ΜΕΡΙΚΕΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ
Β΄ ΕΞΑΜΗΝΟ ΣΕΜΦΕ 2023

Άσκηση 1. *Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι αληθείς και ποιές είναι ψευδείς δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας:*

(1) *Αν* $\lim a_n = 0$ *τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει.*

(2) *Αν* $a_n > 0$ *και* $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει.*

(3) *Αν* $a_n > 0$ *και* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *αποκλίνει.*

(4) *Αν* $a_n > 0$ *και* $\lim(na_n) = 1$ *η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *αποκλίνει.*

(5) *Αν* $a_n > 0$ *και* $\lim(n^2 a_n) = 1$ *η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει.*

(6) *Αν* $a_n > 0$ *και η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει τότε για κάθε επιλογή προσήμων* $\epsilon_n = \pm 1$ *η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n a_n$ *συγκλίνει.*

(7) *Αν* $a_n \in \mathbb{R}$ *και η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *συγκλίνει.*

(8) *Η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \ldots$ *συγκλίνει.*

(9) *Έστω* (a_n) *ακολουθία θετικών αριθμών με* $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$. *Τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n$ *συγκλίνει.*

(10) *Έστω* (a_n) *αύξουσα ακολουθία με* $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$. *Τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(a - a_n)$ *συγκλίνει.*

<u>*Απαντήσεις:*</u> (1) Ψευδής, πχ. $\frac{1}{n} \to 0$ αλλά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

(2) Ψευδής, η υπόθεση απλά σημαίνει ότι η (a_n) είναι μια φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών, πχ. η ακολουθία $a_n = \frac{1}{n}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις αλλά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

(3) Αληθής, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \overset{a_n>0}{\Rightarrow} a_{n+1} \geq a_n$ δηλαδή η (a_n) είναι αύξουσα. Άρα $a_n \geq a_1 > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ οπότε η (a_n) δεν μπορεί να συγκλίνει στο 0. Αυτό σημαίνει ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

(4) Αληθής, η υπόθεση $\lim(na_n) = 1$ γράφεται $\lim \dfrac{a_n}{\frac{1}{n}} = 1$ και άρα από το οριακό κριτήριο σύγκρισης η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει, αφού ως γνωστόν η αρμονική σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ αποκλίνει.

(5) Αληθής, η υπόθεση $\lim(n^2 a_n) = 1$ γράφεται $\lim \dfrac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = 1$ και άρα από το οριακό κριτήριο σύγκρισης η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει, αφού ως γνωστόν η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = +\infty$ συγκλίνει.

(6) Αληθής, διότι όπως γνωρίζουμε αν μια σειρά συγκλίνει απολύτως (δηλαδή η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει) τότε συγκλίνει και κανονικά. Εδώ η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n a_n$, όπου (ϵ_n) είναι μια ακολουθία από $+1$ ή -1 συγκλίνει απολύτως αφού η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\epsilon_n a_n|$ ισούται με την σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ η οποία συγκλίνει από υπόθεση.

(7) Ψευδής, πχ. αν $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$ τότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ συγκλίνει (κριτήριο Dirichlet) αλλά η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = +\infty$.

(8) Ψευδής, η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \dots$ δεν συγκλίνει αφού η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων ταλαντώνεται ($s_{2n} = 0 \to 0$ και $s_{2n-1} = -1 \to -1$).

(9) Αληθής, από το κριτήριο Ρίζας του Cauchy: $\lim \sqrt[n]{a_n^n} = \lim a_n = 1/2 < 1$.

(10) Αληθής, αφού (a_n) αύξουσα με $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$, έπεται ότι η $b_n = a - a_n$ είναι φθίνουσα με $\lim b_n = 0$. Απο κριτήριο Leibniz η εναλλάσσουσα σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(a - a_n)$ συγκλίνει.

Άσκηση 2. *Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών. Με κριτήρια σύγκλισης σειρών δείξτε ότι*

(1) $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow a_n \to 0$.

(2) $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow a_n \to 0$.

Απαντήσεις: Γνωρίζουμε ότι αν μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $a_n \to 0$. Άρα αρκεί να δειχθεί ότι και στις δύο περιπτώσεις η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Για το (1) αυτό έπεται από το Κριτήριο Ρίζας και για το (2) από το Κριτήριο Λόγου.

Άσκηση 3. *Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:*

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, 2^n}{n^n}$.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

(iii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

(v) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

(vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

(vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.

Απαντήσεις: (i) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο Λόγου. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!2^n}{n^n}} = \frac{2^{n+1}}{2^n}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} &= 2\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot (n+1) \\
&= 2\frac{n^n}{(n+1)^n} \\
&= 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}
\end{aligned}$$

και άρα

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$$

Συνεπώς, η σειρά συγκλίνει.

(ii) Έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ συγκλίνει.

(iii) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy.

Πράγματι, η ακολουθία $a_n = \frac{1}{n \cdot \ln n}$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών και άρα η δεδομένη σειρά είναι ισοδύναμη ως προς την σύγκλιση με την $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$. Επειδή

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \cdot \ln(2^n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln 2 \cdot n} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ αποκλίνει.

(iv) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο οριακής σύγκρισης. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει. Πράγματι, $\frac{\frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \to 1$ και επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο οριακής σύγκρισης η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει.

(v) Η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ συγκλίνει. Για να το δείξουμε αυτό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy. Η ακολουθία $a_n = \frac{\ln n}{n^2}$ είναι θετική και φθίνουσα και άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο. Τώρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{\ln 2^n}{(2^n)2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln 2}{2^n}$, με εφαρμογή του κριτηρίου λόγου, βλέπουμε ότι συγκλίνει.

Εναλλακτικά μπορούμε να εφαρμόσουμε το ολοκληρωτικό κριτήριο: Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ είναι θετική και φθίνουσα για $x \geq 2$ (προκύπτει με παραγώγιση). Επίσης, για κάθε $a \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\int_2^a \frac{\ln x}{x^2}\, dx &= \int_2^a \ln x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)'\, dx \\
&= \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_2^a - \int_2^a (\ln x)' \left(-\frac{1}{x}\right)\, dx \\
&= \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_2^a + \int_2^a \frac{1}{x^2}\, dx = -\left[\frac{\ln x}{x}\right]_2^a - \left[\frac{1}{x}\right]_2^a
\end{aligned}$$

και άρα $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx = \lim_{a \to +\infty} \int_2^a \frac{\ln x}{x^2}\, dx = \frac{1 + \ln 2}{2}$ συγκλίνει.

(vi) Έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\arctan(x))}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\sin(\arctan(x)))'}{x'}\\ &= \lim_{x\to 0}(\cos(\arctan(x))\cdot(\arctan x)')\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(\arctan(x))}{1+x^2} = 1\end{aligned}$$

Συνεπώς από Αρχή Μεταφοράς,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

και άρα από το Οριακό κριτήριο σύγκρισης η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ δεν συγκλίνει.

(vii) Έχουμε

$$\begin{aligned}s_n &= (\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\\ &= \sqrt{n+1}-1\end{aligned}$$

Συνεπώς $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-1) = +\infty.$

Άσκηση 4. *Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι αληθείς και ποιές είναι ψευδείς δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας:*

(1) *Έστω* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *και* $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ *τέτοιο ώστε οι μερικές παράγωγοι* $f_x(x_0,y_0)$ *και* $f_y(x_0,y_0)$ *υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί. Τότε η* f *είναι παραγωγίσιμη στο* (x_0,y_0).

(2) *Έστω* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Τότε η* f *είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα σημεία του* $\mathbb{R}^2$.

(3) *Έστω* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *και* $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. *Αν η* f *έχει κατευθυνόμενη παράγωγο* $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0,y_0)$ *κατά οποιαδήποτε κατεύθυνση* $\mathbf{u}$ *του* $\mathbb{R}^2$ *τότε η* f *είναι παραγωγίσιμη στο* (x_0,y_0).

(4) *Έστω* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *και* $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ *τέτοιο ώστε οι* $f_x(x_0,y_0)$, $f_y(x_0,y_0)$ *υπάρχουν (στο* $\mathbb{R}$*). Τότε* $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)u_1+f_y(x_0,y_0)u_2$, *για κάθε* $\mathbf{u}=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$ *μοναδιαίο.*

(5) *Έστω* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *και* $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ *τέτοιο ώστε* $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0,y_0) = u_1^3+u_2^3$, *για κάθε* $\mathbf{u}=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$ *μοναδιαίο. Τότε η* f *δεν είναι παραγωγίσιμη στο* (x_0,y_0).

Απαντήσεις: (1) Ψευδής, πχ. για την συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & \text{αν } x=0 \text{ ή } y=0\\ 1, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

δηλαδή η f είναι σταθερά ίση με 1 εκτός των αξόνων που είναι 0. έχουμε

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

και ομοίως $f_y(0,0) = 0$. Όμως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$. Αυτό μπορούμε να το δούμε με δύο τρόπους:

<u>1ος τρόπος</u>: Με χρήση του ορισμού. Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ θα έπρεπε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Όμως κινούμενοι στην ευθεία $y = x$ έχουμε

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,x)}{\sqrt{x^2+x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{2}|x|} = +\infty.$$

<u>2ος τρόπος</u>: Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ θα έπρεπε να ήταν και συνεχής στο $(0,0)$, δηλαδή

$$\lim_{(x,y)\to(0.0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

Όμως, όπως προηγουμένως, κινούμενοι στην ευθεία $y = x$ έχουμε

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

(2) Αληθής, από γνωστό θεώρημα.

(3) Ψευδής, μπορεί η συνάρτηση να έχει κατευθυνόμενη παράγωγο $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0,y_0)$ κατά οποιαδήποτε κατεύθυνση $\mathbf{u}$ του $\mathbb{R}^2$ και να μην είναι καν συνεχής στο (x_0,y_0). Πχ, έστω

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \neq 0 \text{ και } y = x^2 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

(δηλαδή η f είναι σταθερά 0 εκτός από τα σημεία της παραβολής $y = x^2$ με $x \neq 0$, όπου ισούται με 1). Τότε για κάθε $\mathbf{u} = (u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$, έχουμε

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tu_1,tu_2)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

αφού για $t \neq 0$ και t αρκετά κοντά στο 0, το σημείο (tu_1,tu_2) δεν ανήκει στην $y = x^2$. Όμως η f δεν είναι συνεχής στο 0, αφού κινούμενοι στην παραβολή $y = x^2$ το $\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = 1 \neq 0 = f(0,0)$.

(4) Ψευδής, ο τύπος $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)u_1 + f_y(x_0,y_0)u_2$, όπου $\mathbf{u} = (u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2$ μοναδιαίο, ισχύει αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0,y_0) αλλά μπορεί να μην ισχύει όταν η f δεν είναι. Πχ, έστω

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \\ \frac{y^2}{x}, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Τότε $f(x,0) = f(0,y) = 0$ και άρα $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. Όμως αν θεωρήσουμε την κατεύθυνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ τότε $f(tu_1, tu_2) = \frac{t}{\sqrt{2}}$ για κάθε $t \neq 0$ και άρα

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t}{\sqrt{2}}}{t} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(5) Αληθής. Πράγματι, αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ τότε θα είχαμε $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = au_1 + bu_2$, για κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ μοναδιαίο, όπου $a = f_x(x_0, y_0)$ και $b = f_y(x_0, y_0)$.

Άσκηση 5. *Εξετάστε αν υπάρχουν τα όρια* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y}$ *και* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

Απαντήσεις: Το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y}$ δεν υπάρχει. Πράγματι όταν $y = x$ έχουμε

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x^2}{x+x} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

ενώ αν $y = -x + x^2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + (-x+x^2)^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + x^4 - 2x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0}(2 + x^2 - 2x) = 2$$

Το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ υπάρχει και είναι ίσο με 0. Πράγματι,

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{x^2}{x^2+y^2}|x| + \frac{y^2}{x^2+y^2}|y| \leq |x| + |y|$$

και άρα, αφού $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(|x|+|y|) = 0$, από τον κανόνα παρεμβολής, έπεται ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$$

Άσκηση 6. *Έστω* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Η* f *είναι παραγωγίσιμη στο* $(0,0)$ *και* $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$.

(2) *Ισχύει ότι*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Απάντηση: (1) $\Rightarrow$ (2): Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

και άρα αφού $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

(2) $\Rightarrow$ (1): Έστω ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Τότε, κινούμενοι στον άξονα των x,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{|x|}=0$$

που σημαίνει ότι

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0 \tag{1}$$

και

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{-x}=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0 \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$$

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $f_y(0,0)=0$.

Άσκηση 7. *Έστω η συνάρτηση $f(x,y)=xe^{xy}$.*

(1) *Βρείτε τις $f_x(x,y)$ και $f_y(x,y)$. Είναι η f παραγωγίσιμη;*
(2) *Βρείτε το διάνυσμα της κλίσης $\nabla f(1,1)$ στο $(1,1)$ και υπολογίστε τις κατευθύνσεις $\mathbf{u}$ ως προς τις οποίες η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο $(1,1)$ γίνεται μέγιστη και ελάχιστη.*

Απάντηση: (1) Έχουμε $f_x(x,y)=e^{xy}+xye^{xy}$ και $f_y(x,y)=x^2e^{xy}$. Επειδή οι f_x και f_yείναι συνεχείς συναρτήσεις η f είναι παραγωγίσιμη.

(2) Έχουμε $f_x(1,1)=2e$ και $f_y(1,1)=e$. Άρα $\nabla f(1,1)=(2e,e)$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη ισχύει ότι

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)\cdot\mathbf{u}$$

για κάθε $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\|=1$ και σε κάθε $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. Άρα από την ανισότητα Cauchy–Schwarz η $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(1,1)$ λαμβάνει μέγιστη τιμή για $\mathbf{u}=\dfrac{\nabla f(1,1)}{\|\nabla f(1,1)\|}=\left(2/\sqrt{5},1/\sqrt{5}\right)$ και ελάχιστη για $\mathbf{u}=-\dfrac{\nabla f(1,1)}{\|\nabla f(1,1)\|}=-\left(2/\sqrt{5},1/\sqrt{5}\right)$.

Άσκηση 8. *Υπολογίστε το πολυώνυμο Taylor της $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ τάξης 2 με κέντρο το $(1,0)$ και εξετάστε αν υπάρχει το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(x^2+y^2)}{(x-1)^2+y^2}$.*

Απάντηση: Έχουμε

$$f_x(x,y)=\frac{2x}{x^2+y^2},\quad f_y(x,y)=\frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$f_{xx}(x,y)=\frac{2(x^2+y^2)-2x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{yy}(x,y)=\frac{2(x^2+y^2)-2y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xy}(x,y)=(f_x)_y=\frac{-2x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Άρα

$$f_x(1,0)=2, \quad f_y(1,0)=0, \quad f_{xx}(1,0)=-2, \quad f_{yy}(1,0)=2, \quad f_{xy}(1,0)=0$$

οπότε το πολυώνυμο Taylor της $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ τάξης 2 με κέντρο το $(1,0)$ είναι το

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= f(1,0)+f_x(1,0)(x-1)+f_y(1,0)y \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(1,0)(x-1)^2+2f_{xy}(1,0)(x-1)y+f_{yy}(1,0)y^2\right) \\ &= 2(x-1)-(x-1)^2+y^2 \end{aligned}$$

Απο το Θεώρημα Taylor έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x^2+y^2)-\left(2(x-1)-(x-1)^2+y^2\right)}{(x-1)^2+y^2}=0$$

Άρα αν υπήρχε το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x^2+y^2)}{(x-1)^2+y^2}$, τότε θα υπήρχε και το

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{2(x-1)-(x-1)^2+y^2}{(x-1)^2+y^2}$$

και θα ήταν ίσα. Όμως το παραπάνω όριο δεν υπάρχει αφού για $x=1+u$ με $u\neq 0$, $u\to 0$ και $y=0$ το όριο ισούται με

$$\lim_{u\to 0}\frac{2u-u^2}{u^2}=\lim_{u\to 0}\left(\frac{2}{u}\right)-1$$

το οποίο δεν υπάρχει (αφού $\displaystyle\lim_{u\to 0^+}\left(\frac{2}{u}\right)=+\infty$ ενώ $\displaystyle\lim_{u\to 0^-}\left(\frac{2}{u}\right)=-\infty$).

Άρα το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x^2+y^2)}{(x-1)^2+y^2}$ δεν υπάρχει.

Άσκηση 9. *Έστω $n\in\mathbb{N}$ και $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ C^n συνάρτηση τέτοια ώστε όλες οι μερικές της παράγωγοι τάξης $n+1$ είναι μηδέν. Δείξτε ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ n.*

Απάντηση: Το πολυώνυμο Taylor της f τάξης n με κέντρο το $(0,0)$ δίνεται από τον τύπο

$$T_n(x,y)=f(0,0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}f_{x^{k-j}y^j}\,(0,0)\,x^{k-j}y^j$$

όπου $f_{x^{k-j}y^j}\,(0,0)$ είναι η k-τάξης μερική παράγωγος της f στο $(0,0)$ όπου παραγωγίζουμε ως προς y j-φορές και τις υπόλοιπες $k-j$ παραγωγίζουμε ως προς x (από το Θεώρημα Schwarz δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία παραγωγίζουμε ως προς τις μεταβλητές x και y παρά μόνο το πλήθος των παραγωγίσεων). Από τον Τύπο Taylor έχουμε ότι για κάθε $(x,y)\neq(0,0)$ υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f(x,y)=T_n(x,y)+\frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}f_{x^{n+1-j}y^j}\,(\xi x,\xi y)\,x^{n+1-j}y^j$$

Από υπόθεση έχουμε ότι $f_{x^{n+1-j}y^j}=0$ για όλα τα $k=0,\dots,n+1$ και άρα $f(x,y)=T_n(x,y)$ για κάθε $(x,y)\neq(0,0)$. Επειδή και στο $(0,0)$, $T_n(0,0)=f(0,0)$ έχουμε ότι $f(x,y) = T_n(x,y)$ για όλα τα $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ και άρα η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ n.

Άσκηση 10. *Έστω C^2 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες (i) Το $(0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο για την f, δηλαδή $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, (ii) $f_{xx}(x,y) = f_{yy}(x,y) = f(x,y) \geq 0$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι το $(0,0)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου για την f.*

Απάντηση: Έστω $(x,y) \neq (0,0)$. Από τον Τύπο Taylor έχουμε ότι υπάρχει (ξ,η) στο ανοικτό ευθ. τμήμα με άκρα τα $(0,0)$ και (x,y) τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right) \\ &= f(0,0) + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right) \end{aligned}$$

Αφού $f_{xx} = f_{yy} = f_{xy} \geq 0$, θέτοντας

$$a = f_{xx}(\xi,\eta) = f_{yy}(\xi,\eta) = f_{xy}(\xi,\eta)$$

έχουμε ότι $a \geq 0$ και

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right) \\ &= f(0,0) + \frac{a}{2}\left(x^2 + 2xy + y^2\right) = f(0,0) + \frac{a}{2}(x+y)^2 \geq f(0,0) \end{aligned}$$

Άρα επειδή το (x,y) είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του $\mathbb{R}^2$ διάφορο του $(0,0)$ έπεται ότι η f έχει στο $(0,0)$ ολικό ελάχιστο.

Άσκηση 11. *Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. Αν η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο (x_0,y_0) δείξτε ότι υπάρχουν δύο ακολουθίες (x_n,y_n) και (x'_n,y'_n) στον $\mathbb{R}^2$ τέτοιες ώστε*

$$\lim(x_n,y_n) = \lim(x'_n,y'_n) = (x_0,y_0) \quad \textit{και} \quad f(x'_n,y'_n) < f(x_0,y_0) < f(x_n,y_n)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απάντηση: Αφού η f δεν έχει ούτε τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο στο (x_0,y_0) έπεται ότι σε κάθε περιοχή του (x_0,y_0) υπάρχουν σημεία (x,y) και (x',y') με $f(x',y') < f(x_0,y_0) < f(x,y)$. Ειδικότερα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ στον ανοικτό δίσκο κέντρου (x_0,y_0) και ακτίνας $r_n = 1/n$ μπορούμε να βρούμε (x_n,y_n) και (x'_n,y'_n) με $f(x'_n,y'_n) < 0 < f(x_n,y_n)$. Επειδή $1/n \to 0$ έπεται ότι $\lim_{n\to+\infty}(x_n,y_n) = \lim_{n\to+\infty}(x'_n,y'_n) = (x_0,y_0)$.

Άσκηση 12. *Δώστε παραδείγματα C^2-συναρτήσεων $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα*

$$\Delta(0,0) = f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - f_{xy}(0,0)^2 = 0$$

και στο σημείο $(0,0)$ η f έχει (α) τοπικό ελάχιστο (β) τοπικό μέγιστο (γ) σαγματικό σημείο.

<u>*Απάντηση:*</u> (α) Έστω $f(x,y) = x^4 + y^4$. Έχουμε $f_x(x,y) = 4x^3$, $f_{xx}(x,y) = 12x^2$, $f_y(x,y) = 4y^3$, $f_{yy}(x,y) = 12y^2$, $f_{xy}(x,y) = 0$. Άρα $\Delta(0,0) = 0$. Όμως, επειδή $f(0,0) = 0$ και $f(x,y) \geq 0$, η f έχει στο $(0,0)$ (ολικό) μέγιστο. (β) Ομοίως για την $f(x,y) = -x^4 - y^4$. (γ) Θεωρούμε την $f(x,y) = x^4 - y^4$. Εύκολα ελέγξουμε ότι $\Delta(0,0) = 0$. Όμως το $f(0,y) < f(0,0) < f(x,0)$ για κάθε $x, y \neq 0$ και άρα το $(0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο (αφού $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ αλλά δεν είναι τοπικό ακρότατο αφού σε κάθε περιοχή του $(0,0)$ υπάρχουν σημεία της μορφής $(x,0)$ και $(0,y)$ με $x, y \neq 0$.

Ασκηση 13. *Βρείτε και ταξινομήστε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης* $f(x,y) = x^4 - 4xy + 2y^2 - 10$.

<u>*Απάντηση:*</u> Έχουμε $f(x,y) = x^4 - 4xy + 2y^2 - 10$ και άρα

$$f_x(x,y) = 4x^3 - 4y, f_y(x,y) = -4x + 4y,$$

$$f_{xx}(x,y) = 12x^2,\ f_{xy}(x,y) = -4,\ f_{yy}(x,y) = 4$$

και άρα

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y) = 48x^2 - 16 \tag{3}$$

Τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι λύσεις του συστήματος

$$x^3 - y = 0$$

$$-x + y = 0$$

απ΄ όπου

$$y = x$$

και

$$x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x + 1 \text{ ή } x = -1$$

Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι τα $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$. Από την (3) έχουμε

$$\Delta(0,0) < 0, \quad \Delta(1,1) = \Delta(-1,-1) > 0$$

Επειδή $f_{xx}(1,1) = f_{xx}(-1,-1) > 0$ έχουμε ότι τα σημεία $(-1,-1)$ είναι τοπικά ελάχιστα για την f ενώ το $(0,0)$ σαγματικό.

Ασκηση 14. *Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα των Πεπλεγμένων συναρτήσεων (για δύο μεταβλητές) δείξτε ότι υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση* $f : I \to (0,+\infty)$, *όπου* I *ένα ανοικτό υποδιάστημα του* $(0,+\infty)$ *με κέντρο το* $x_0 = 1$, *με τις ιδιότητες* $f(x) = x^{f(x)}$ *για κάθε* $x \in I$ *και* $f(1) = f'(1) = 1$.

<u>*Απάντηση:*</u> Θέτοντας $y = f(x)$ η σχέση $f(x) = x^{f(x)}$ γράφεται $y = x^y \Leftrightarrow x^y - y = 0$. Ορίζουμε λοιπόν την συνάρτηση

$$F(x,y) = x^y - y$$

με $x, y > 0$. Παρατηρούμε ότι το σημείο $(1,1)$ είναι λύση της $F(x,y) = 0$, δηλαδή $F(1,1) = 0$. Επιπλέον έχουμε

$$F_x(x,y) = yx^{y-1} \text{ και } F_y(x,y) = \ln x \cdot x^y - 1$$

και άρα η F είναι C^1 συνάρτηση και $F_y(1,1) = -1 \neq 0$.

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θεωρήματος των Πεπλεγμένων συναρτήσεων και άρα από το θεώρημα αυτό έχουμε ότι η F λύνεται τοπικά στο $(1,1)$ ως προς y. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχουν ανοικτά διαστήματα $I \subseteq (0,+\infty)$ και $J \subseteq (0,+\infty)$ με κέντρο το $x_0 = 1$ και $y_0 = 1$ αντίστοιχα και μια C^1 συνάρτηση $f : I \to J$ τέτοια ώστε: (α) $f(1) = 1$ και (β) για κάθε $(x,y) \in I \times J$, ισχύει ότι

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$$

Συνεπώς $x^{f(x)} - f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^{f(x)}$, για κάθε $x \in I$. Τέλος, από τον τύπο της παραγώγου της f έχουμε

$$f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}|_{y=f(x)}$$

για κάθε $x \in I$ και άρα $f'(1) = -\dfrac{F_x(1,1)}{F_y(1,0)} = -\dfrac{1}{-1} = 1$.

Άσκηση 15. *Εξετάστε αν υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : I \to (0,+\infty)$, όπου I ένα ανοικτό υποδιάστημα του $(0,+\infty)$ με κέντρο το $x_0 = 2$, με τις ιδιότητες $f(2) = 4$ και $x^{f(x)} = f(x)^x$.*

Απάντηση: Θεωρούμε την συνάρτηση $F(x,y) = x^y - y^x$ για $x, y > 0$. Παρατηρούμε ότι $F(2,4) = 0$. Επίσης,

$$F_x(x,y) = yx^{y-1} - y^x \ln y \;\; \text{και} \;\; F_y(x,y) = x^y \ln x - xy^{x-1}$$

Άρα η F είναι C^1. Επιπλέον $F_y(2,4) = 16 \ln 2 - 8 \neq 0$. Άρα από το Θεώρημα της Πεπλεγμένης συνάρτησης η εξίσωση $F(x,y) = 0$ (δηλαδή η εξίσωση $x^y = y^x$) είναι επιλύσιμη ως προς y σε μια περιοχή του $(2,4)$. Με άλλα λόγια υπάρχουν ανοικτά διαστήματα I και J του $(0,+\infty)$ με κεντρα τα $x_0 = 2$ και $y_0 = 4$ αντίστοιχα και μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : I \to J$ τέτοια ώστε $f(2) = 4$ και $x^{f(x)} = f(x)^x$ για κάθε $x \in I$.

Άσκηση 16. *Δείξτε ότι η εξίσωση $x^2 e^y + y - 2 = 0$ ορίζει πεπλεγμένα σε μια περιοχή του σημείου $(0,2)$ μια μοναδική παραγωγίσιμη συνάρτηση $y = f(x)$. Βρείτε τον τύπο της $f'(x)$ και εξηγείστε γιατί η f έχει ολικό μέγιστο στο $x = 0$.*

Απάντηση: Έστω $F(x,y) = x^2 e^y + y - 2$. Έχουμε $F_x(x,y) = 2xe^y$ και $F_y(x,y) = x^2 e^y + 1$ και συνεπώς η F είναι C^1. Επίσης $F(0,2) = 0$ και $F_y(0,2) = 1 \neq 0$. Από το Θεώρημα των Πεπλεγμένων συναρτήσεων η εξίσωση $F(x,y) = 0$ ορίζει πεπλεγμένα σε μια περιοχή του σημείου $(0,2)$ μια μοναδική παραγωγίσιμη συνάρτηση $y = f(x)$. Ακριβέστερα, υπάρχουν ανοικτά διαστήματα I και J με κέντρα τα $x_0 = 0$ και $y_0 = 2$ και μια C^1 συνάρτηση $f : I \to J$ τέτοια ώστε $f(0) = 2$ και αν $(x,y) \in I \times J$ τότε

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x).$$

Επίσης

$$f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}_{y=f(x)} = -\frac{2xe^y}{x^2 e^y + 1}|_{y=f(x)}$$

για κάθε $x \in I$. Συνεπώς, $f'(0) = 0$. Επίσης, αν $x \in I$ και $x < 0$ (αντ. $x > 0$) τότε $f'(x) > 0$ (αντ. $f'(x) < 0$). Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα αριστερά του 0 και γνησίως φθίνουσα δεξιά του 0. Συνεπώς η f έχει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 0$.