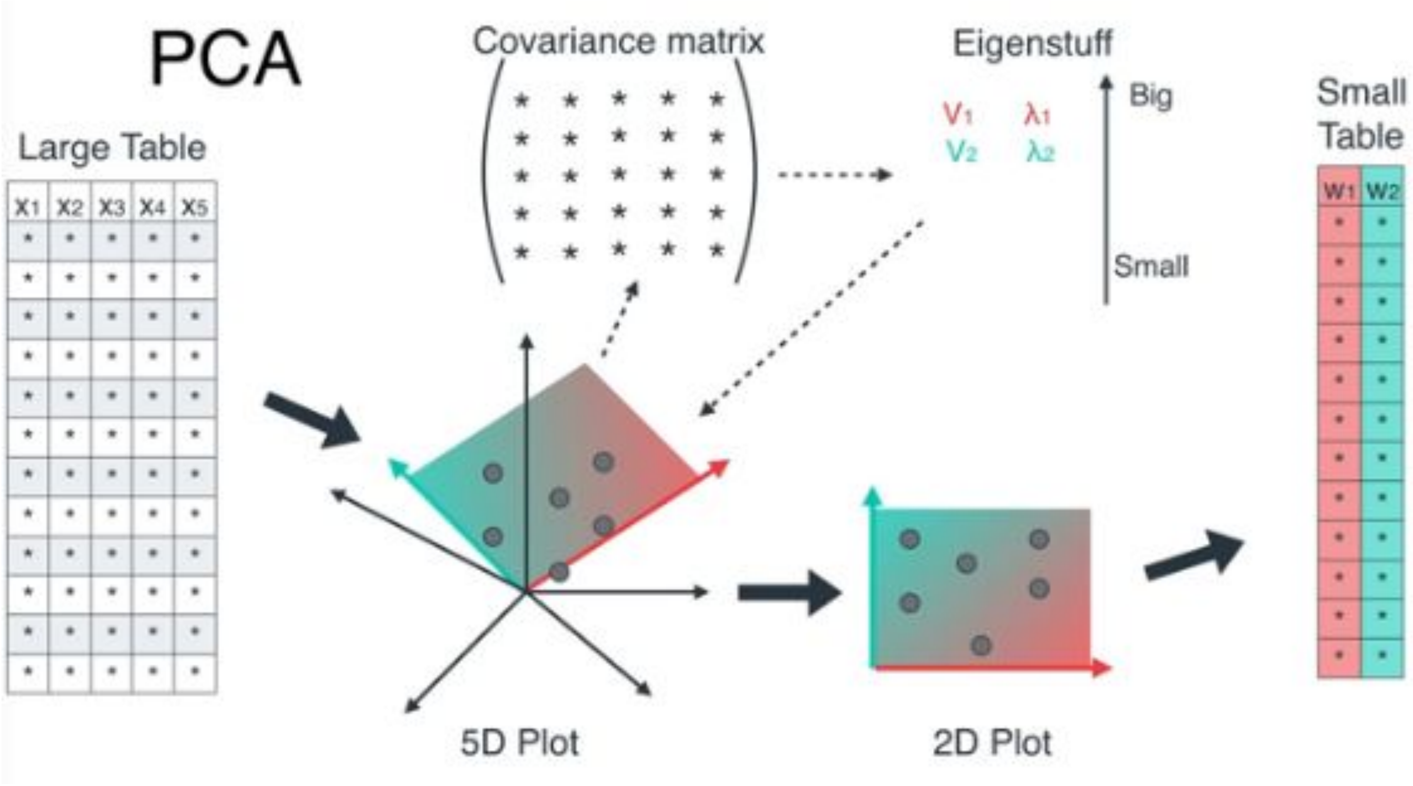
Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα



Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα



Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα



Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών (Principal Components Analysis)

Έστω $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(m)} \in \mathfrak{R}^n$

Συμπίεση : αποθήκευση των σημείων με τρόπο που απαιτεί λιγότερη μνήμη, αλλά μπορεί να χάσει κάποια ακρίβεια.

→ αναπαράσταση σε μικρότερες διαστάσεις, χωρίς να χάνουμε πολύ σε ακρίβεια

$\forall \boldsymbol{x}^{(i)} \in \mathfrak{R}^n$ θα υπολογίσουμε το $\boldsymbol{c}^{(i)} \in \mathfrak{R}^l$

Αν $l < n$, η αποθήκευση των c θα απαιτήσει λιγότερη μνήμη από την αποθήκευση των x.

Αναζητούμε τη συνάρτηση κωδικοποίησης $f(x) = c$
και τη συνάρτηση αποκωδικοποίησης $x \approx g(f(c))$

Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών

ε.δε.μ^2
ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

Το PCA ορίζεται από την επιλογή της συνάρτησης αποκωδικοποίησης.

Έστω, $g(c) = Dc$, $D \in R^{n \times l}$

Ο υπολογισμός του βέλτιστου **c** για αυτόν τον αποκωδικοποιητή μπορεί να είναι ένα δύσκολο πρόβλημα.

→ Για να παραμείνει εύκολο το πρόβλημα της κωδικοποίησης,
ο <u>PCA</u> περιορίζει <u>τις στήλες του D ώστε να είναι ορθογώνιες μεταξύ τους.</u>

(ο D δεν είναι ακόμα από τεχνικής απόψεως "ορθογώνιος πίνακας" εκτός και αν l = n)

Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών

→ Πρέπει να δημιουργήσουμε το βέλτιστο c * για κάθε x

Να ελαχιστοποιηθεί η απόσταση μεταξύ του σημείου εισόδου x και της ανακατασκευής του, g (c *) → χρήση νόρμας L^2

$$c^* = \underset{c}{argmin} \|x - g(c)\|_2$$

Επιλέγουμε το τετράγωνο της L^2 νόρμας επειδή είναι μονοτονική και αύξουσα συνάρτηση για θετικές τιμές. Οπότε:

$$c^* = \underset{c}{argmin} \|x - g(c)\|_2^2$$

Οπότε αρκεί να ελαχιστοποιήσουμε το $(x - g(c))^{\mathrm{T}}(x - g(c))$

Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών

$$
\left.\begin{aligned}
c* &= \underset{c}{argmin} - 2x^{\mathrm{T}} g(c) + g(c)^{\mathrm{T}} g(c) \\
c* &= \underset{c}{argmin} - 2x^{\mathrm{T}} Dc + c^{\mathrm{T}} D^T Dc \\
&= \underset{c}{argmin} - 2x^T Dc + c^T I_l c \\
&= \underset{c}{argmin} - 2x^T Dc + c^T c
\end{aligned}\right\}
$$

$$\nabla c(-2x^T Dc + c^T c) = 0$$

$$-2D^T x + 2c = 0$$

$$\boxed{c = D^T x}$$

Μπορούμε να κωδικοποιήσουμε το x χρησιμοποιώντας απλώς έναν πίνακα !

Κωδικοποιητής : $f(x) = D^T x$.
Ανασυγκρότηση PCA : $r(x) = g(f(x)) = DD^T x$

Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών

Πρέπει να επιλέξουμε τον πίνακα κωδικοποίησης D.

→ επανεξετάζουμε την ιδέα της ελαχιστοποίησης της απόστασης L^2 μεταξύ του x και του c

Δεδομένου ότι θα χρησιμοποιήσουμε τον ίδιο πίνακα D για να αποκωδικοποιήσουμε όλα τα σημεία, δεν μπορούμε πλέον να θεωρούμε τα σημεία μεμονωμένα.

Αντ 'αυτού, πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε την νόρμα Frobenius του πίνακα σφαλμάτων, λαμβάνοντας υπόψη όλες τις διαστάσεις και όλα τα σημεία.

$$D^* = \underset{D}{argmin}\sqrt{\sum_{i,j}(x_j^{(i)} - r(x^{(i)})_j)^2}$$

υπό την προϋπόθεση ότι $D^{\mathrm{T}}D = \mathbf{I}_l$

Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών

ε.δε.μ^2
ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

Εύρεση του D*

$l = 1$: D→ vector d οπότε το πρόβλημα μειώνεται σε $r(x) = DD^{\mathrm{T}}x$

$$d^* = \underset{d}{argmin} \sum_i \left\|(x_i^{(i)} - dd^T x^{(i)})\right\|_2^2$$

$$d^* = \underset{d}{argmin} \sum_i \left\|(x_i^{(i)} - d^T x^{(i)} d)\right\|_2^2$$

$$d^* = \underset{d}{argmin} \sum_i \left\|(x_i^{(i)} - x^{(i)T} dd)\right\|_2^2$$

υπό την προϋπόθεση ότι

$$||d||_2 = 1$$

Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών

$$d^* = \underset{d}{argmin} \| (X - Xdd^T) \|_F^2$$

υπό την προϋπόθεση ότι

$$d^T d = 1$$

$$\underset{d}{argmax} Tr(d^T X^T X d)$$

Πρόβλημα βελτιστοποίησης → χρήση eigendecomposition.

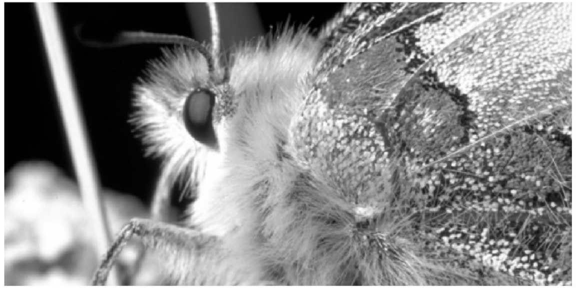
Συγκεκριμένα, η βέλτιστη d δίνεται από τον ιδιοδιάνυσμα του X^TX που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη ιδιοτιμή.

Αυτή η παράγωγος είναι ειδική για την περίπτωση του l = 1 και ανακτά μόνο το πρώτο κύριο συστατικό.

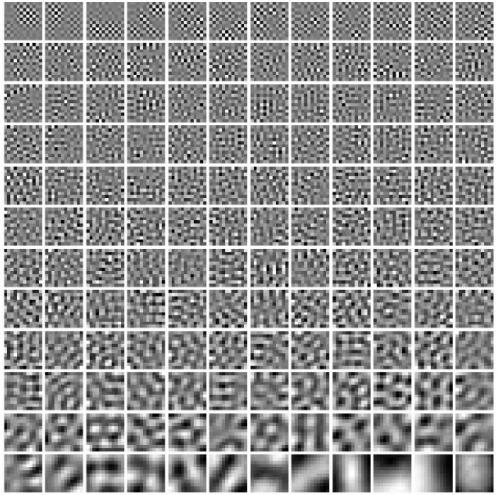
Γενικότερα, όταν θέλουμε να ανακτήσουμε μια βάση των κύριων συστατικών, η μήτρα D δίνεται από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις μεγαλύτερες

Εφαρμογές : Συμπίεση εικόνας

PCA example — original

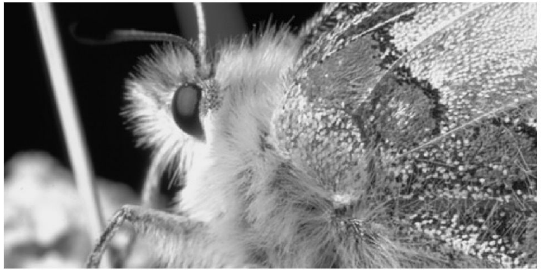


PCA example — PCA basis



PCA example — 90% compressed

PCA example — 50% compressed



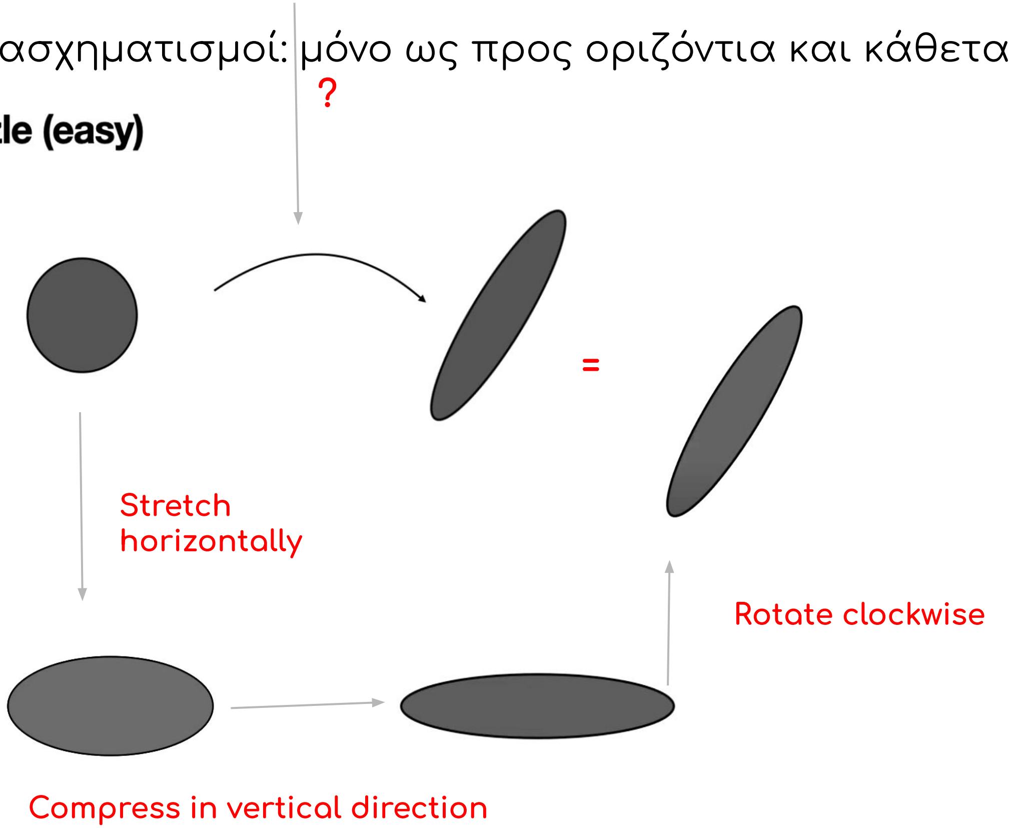
[Implementing a Principal Component Analysis (PCA)]()

Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

ε.δε.μ²
ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

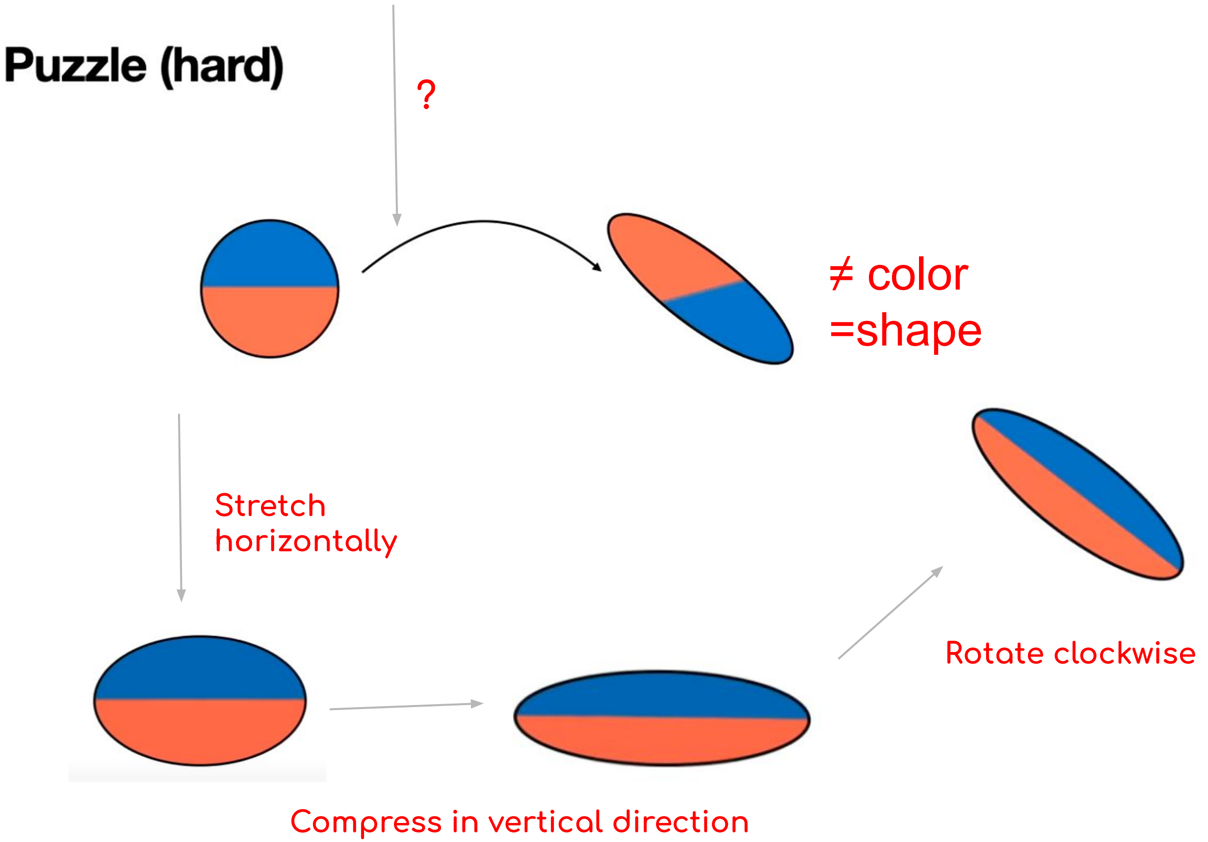
Μετασχηματισμοί: μόνο ως προς οριζόντια και κάθετα κατεύθυνση, όχι υπό άλλη γωνία

Puzzle (easy)



4.5 SingularValueDecomposition pg 119
MATHEMATICS FOR MACHINE LEARNING

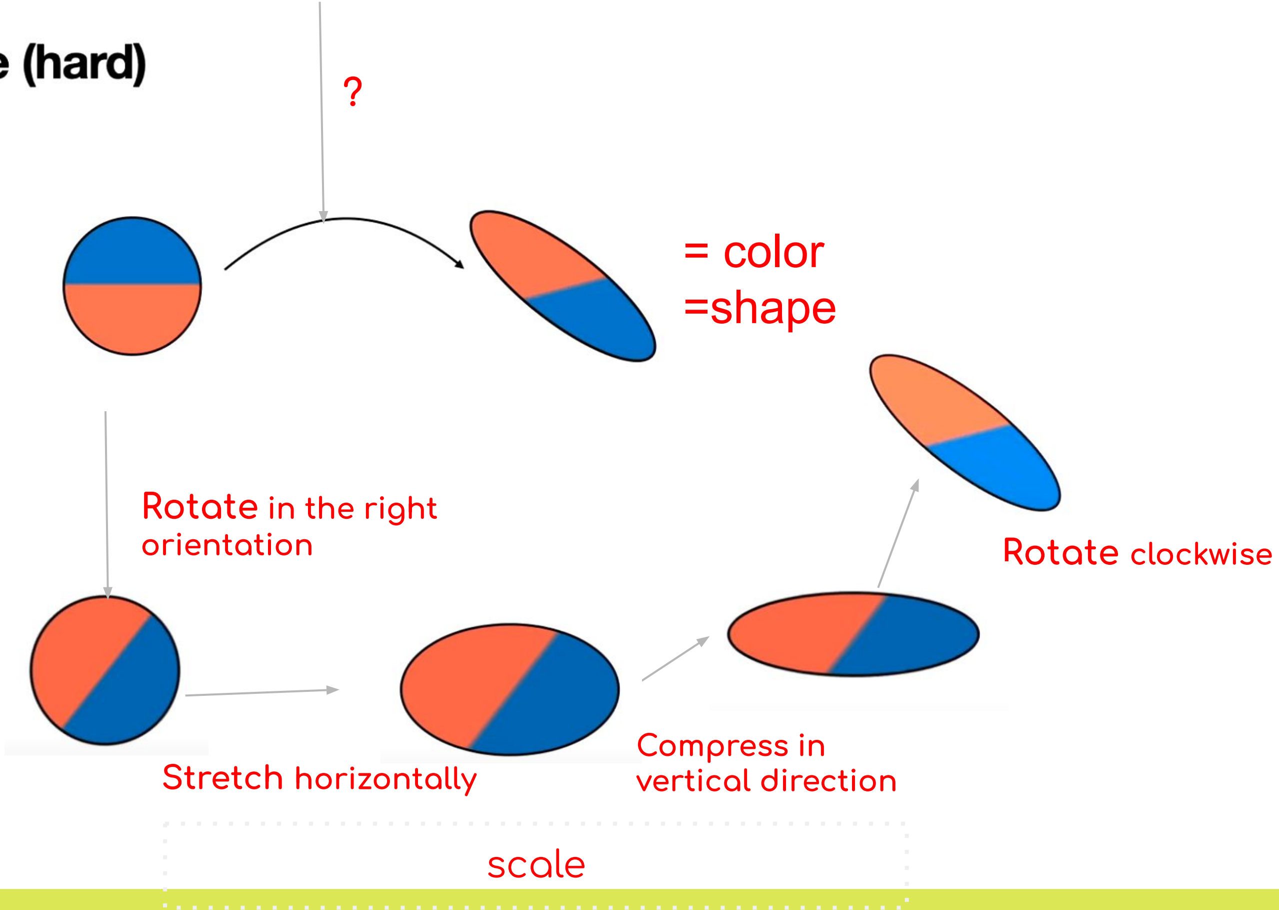
Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



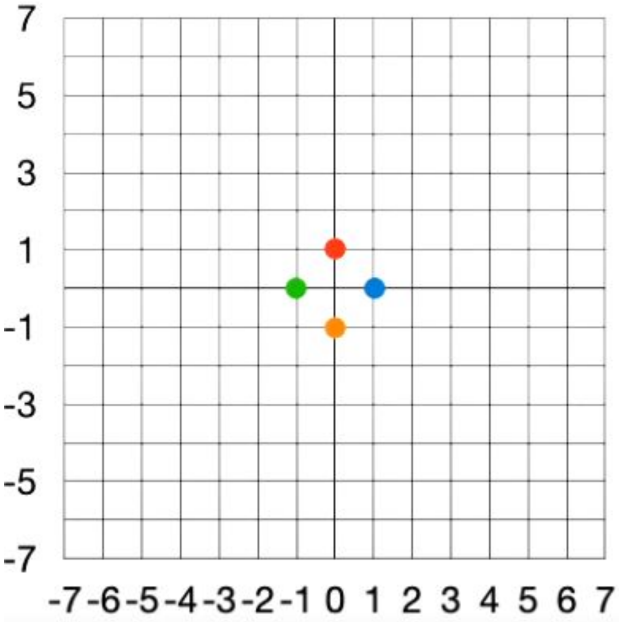
Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

Puzzle (hard)

<u>Λύση</u>
Με περιστροφή, κλιμάκωση και περιστροφή μπορούμε να μιμηθούμε κάθε γραμμικό μετασχηματισμό

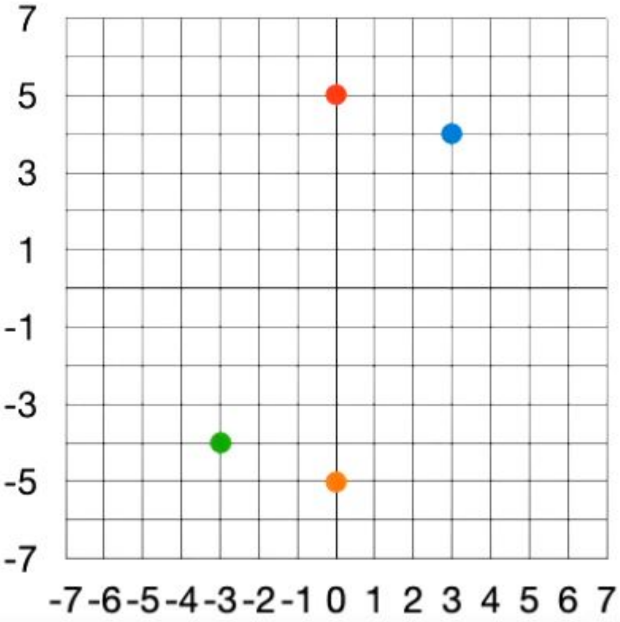


Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

(p,q)	(3p+0q, 4p+5q)
(1,0)	(3, 4)
(0,1)	(0, 5)
(-1,0)	(-3, -4)
(0,-1)	(0, -5)

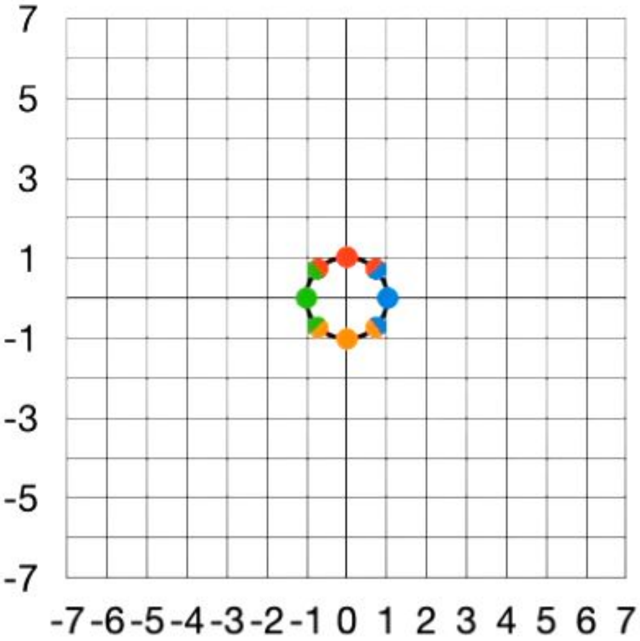


Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

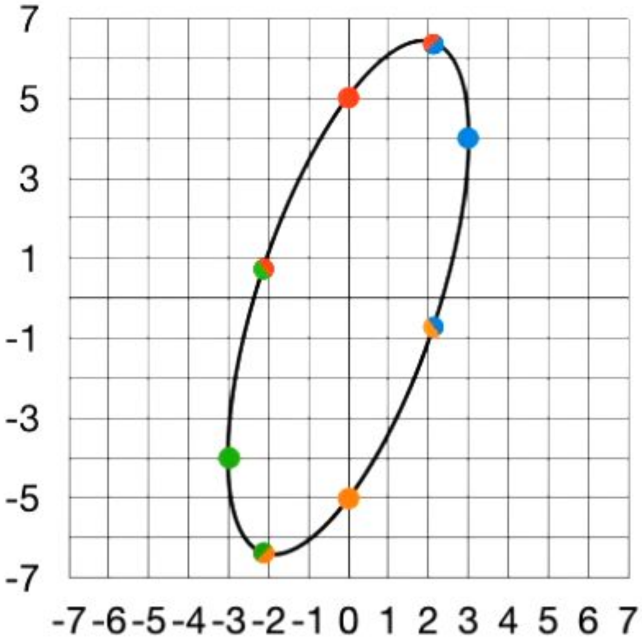
ε.δε.μ^2
ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

Γραμμικός μετασχηματισμός

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

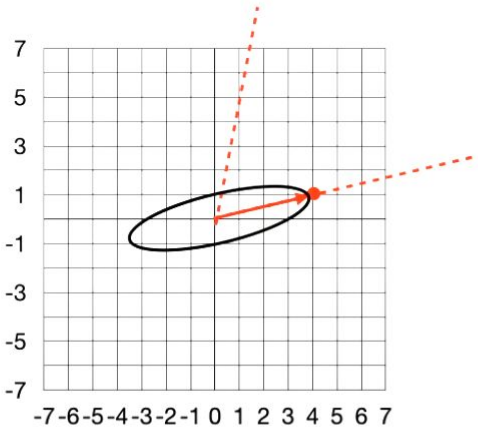


(p,q)	(3p+0q, 4p+5q)
(1,0)	(3, 4)
(0,1)	(0, 5)
(-1,0)	(-3, -4)
(0,-1)	(0, -5)

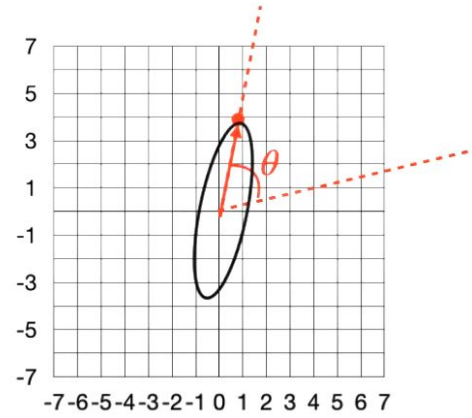


Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

Πίνακας περιστροφής



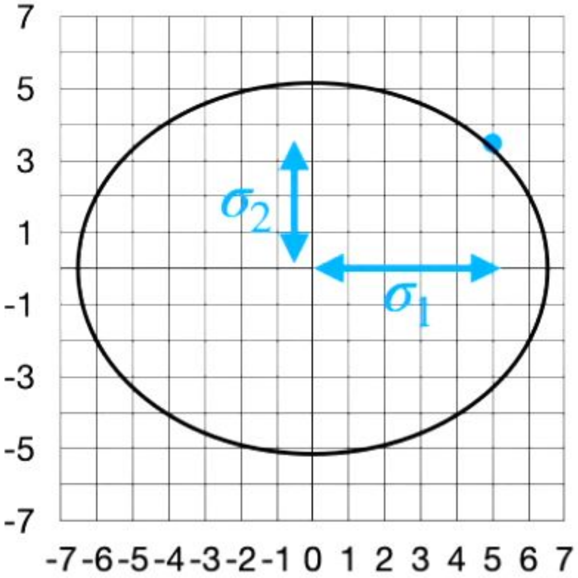
$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$



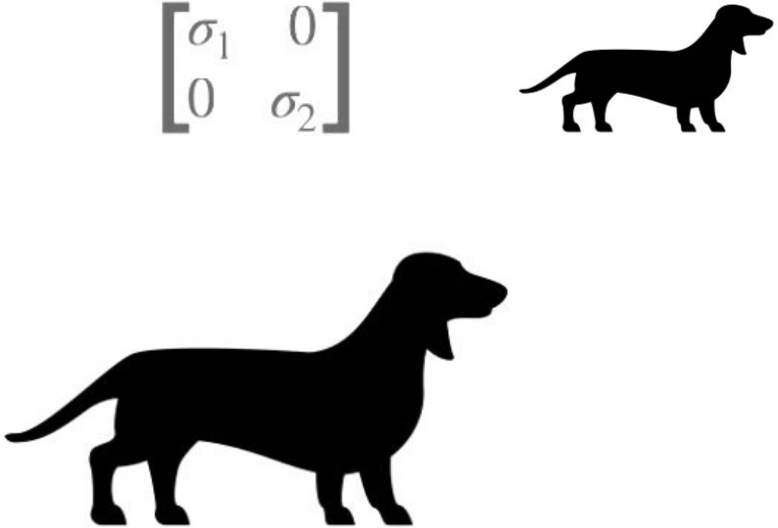
$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

Πίνακας κλιμάκωσης

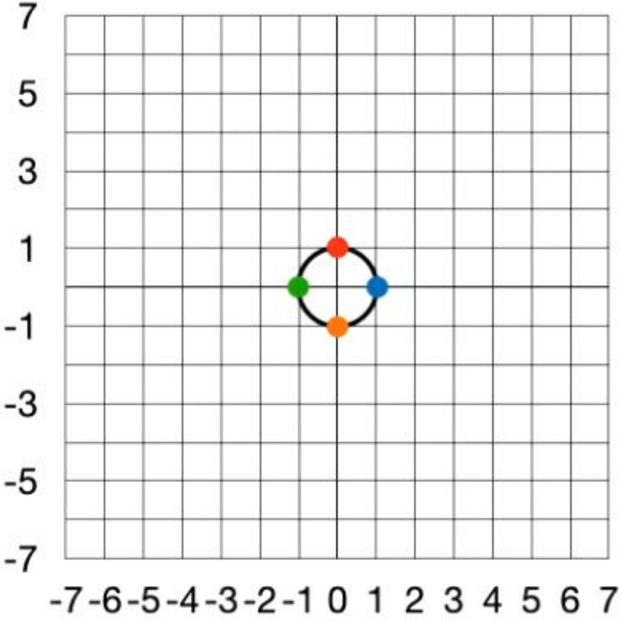


$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

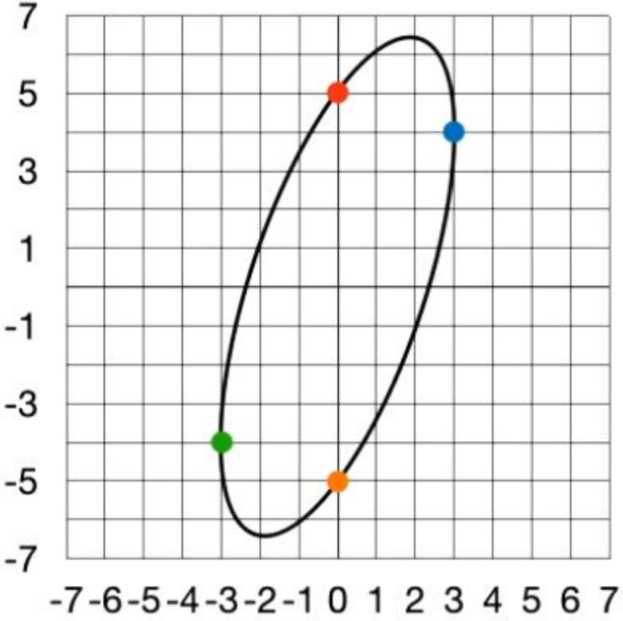
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

WolframAlpha computational intelligence.

singular value decomposition [[3,0],[4,5]]

Extended Keyboard   Upload

Input:

singular value decomposition $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Result:

$M = U.\Sigma.V^{\dagger}$

where

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3\sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$A = U\Sigma V^{\dagger}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

```python
from numpy.linalg import svd
A = np.array([[3,0],[4,5]])
svd(A)
```

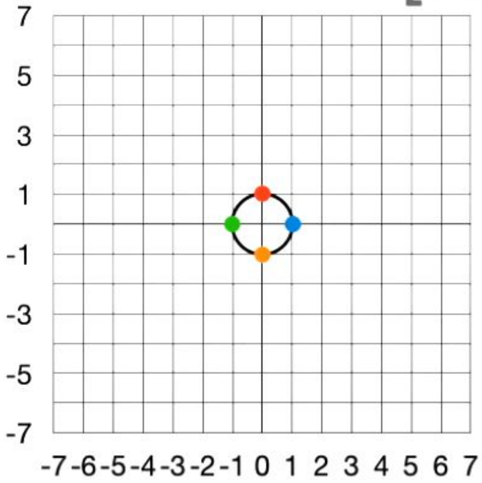
```
(array([[-0.31622777, -0.9486833 ],
        [-0.9486833 ,  0.31622777]]),
 array([6.70820393, 2.23606798]),
 array([[-0.70710678, -0.70710678],
        [-0.70710678,  0.70710678]]))
```

Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

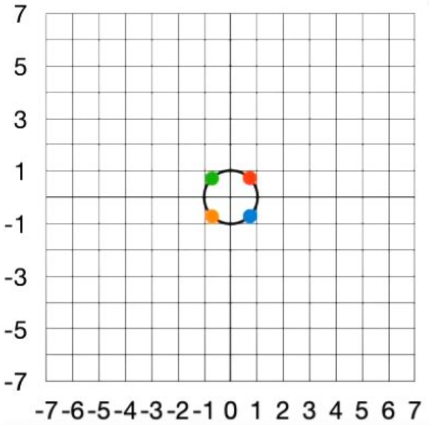
$$A = U\Sigma V^\dagger$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.316 & -0.949 \\ 0.949 & 0.316 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6.708 & 0 \\ 0 & 2.236 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

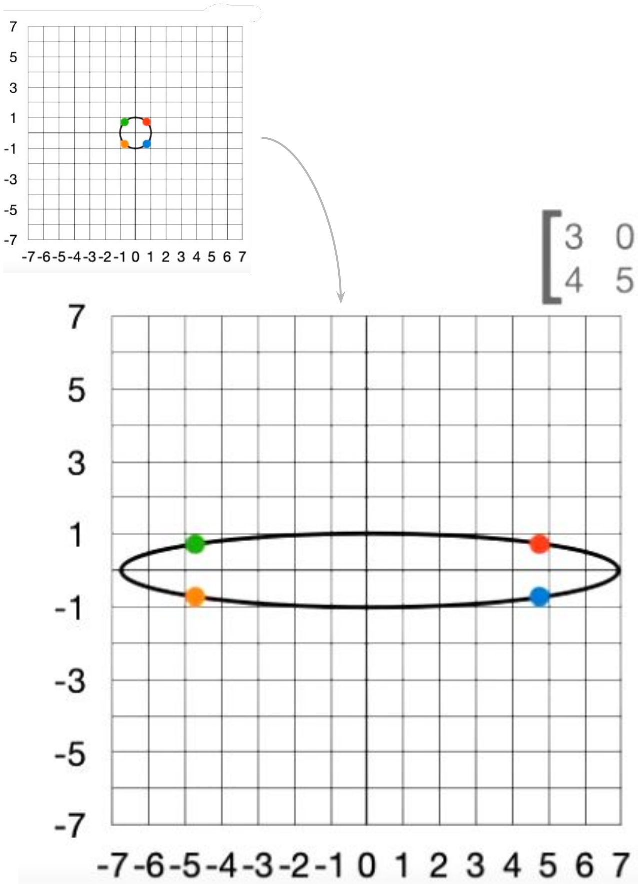
$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3\sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}\boxed{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}$$



Rotation of $\theta = -\dfrac{\pi}{4} = -45^o$



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



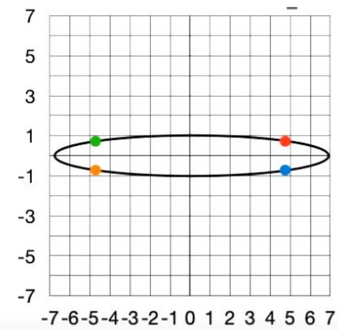
$$A = U\Sigma V^{\dagger}$$

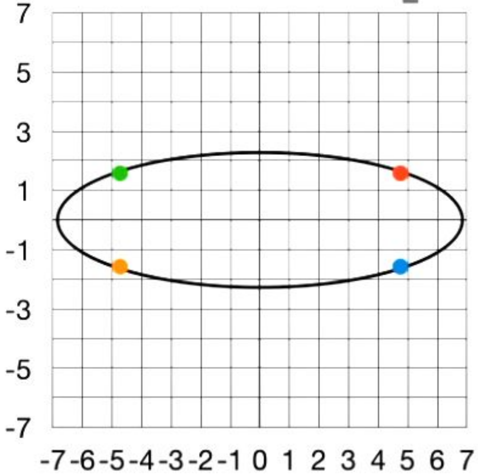
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.316 & -0.949 \\ 0.949 & 0.316 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.708 & 0 \\ 0 & 2.236 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{3\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Horizontal scaling by $3\sqrt{5}$

Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



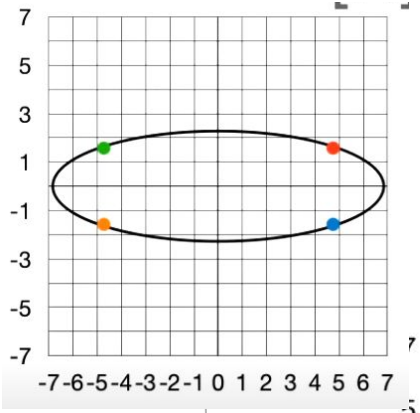


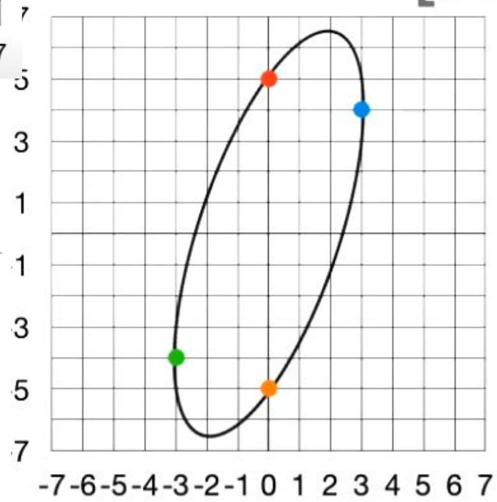
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.316 & -0.949 \\ 0.949 & 0.316 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.708 & 0 \\ 0 & 2.236 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\sqrt{5} & 0 \\ 0 & \boxed{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Vertical scaling by $\sqrt{5}$

Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



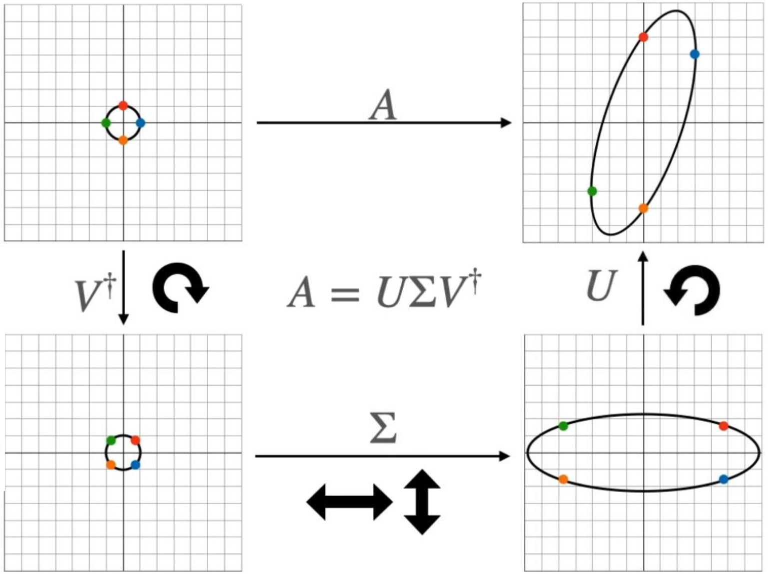


$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.316 & -0.949 \\ 0.949 & 0.316 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.708 & 0 \\ 0 & 2.236 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 3\sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Rotation of $\theta = \arctan(3) = 71.72^o$

Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3\sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}\boxed{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}$$

Rotation of $\theta = -\dfrac{\pi}{4} = -45^o$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} 3\sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Rotation of $\theta = \arctan(3) = 71.72^o$

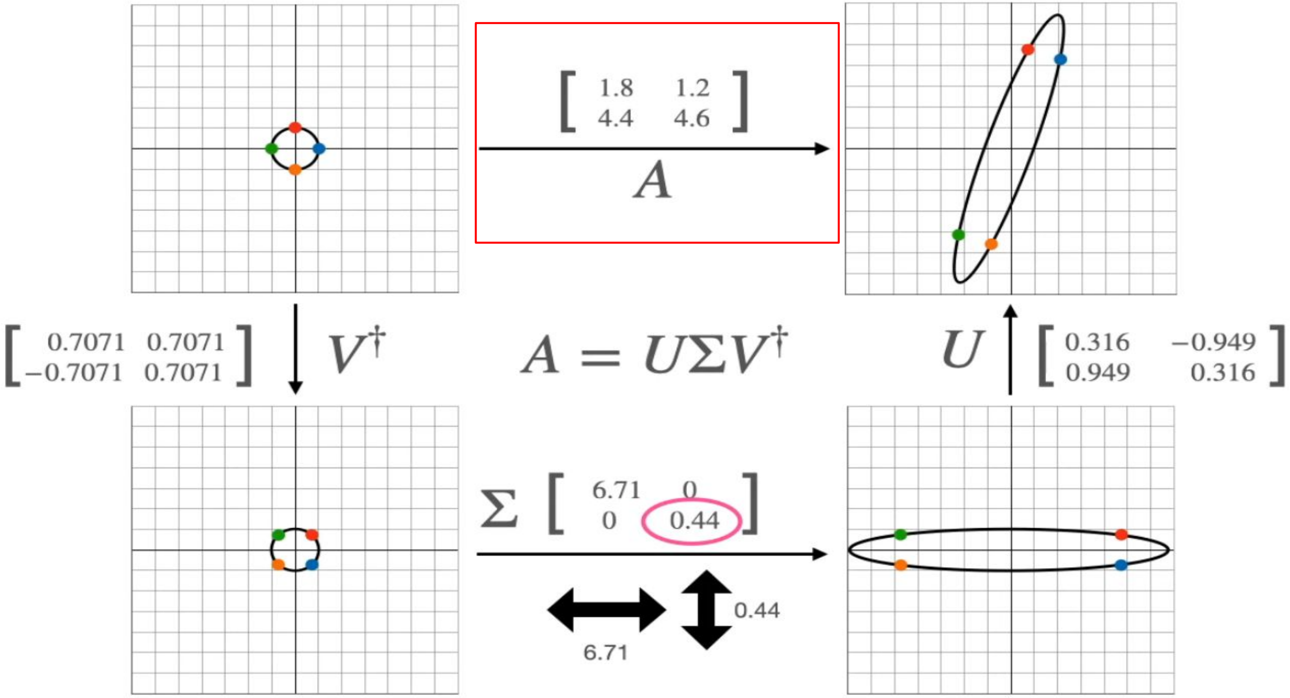
$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boxed{3\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \boxed{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Horizontal scaling by $3\sqrt{5}$

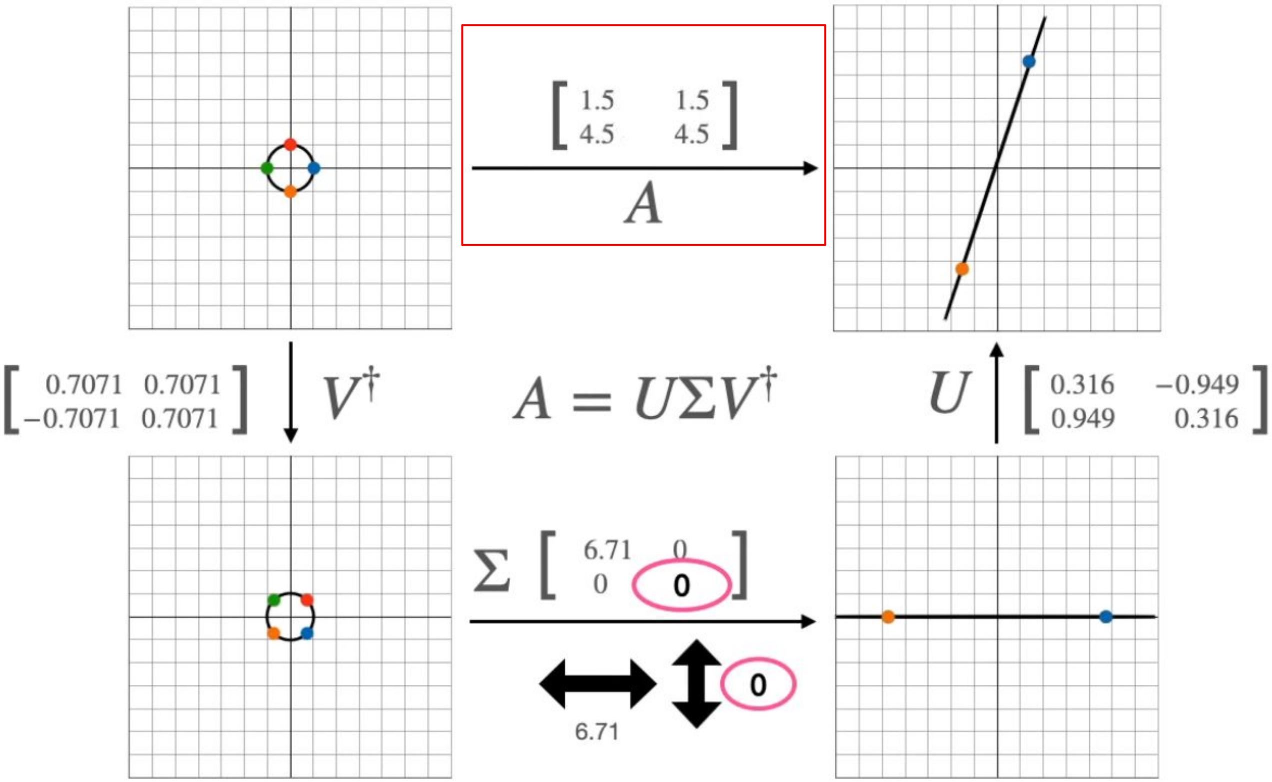
Vertical scaling by $\sqrt{5}$

Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

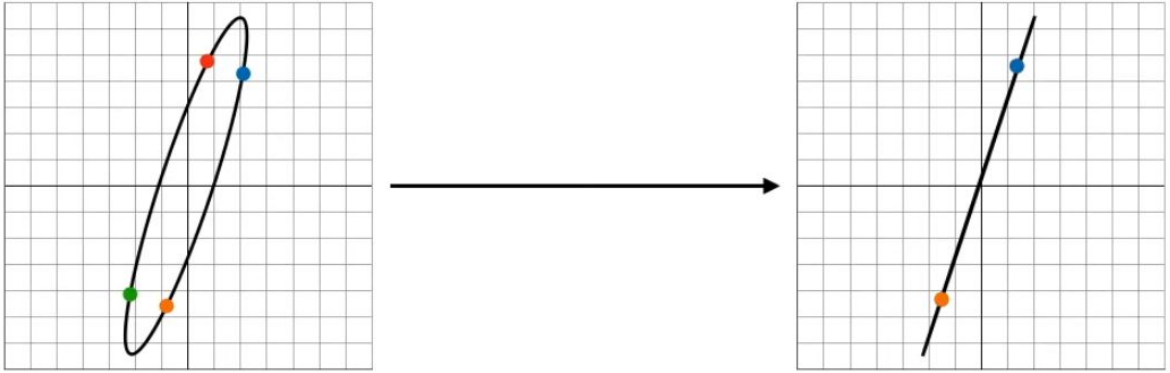
Μείωση διαστάσεων



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



$$\begin{bmatrix} 1.8 & 1.2 \\ 4.4 & 4.6 \end{bmatrix}$$

Rank 2

$$\begin{bmatrix} 1.5 & 1.5 \\ 4.5 & 4.5 \end{bmatrix}$$

Rank 1

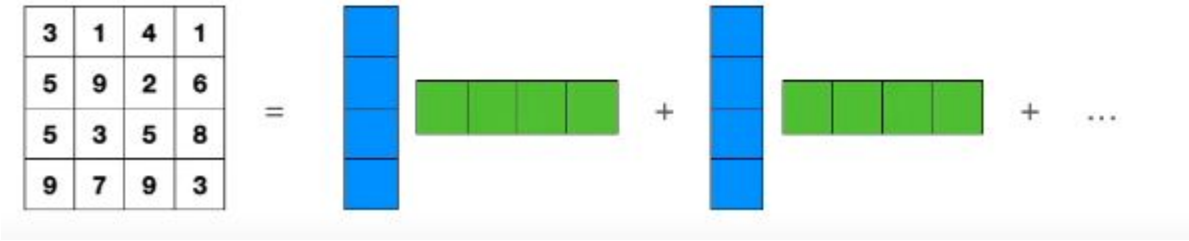
Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

Πίνακας με rank=1

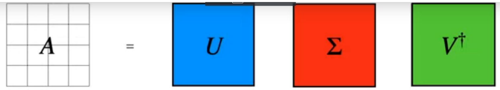
$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
-1 & -1 & -2 & -3 & -4 \\
2 & 2 & 4 & 6 & 8 \\
10 & 10 & 20 & 30 & 40
\end{array}
\longrightarrow
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 10 & 20 & 30 & 40 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}
$$

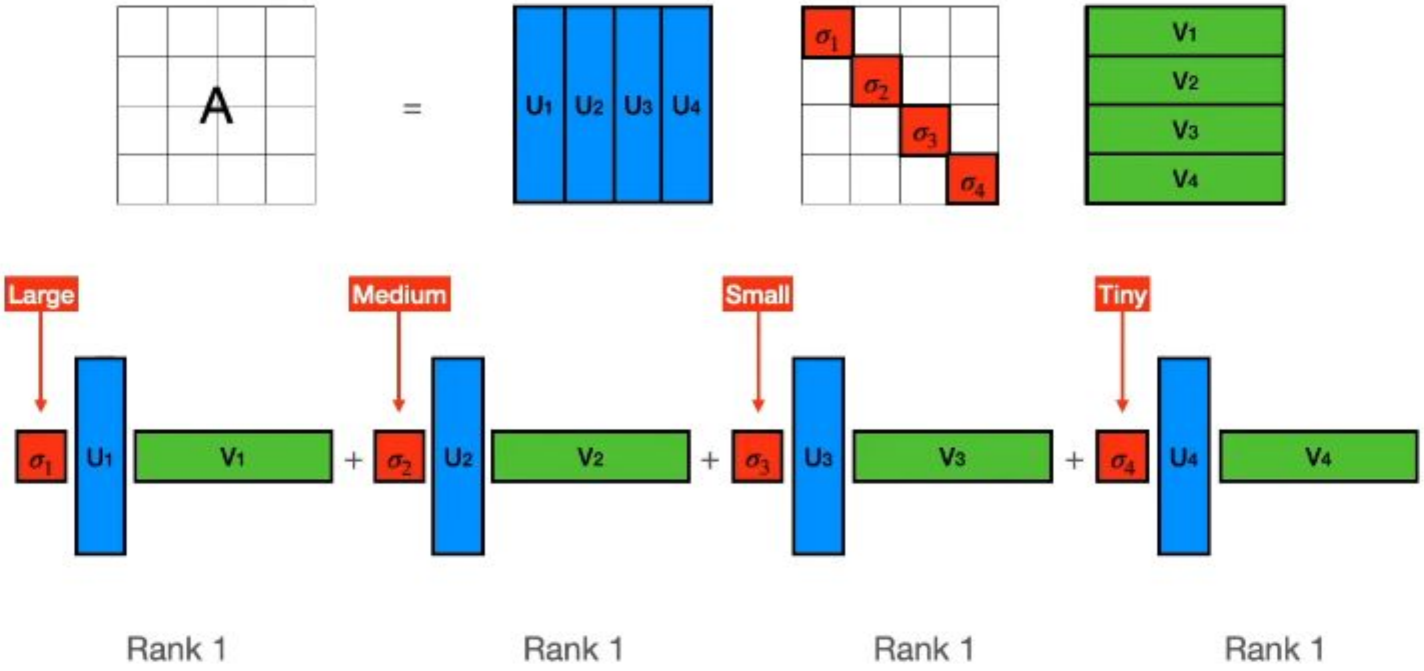
Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

Πίνακας με rank>1 : προσέγγιση όπως λειτουργεί για rank=1

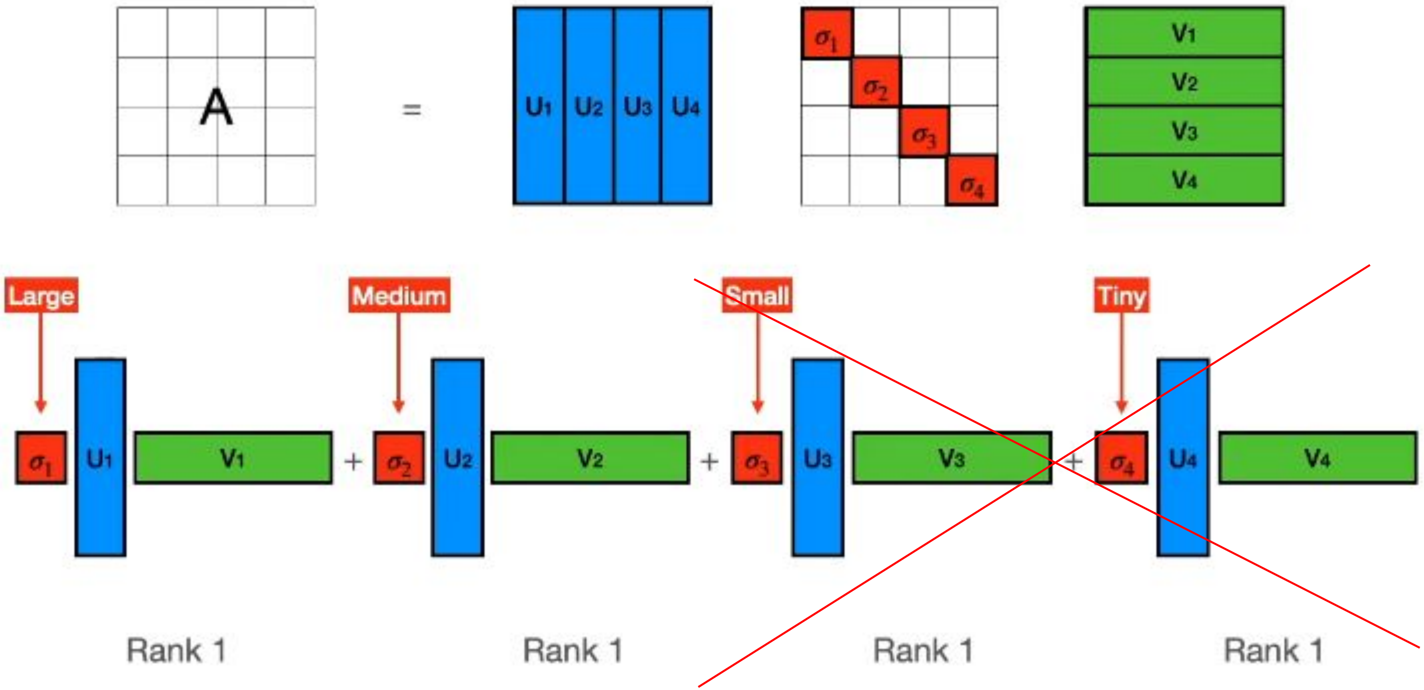


Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

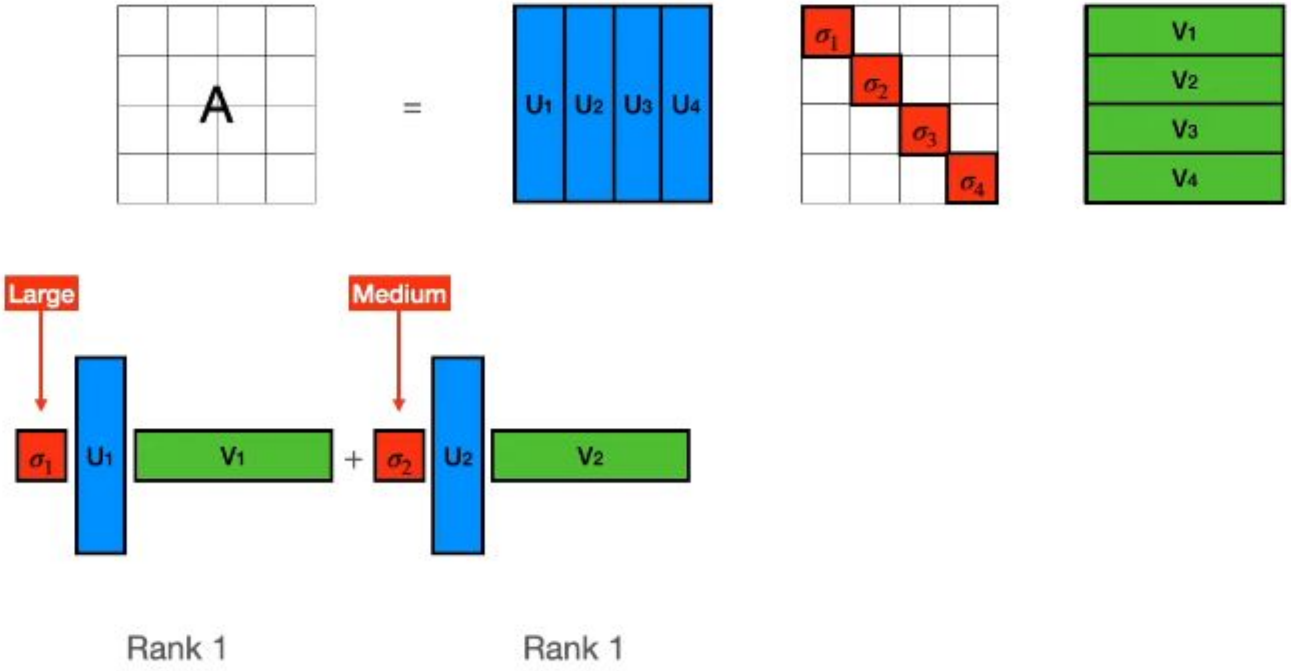




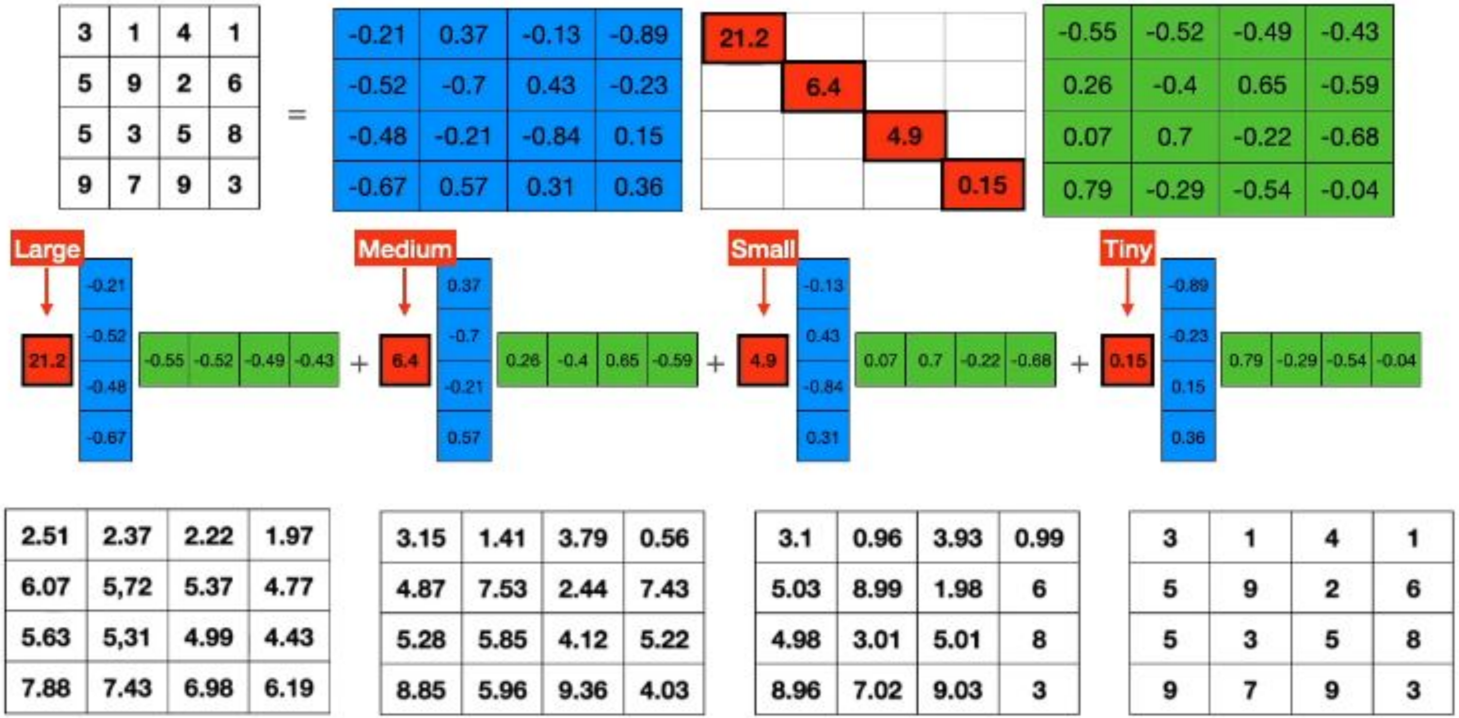
Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

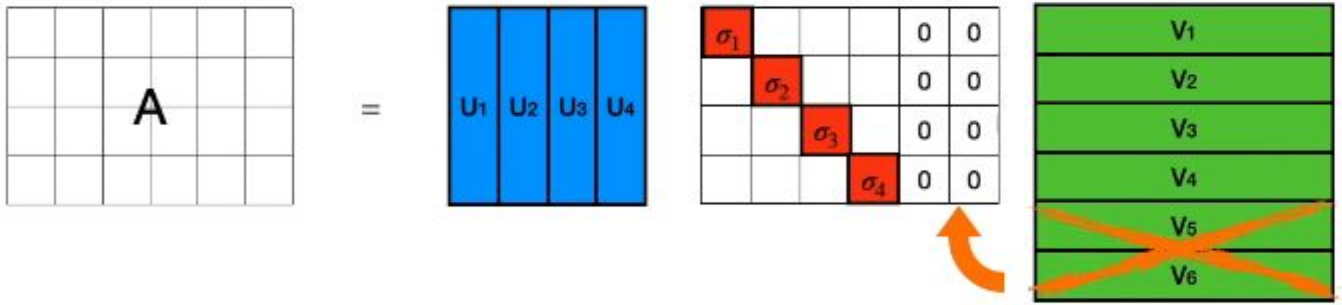
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 9 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 5 & 8 \\ 9 & 7 & 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.21 & 0.37 & -0.13 & -0.89 \\ -0.52 & -0.7 & 0.43 & -0.23 \\ -0.48 & -0.21 & -0.84 & 0.15 \\ -0.67 & 0.57 & 0.31 & 0.36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21.2 & & & \\ & 6.4 & & \\ & & 4.9 & \\ & & & 0.15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.55 & -0.52 & -0.49 & -0.43 \\ 0.26 & -0.4 & 0.65 & -0.59 \\ 0.07 & 0.7 & -0.22 & -0.68 \\ 0.79 & -0.29 & -0.54 & -0.04 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{Large}}{\boxed{21.2}} \begin{bmatrix} -0.21 \\ -0.52 \\ -0.48 \\ -0.67 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.55 & -0.52 & -0.49 & -0.43 \end{bmatrix} + \overset{\text{Medium}}{\boxed{6.4}} \begin{bmatrix} 0.37 \\ -0.7 \\ -0.21 \\ 0.57 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.26 & -0.4 & 0.65 & -0.59 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2.51 & 2.37 & 2.22 & 1.97 \\ 6.07 & 5,72 & 5.37 & 4.77 \\ 5.63 & 5,31 & 4.99 & 4.43 \\ 7.88 & 7.43 & 6.98 & 6.19 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3.15 & 1.41 & 3.79 & 0.56 \\ 4.87 & 7.53 & 2.44 & 7.43 \\ 5.28 & 5.85 & 4.12 & 5.22 \\ 8.85 & 5.96 & 9.36 & 4.03 \end{bmatrix}$$

Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

Μη τετραγωνικός πίνακας;



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

Ανάλυση διανυσμάτων πάνω σε ορθογώνιους άξονες

- Αν ένας πίνακας δεν είναι τετραγωνικός, η ανάλυση ιδιοτιμών δεν ορίζεται.

- Αντ' αυτού, χρησιμοποιούμε την ανάλυση σε ιδιάζουσες τιμές

  Κάθε πίνακας A (mxn) μπορεί να γραφεί ως $A = U\Sigma V^T$

Σημαντική εφαρμογή: Μπορούμε να γενικεύσουμε, εν μέρει, την αντιστροφή ενός μη τετραγωνικού πίνακα

Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

$$A = U\Sigma V^T$$

Όπου U: Ορθογώνιος πίνακας mxm → Περιστροφή (Rotation)

Σ: Διαγώνιος πίνακας διάστασης mxn → Έκταση (Stretch)
(όχι απαραίτητα τετραγωνικός)

V: Ορθογώνιος πίνακας nxn → Περιστροφή (Rotation)

$$A = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \end{bmatrix}$$

Left singular vector

singular values

Right singular vector

wikipedia:SV

Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

Τι είναι τα U, Σ, V^T

Ίδιος πίνακας

$$A = \underline{V}\Lambda\underline{V}^{-1}$$

Διαφορετικοί Πίνακες

$$A = \underline{U}\Sigma\underline{V}^T$$

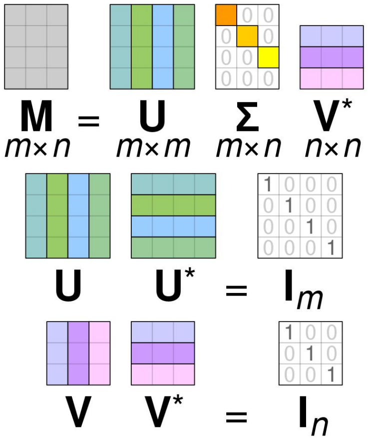
Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

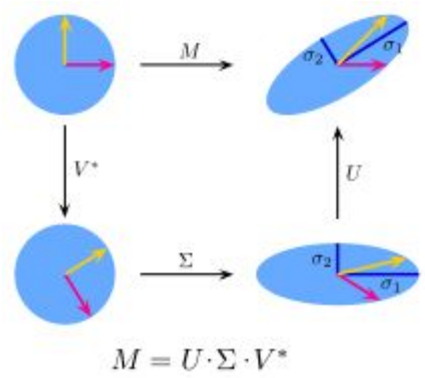
λ, για A^TA
σ^2, για A

$$A = U\Sigma V^T$$

$$\boxed{A^T A} = (V\Sigma^T U^T)U\Sigma V^T = V\Sigma^T(U^T U)\Sigma V^T = V\boxed{(\Sigma^T \Sigma)}V^T$$

$$AA^T = U\Sigma V^T(V\Sigma^T U^T) = U\Sigma(V^T V)\Sigma^T U^T = U(\Sigma\Sigma^T)U^T$$





Βήμα προς βήμα με python

[Deep Learning Book Series · 2.8 Singular Value Decomposition]

A : πίνακας που μπορούμε να τον "δούμε" ως γραμμικό μετασχηματισμό που μπορεί να αναλυθεί σε 3 υπό- μετασχηματισμούς (αντιστοιχούν σε 3 πίνακες) :

1. Περιστροφή,

2. Έκταση,

3. Περιστροφή.

Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

GitHub

www.github.com/luisguiserrano/singular_value_decomposition

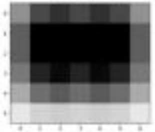
0	1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0

```
[[-0.36 -0.   -0.73 -0.05  0.56  0.13]
 [-0.54  0.35  0.27 -0.08 -0.16  0.69]
 [-0.54  0.35  0.27 -0.08  0.16 -0.69]
 [-0.45 -0.35 -0.27  0.52 -0.56 -0.13]
 [-0.28 -0.71  0.18 -0.62 -0.   -0.  ]
 [-0.08 -0.35  0.46  0.57  0.56  0.13]]
```

```
[[4.74 0.   0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.   1.41 0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.   1.41 0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.   0.73 0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.   0.   0.   0.   0. ]]
```

```
[[-0.23 -0.4  -0.46 -0.4  -0.46 -0.4  -0.23]
 [ 0.5   0.25 -0.25 -0.5  -0.25  0.25  0.5 ]
 [ 0.39 -0.32 -0.19  0.65 -0.19 -0.32  0.39]
 [-0.22  0.42 -0.44  0.42 -0.44  0.42 -0.22]
 [ 0.56 -0.43  0.03  0.   -0.03  0.43 -0.56]
 [-0.42 -0.55 -0.16  0.    0.16  0.55  0.42]
 [-0.12 -0.11  0.69 -0.   -0.69  0.11  0.12]]
```

4.74



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

GitHub

www.github.com/luisguiserrano/singular_value_decomposition

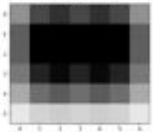
0	1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0

```
[[-0.36 -0.   -0.73 -0.05  0.56  0.13]
 [-0.54  0.35  0.27 -0.08 -0.16  0.69]
 [-0.54  0.35  0.27 -0.08  0.16 -0.69]
 [-0.45 -0.35 -0.27  0.52 -0.56 -0.13]
 [-0.28 -0.71  0.18 -0.62 -0.   -0.  ]
 [-0.08 -0.35  0.46  0.57  0.56  0.13]]
```

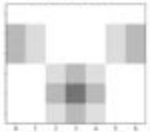
```
[[4.74 0.   0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.   1.41 0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.   1.41 0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.   0.73 0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.   0.   0.   0.   0. ]]
```

```
[[-0.23 -0.4  -0.46 -0.4  -0.46 -0.4  -0.23]
 [ 0.5   0.25 -0.25 -0.5  -0.25  0.25  0.5 ]
 [ 0.39 -0.32 -0.19  0.65 -0.19 -0.32  0.39]
 [-0.22  0.42 -0.44  0.42 -0.44  0.42 -0.22]
 [ 0.56 -0.43  0.03  0.   -0.03  0.43 -0.56]
 [-0.42 -0.55 -0.16  0.    0.16  0.55  0.42]
 [-0.12 -0.11  0.69 -0.    -0.69  0.11  0.12]]
```

4.74



1.41



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

GitHub

www.github.com/luisguiserrano/singular_value_decomposition

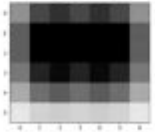
0	1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0

```
[[-0.36 -0.   -0.73 -0.05  0.56  0.13]
 [-0.54  0.35  0.27 -0.08 -0.16  0.69]
 [-0.54  0.35  0.27 -0.08  0.16 -0.69]
 [-0.45 -0.35 -0.27  0.52 -0.56 -0.13]
 [-0.28 -0.71  0.18 -0.62 -0.   -0.  ]
 [-0.08 -0.35  0.46  0.57  0.56  0.13]]
```

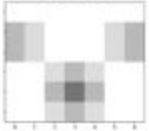
```
[[4.74 0.   0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.   1.41 0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.   1.41 0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.   0.73 0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.   0.   0.   0.   0. ]]
```

```
[[-0.23 -0.4  -0.46 -0.4  -0.46 -0.4  -0.23]
 [ 0.5   0.25 -0.25 -0.5  -0.25  0.25  0.5 ]
 [ 0.39 -0.32 -0.19  0.65 -0.19 -0.32  0.39]
 [-0.22  0.42 -0.44  0.42 -0.44  0.42 -0.22]
 [ 0.56 -0.43  0.03  0.   -0.03  0.43 -0.56]
 [-0.42 -0.55 -0.16  0.    0.16  0.55  0.42]
 [-0.12 -0.11  0.69 -0.   -0.69  0.11  0.12]]
```

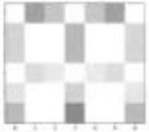
4.74



1.41



1.41



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

GitHub

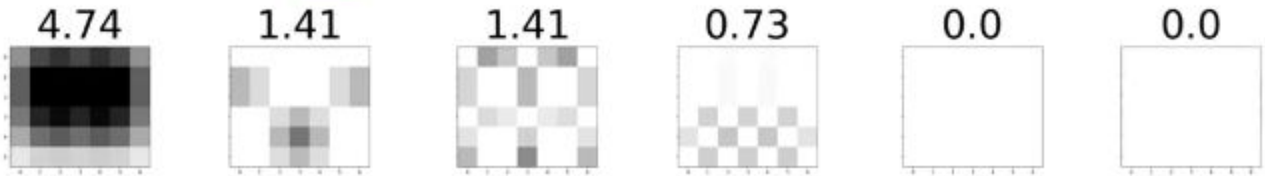
www.github.com/luisguiserrano/singular_value_decomposition

0	1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0

```
[[-0.36 -0.   -0.73 -0.05  0.56  0.13]
 [-0.54  0.35  0.27 -0.08 -0.16  0.69]
 [-0.54  0.35  0.27 -0.08  0.16 -0.69]
 [-0.45 -0.35 -0.27  0.52 -0.56 -0.13]
 [-0.28 -0.71  0.18 -0.62 -0.   -0.  ]
 [-0.08 -0.35  0.46  0.57  0.56  0.13]]
```

```
[[4.74 0.   0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.   1.41 0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.   1.41 0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.   0.73 0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.   0.   0.   0.   0. ]]
```

```
[[-0.23 -0.4  -0.46 -0.4  -0.46 -0.4  -0.23]
 [ 0.5   0.25 -0.25 -0.5  -0.25  0.25  0.5 ]
 [ 0.39 -0.32 -0.19  0.65 -0.19 -0.32  0.39]
 [-0.22  0.42 -0.44  0.42 -0.44  0.42 -0.22]
 [ 0.56 -0.43  0.03  0.   -0.03  0.43 -0.56]
 [-0.42 -0.55 -0.16  0.    0.16  0.55  0.42]
 [-0.12 -0.11  0.69 -0.   -0.69  0.11  0.12]]
```



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

GitHub

www.github.com/luisguiserrano/singular_value_decomposition

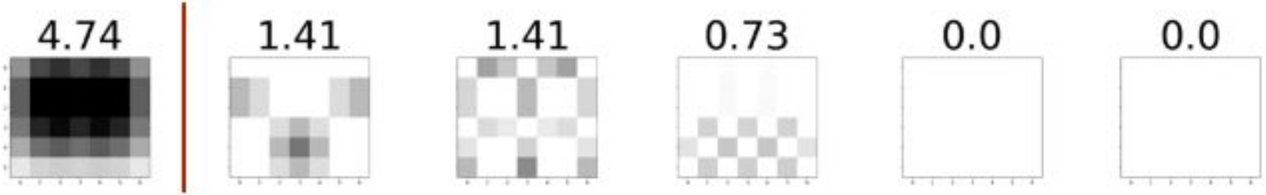
0	1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0

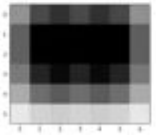
```
[[-0.36 -0.   -0.73 -0.05  0.56  0.13]
 [-0.54  0.35  0.27 -0.08 -0.16  0.69]
 [-0.54  0.35  0.27 -0.08  0.16 -0.69]
 [-0.45 -0.35 -0.27  0.52 -0.56 -0.13]
 [-0.28 -0.71  0.18 -0.62 -0.   -0.  ]
 [-0.08 -0.35  0.46  0.57  0.56  0.13]]

[[4.74 0.   0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.   1.41 0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.   1.41 0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.   0.73 0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.   0.   0.   0.   0. ]]

[[-0.23 -0.4  -0.46 -0.4  -0.46 -0.4  -0.23]
 [ 0.5   0.25 -0.25 -0.5  -0.25  0.25  0.5 ]
 [ 0.39 -0.32 -0.19  0.65 -0.19 -0.32  0.39]
 [-0.22  0.42 -0.44  0.42 -0.44  0.42 -0.22]
 [ 0.56 -0.43  0.03  0.   -0.03  0.43 -0.56]
 [-0.42 -0.55 -0.16  0.    0.16  0.55  0.42]
 [-0.12 -0.11  0.69 -0.   -0.69  0.11  0.12]
```

4.74 1.41 1.41 0.73 0.0 0.0





Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

GitHub

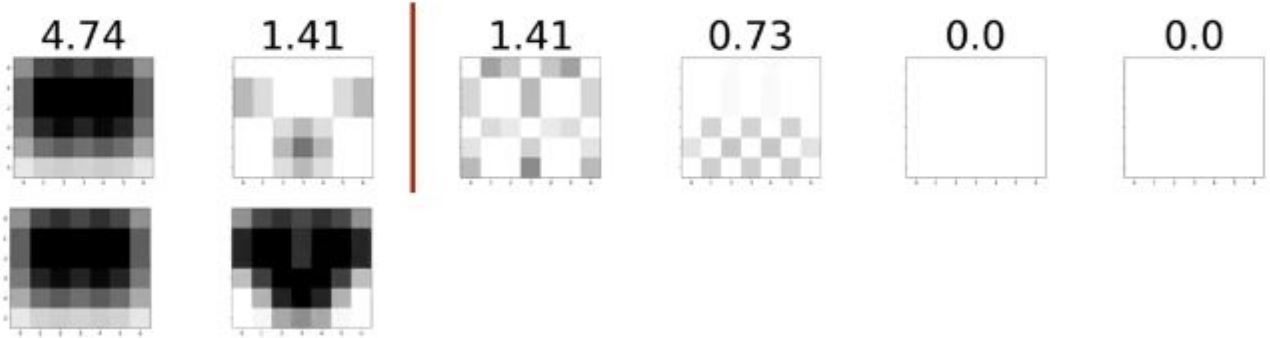
www.github.com/luisguiserrano/singular_value_decomposition

0	1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0

```
[[-0.36 -0.   -0.73 -0.05  0.56  0.13]
 [-0.54  0.35  0.27 -0.08 -0.16  0.69]
 [-0.54  0.35  0.27 -0.08  0.16 -0.69]
 [-0.45 -0.35 -0.27  0.52 -0.56 -0.13]
 [-0.28 -0.71  0.18 -0.62 -0.   -0.  ]
 [-0.08 -0.35  0.46  0.57  0.56  0.13]]
```

```
[[4.74 0.   0.   0.   0.   0.   0.  ]
 [0.   1.41 0.   0.   0.   0.   0.  ]
 [0.   0.   1.41 0.   0.   0.   0.  ]
 [0.   0.   0.   0.73 0.   0.   0.  ]
 [0.   0.   0.   0.   0.   0.   0.  ]
 [0.   0.   0.   0.   0.   0.   0.  ]]
```

```
[[-0.23 -0.4  -0.46 -0.4  -0.46 -0.4  -0.23]
 [ 0.5   0.25 -0.25 -0.5  -0.25  0.25  0.5 ]
 [ 0.39 -0.32 -0.19  0.65 -0.19 -0.32  0.39]
 [-0.22  0.42 -0.44  0.42 -0.44  0.42 -0.22]
 [ 0.56 -0.43  0.03  0.   -0.03  0.43 -0.56]
 [-0.42 -0.55 -0.16  0.    0.16  0.55  0.42]
 [-0.12 -0.11  0.69 -0.   -0.69  0.11  0.12]]
```



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

GitHub

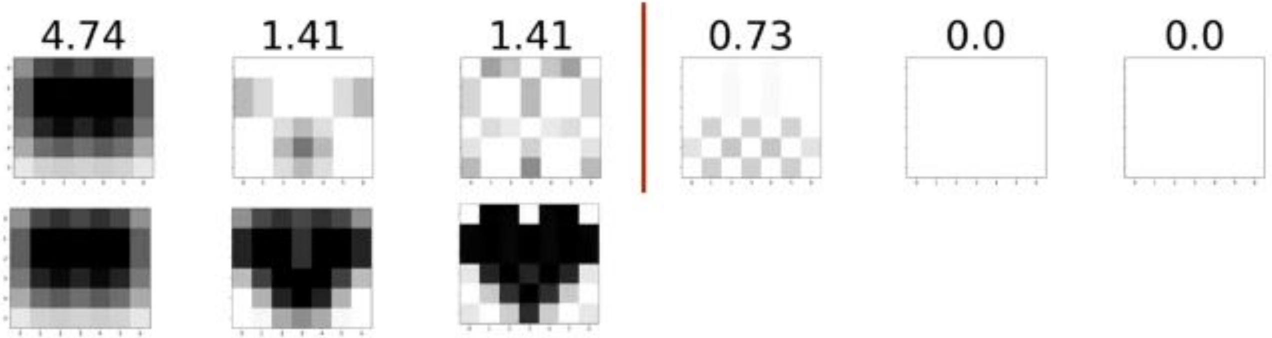
www.github.com/luisguiserrano/singular_value_decomposition

0	1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0

```
[[-0.36 -0.    -0.73 -0.05  0.56  0.13]
 [-0.54  0.35  0.27 -0.08 -0.16  0.69]
 [-0.54  0.35  0.27 -0.08  0.16 -0.69]
 [-0.45 -0.35 -0.27  0.52 -0.56 -0.13]
 [-0.28 -0.71  0.18 -0.62 -0.   -0.  ]
 [-0.08 -0.35  0.46  0.57  0.56  0.13]]
```

```
[[4.74 0.   0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.   1.41 0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.   1.41 0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.   0.73 0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.   0.   0.   0.   0. ]]
```

```
[[-0.23 -0.4  -0.46 -0.4  -0.46 -0.4  -0.23]
 [ 0.5   0.25 -0.25 -0.5  -0.25  0.25  0.5 ]
 [ 0.39 -0.32 -0.19  0.65 -0.19 -0.32  0.39]
 [-0.22  0.42 -0.44  0.42 -0.44  0.42 -0.22]
 [ 0.56 -0.43  0.03  0.   -0.03  0.43 -0.56]
 [-0.42 -0.55 -0.16  0.    0.16  0.55  0.42]
 [-0.12 -0.11  0.69 -0.   -0.69  0.11  0.12]]
```



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

GitHub

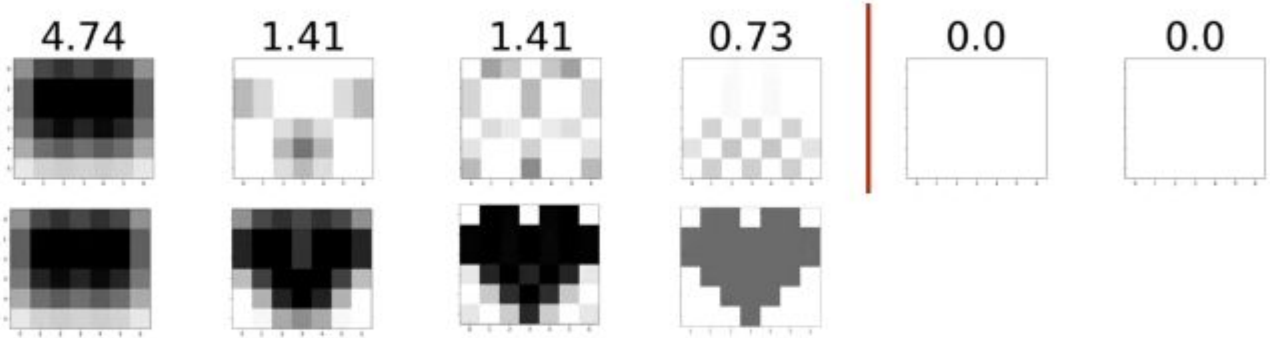
www.github.com/luisguiserrano/singular_value_decomposition

0	1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0

```
[[-0.36 -0.   -0.73 -0.05  0.56  0.13]
 [-0.54  0.35  0.27 -0.08 -0.16  0.69]
 [-0.54  0.35  0.27 -0.08  0.16 -0.69]
 [-0.45 -0.35 -0.27  0.52 -0.56 -0.13]
 [-0.28 -0.71  0.18 -0.62 -0.   -0.  ]
 [-0.08 -0.35  0.46  0.57  0.56  0.13]]
```

```
[[4.74 0.   0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.   1.41 0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.   1.41 0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.   0.73 0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.   0.   0.   0.   0. ]]
```

```
[[-0.23 -0.4  -0.46 -0.4  -0.46 -0.4  -0.23]
 [ 0.5   0.25 -0.25 -0.5  -0.25  0.25  0.5 ]
 [ 0.39 -0.32 -0.19  0.65 -0.19 -0.32  0.39]
 [-0.22  0.42 -0.44  0.42 -0.44  0.42 -0.22]
 [ 0.56 -0.43  0.03  0.   -0.03  0.43 -0.56]
 [-0.42 -0.55 -0.16  0.    0.16  0.55  0.42]
 [-0.12 -0.11  0.69 -0.   -0.69  0.11  0.12]]
```



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

GitHub

www.github.com/luisguiserrano/singular_value_decomposition

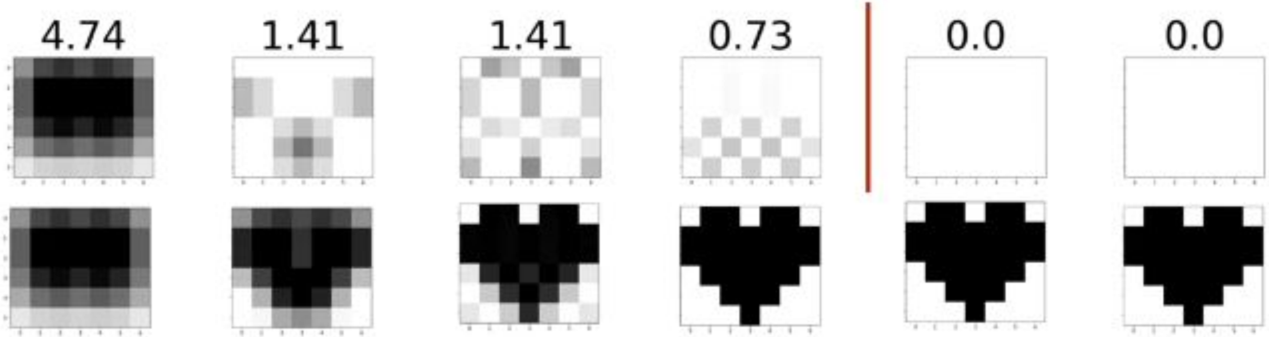
0	1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0

Rank 4

```
[[-0.36 -0.    -0.73 -0.05  0.56  0.13]
 [-0.54  0.35  0.27 -0.08 -0.16  0.69]
 [-0.54  0.35  0.27 -0.08  0.16 -0.69]
 [-0.45 -0.35 -0.27  0.52 -0.56 -0.13]
 [-0.28 -0.71  0.18 -0.62 -0.   -0.  ]
 [-0.08 -0.35  0.46  0.57  0.56  0.13]]
```

```
[[4.74 0.   0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.   1.41 0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.   1.41 0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.   0.73 0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.   0.   0.   0.   0. ]]
```

```
[[-0.23 -0.4  -0.46 -0.4  -0.46 -0.4  -0.23]
 [ 0.5   0.25 -0.25 -0.5  -0.25  0.25  0.5 ]
 [ 0.39 -0.32 -0.19  0.65 -0.19 -0.32  0.39]
 [-0.22  0.42 -0.44  0.42 -0.44  0.42 -0.22]
 [ 0.56 -0.43  0.03  0.   -0.03  0.43 -0.56]
 [-0.42 -0.55 -0.16  0.    0.16  0.55  0.42]
 [-0.12 -0.11  0.69 -0.   -0.69  0.11  0.12]]
```



Moore-Penrose Pseudoinverse

ε.δε.μ²
ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

Η αντιστροφή πίνακα δεν μπορεί να ορισθεί για μη τετραγωνικούς πίνακες.

Λύση: ψευδοαντίστροφος Moore-Penrose

U,D,V: SVD του A

$$A+ = VD^{+}U$$

D^{+}: Ο ψευδο-αντίστροφο ενός διαγώνιου πίνακα D

→ λαμβάνει το αντίστροφο των μη μηδενικών στοιχείων του, και έπειτα παίρνει τον ανάστροφο αυτού.

A_{mxn} - n>m : Μία ή περισσότερες πιθανές λύσεις με χρήση του A+

(x=A+ y με την μικρότερη $||x||^2$ ανάμεσα σε όλες τις πιθανές λύσεις)

m>n : Μπορεί να μην υπάρχει λύση

Ο A+ δίνει τα x για τα οποία το Ax→ y σύμφωνα με τη νόρμα $||Ax - y||^2$

Βιβλιογραφία

Strang Gilbert

→ Linear Algebra and Learning from Data (math.mit.edu/learningfromdata)

→ Introduction to Linear Algebra - Fifth Edition

→ MIT 18.065 Matrix Methods in Data Analysis, Signal Processing, and Machine Learning

Marc Peter Deisenroth, A. Aldo Faisal, and Cheng Soon Ong

→ Mathematics for Machine Learning - Book

→ Mathematics for Machine Learning -github

Ian Goodfellow, Yoshua Bengio, Aaron Courville

→ Deep Learning, Chapter 2: Linear Algebra

2.3. Linear Algebra — Dive into Deep Learning 0.16.1 documentation