ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ, ΣΕΜΦΕ, 12/06/2023

Θέμα 1. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:
(α) (**1 μον.**) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, (β) (**1 μον.**) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

ΛΥΣΗ: (α) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο Λόγου. Έχουμε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

και άρα

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

Συνεπώς, η σειρά συγκλίνει.

(β) Έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Επειδή η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ αποκλίνει.

Θέμα 2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και $f(x,y) = \dfrac{x^3 + xy^2 + y^3}{x^2 + y^2}$ αν $(x,y) \neq (0,0)$.

(α) (**1 μον.**) Δείξτε, με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνσης παραγώγου, ότι η f έχει στο $(0,0)$ κατά κατεύθυνση παράγωγο $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)$ για κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$.

(β) (**1 μον.**) Εξετάστε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

ΛΥΣΗ: (α) Από τον ορισμό της κατευθυνόμενης παραγώγου έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3(u_1^3 + u_1u_2^2 + u_2^3)}{t^2u_1^2 + t^2u_2^2}}{t} = u_1^3 + u_1u_2^2 + u_2^3$$

(β) Από το (α) για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 = (1,0)$ παίρνουμε $f_x(0,0) = 1$. Ομοίως για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 = (0,1)$ παίρνουμε $f_y(0,0) = 1$. Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ θα έπρεπε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = f_x(0,0)u_1 + f_y(0,0)u_2 = u_1 + u_2$$

για κάθε μοναδιαίο $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ και άρα από το (α) θα είχαμε

$$u_1^3 + u_1u_2^2 + u_2^3 = u_1 + u_2$$

για κάθε $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$, άτοπο (πχ για $u_1 = u_2 = 1/\sqrt{2}$ είναι εύκολο να δούμε ότι η παραπάνω ισότητα δεν ισχύει).

Θέμα 3. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και $f(x,y) = \dfrac{|x|\sin x + y^3}{|x| + |y|}$ αν $(x,y) \neq (0,0)$.

(1) (**0,5 μον.**) Εξετάστε αν η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.
(2) (**0,5 μον.**) Βρείτε τις $f_x(0,0)$ και $f_y(0,0)$.
(3) (**1 μον.**) Εξετάστε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

ΛΥΣΗ: (1) Για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$ έχουμε

$$|f(x,y)| \leq \frac{|x||\sin x| + |y|^3}{|x| + |y|} \leq \frac{|x|}{|x| + |y|}|\sin x| + \frac{|y|}{|x| + |y|}|y|^2 \leq |\sin x| + |y|^2$$

Επειδή $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$ και $\lim_{y\to 0} y^2 = 0$ από την παραπάνω ανισότητα παίρνουμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

και άρα η f είναι συνεχής.

(2) Από τον ορισμό των μερικών παραγώγων στο $(0,0)$ έχουμε

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \frac{\sin x}{x} = 1$$

και

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{y^3}{|y|}}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{|y|} = \lim_{y\to 0} \frac{|y|^2}{|y|} = \lim_{y\to 0} |y| = 0$$

(3) Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ θα έπρεπε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Όμως, πλησιάζοντας το $(0,0)$ κινούμενοι στην ημιευθεία $y = x$ με $x > 0$ έχουμε $f(x,y) = f(x,x) = \dfrac{x\sin x + x^3}{2x} = \dfrac{\sin x + x}{2}$ και άρα

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x,x) - x}{\sqrt{x^2 + x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin x + x^2}{2} - x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x\to 0^+} x - 2\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

Θέμα 4. (1) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^2-συνάρτηση.

(α) (**0,5 μον.**) Αν $f_x + f_y = 0$ δείξτε ότι $f_{xx} = f_{yy}$.

(β) (**0,5 μον.**) Αν $|f_{xx}(x,y)| = |f_{yy}(x,y)|$ και $|f_{xx}(x,y)| < |f_{xy}(x,y)|$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ έχει η f τοπικά ακρότατα?

(2) (**1 μον.**) Μελετήστε ως προς τα τοπικά ακρότατα την συνάρτηση $f(x,y) = x^3 - xy + y^2$.

ΛΥΣΗ: (1) (α) Έχουμε $f_x + f_y = 0 \Rightarrow f_x = -f_y$. Παραγωγίζοντας ως προς x παίρνουμε

$$f_x = -f_y \Rightarrow f_{xx} = -f_{yx} \tag{1}$$

Ομοίως, $f_x + f_y = 0 \Rightarrow f_y = -f_x$ και παραγωγίζοντας ως προς y παίρνουμε,

$$f_y = -f_x \Rightarrow f_{yy} = -f_{xy} \tag{2}$$

Επειδή η f είναι C^2, από το Θεώρημα Schwarz έχουμε $f_{xy} = f_{yx}$ και άρα από τις (1) και (2) παίρνουμε ότι $f_{xx} = f_{yy}$.

(β) Για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ έχουμε

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y) = f_{xx}^2(x,y) - f_{xy}^2(x,y) < 0$$

και άρα κάθε (x,y) είναι σαγματικό σημείο. Συνεπώς η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

(2) Έχουμε $f_x(x,y) = 3x^2 - y$ και $f_y(x,y) = -x + 2y$. Το σύστημα

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 0 \\ f_y(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

δίνει

$$\begin{aligned} 3x^2 - y &= 0 \\ x &= 2y \end{aligned}$$

και άρα $12y^2 - y = 0 \Leftrightarrow y(12y-1) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ή $y = 1/12$. Συνεπώς τα κρίσιμα σημεία για την f είναι τα

$$(0,0) \text{ και } \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$$

Επειδή $f_{xx}(x,y) = 6x$, $f_{yy}(x,y) = 2$ και $f_{xy}(x,y) = -1$ έχουμε

$$\Delta(0,0) = f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - f_{xy}^2(0,0) = -1 < 0$$

και άρα το $(0,0)$ είναι σαγματικό ενώ

$$\Delta\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) = f_{xx}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) f_{yy}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) - f_{xy}^2\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) = 2 - 1 > 0$$

και άρα αφού επιπλέον $f_{xx}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) = 1 > 0$ στο $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.

Θέμα 5. (1) (**1 μον.**) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^2-συνάρτηση. Αν $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ και $f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = 2$ εξετάστε αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$$

(*Υπόδειξη*: Μπορείτε να θέσετε $b = f_{xy}(0,0)$ και να διακρίνετε δύο περιπτώσεις $b = 0$ και $b \neq 0$)

(2) (**1 μον.**) Δείξτε ότι η εξίσωση $x^2e^y + x^2 + y - 1 = 0$ ορίζει πεπλεγμένα σε μια περιοχή του σημείου $(0,1)$ μια μοναδική παραγωγίσιμη συνάρτηση $y = f(x)$. Βρείτε τον τύπο της $f'(x)$ και δείξτε ότι η f έχει ολικό μέγιστο στο $x = 0$.

ΛΥΣΗ: (1) Θέτουμε $b = f_{xy}(0,0)$. Το πολυώνυμο Taylor τάξης $n = 2$ με κέντρο το $(0,0)$ δίνεται από τον τύπο

$$T_2(x,y) = \frac{1}{2}\left(2x^2 + 2bxy + 2y^2\right) = x^2 + bxy + y^2$$

Από το Θεώρημα Taylor παίρνουμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - T_2(x,y)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - x^2 - y^2 - bxy}{x^2+y^2} = 0$$

και άρα θα πρέπει

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{f(x,y)}{x^2+y^2} - 1 - b\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = 0 \tag{3}$$

Αν $b = 0$ τότε από την (3) παίρνουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2} = 1$$

Αν $b \neq 0$, το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει. Πράγματι, αν το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2} = \ell$ υπήρχε (πεπερασμένο ή άπειρο) τότε από την (3) θα έπρεπε να υπάρχει και το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{\ell-1}{b}$ Αλλά το όριο αυτό δεν υπάρχει αφού στην ευθεία $y = x$ έχουμε $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$, ενώ στην ευθεία $y = -x$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = -\frac{1}{2}$.

(2) Έστω $F(x,y) = x^2e^y + x^2 + y - 1$. Έχουμε $F(0,1) = 0$, $F_x(x,y) = 2xe^y + 2x = 2x(e^y + 1)$ και $F_y(x,y) = x^2e^y + 1$. Συνεπώς η F είναι C^1 και $F_y(0,1) = 1 \neq 0$. Από το Θεώρημα των Πεπλεγμένων συναρτήσεων η εξίσωση $F(x,y) = 0$ ορίζει πεπλεγμένα σε μια περιοχή του σημείου $(0,1)$ μια μοναδική παραγωγίσιμη συνάρτηση $y = f(x)$. Δηλαδή υπάρχουν ανοικτά διαστήματα I και J με κέντρα τα σημεία $x_0 = 0$ και $y_0 = 1$ και μια C^1 συνάρτηση $f : I \to J$ με $f(0) = 1$ και τέτοια ώστε αν $(x,y) \in I \times J$ τότε

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x).$$

Επίσης

$$f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}_{y=f(x)} = -\frac{2x(e^y+1)}{x^2e^y+1}|_{y=f(x)}$$

για κάθε $x \in I$. Συνεπώς, $f'(0) = 0$. Άρα, αν $x \in I$ και $x < 0$ (αντ. $x > 0$) τότε $f'(x) > 0$ (αντ. $f'(x) < 0$) και συνωπώς η f είναι γνησίως αύξουσα αριστερά του 0 και γνησίως φθίνουσα δεξιά του 0. Άρα η f έχει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 0$.