**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι**
**ΣΕΜΦΕ, 13/9/2023**
**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ**

**Θέμα 1.** (1) ***(1 μον.)*** *Δείξτε ότι κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει στο supremum των όρων της.*

(2) ***(1 μον.)*** *Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ μη κενά και τέτοια ώστε $a \leq b$ για όλα τα $a \in A$ και όλα τα $b \in B$. Δείξτε ότι (α) το $A$ είναι άνω φραγμένο και αντίστοιχα το $B$ είναι κάτω φραγμένο. (β) Ισχύει ότι* $\sup A \leq \inf B$.

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ:** (1) Έστω $(a_n)$ αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία και έστω

$$s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

(Το $s$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου των όρων της $(a_n)$ και υπάρχει από το αξίωμα της πληρότητας του $\mathbb{R}$.)

Θα δείξουμε ότι $a_n \to s$. Σύμφωνα με τον ορισμό της σύγκλισης ακολουθίας αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ θα πρέπει να βρούμε ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - s| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Έστω λοιπόν ένα $\epsilon > 0$. Τότε $s - \epsilon < s$ και άρα το $s - \epsilon$ δεν είναι άνω φράγμα της $(a_n)$ (αφού είναι γνήσια μικρότερο του ελαχίστου άνω φράγματος της $(a_n)$). Συνεπώς δεν είναι όλοι οι όροι της $(a_n)$ μικρότεροι ή ίσοι του $s - \epsilon$ δηλαδή υπάρχει όρος γνήσια μεγαλύτερος του $s - \epsilon$. Άρα θα ισχύει

$$s - \epsilon < a_{n_0}$$

για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$. Επειδή η $(a_n)$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από τον $s$ η παραπάνω ανισότητα δίνει ότι

$$s - \epsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq s$$

για όλα τα $n \geq n_0$ και συνεπώς

$$|a_n - s| < \epsilon, \text{ για κάθε } n \geq n_0.$$

(2) (α) Από την υπόθεση έπεται ότι κάθε $b \in B$ είναι άνω φράγμα του $A$, οπότε το $A$ είναι άνω φραγμένο. Ομοίως κάθε $a \in A$ είναι κάτω φράγμα του $B$ και άρα το $B$ είναι κάτω φραγμένο.

(β) Εξ ορισμού το $\sup A$ είναι το *μικρότερο* άνω φράγμα του $A$ και άρα αφού κάθε $b \in B$ είναι άνω φράγμα του $A$, θα ισχύει ότι

$$\sup A \leq b$$

για οποιοδήποτε $b \in B$. Αυτό με την σημαίνει ότι το $\sup A$ είναι *κάτω φράγμα του* $B$ και άρα

$$\sup A \leq \inf B$$

αφού το $\inf B$ είναι εξ ορισμού το *μεγαλύτερο* κάτω φράγμα του $B$.

**Θέμα 2.** (1) ***(1 μον.)*** *Υπολογίστε το* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{n+2023}$.

(2) *Έστω* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *παραγωγίσιμη. (i) (* ***0,5 μον.)*** *Αν* $f'(x)\neq 0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *είναι σωστό ότι τότε η* $f'$ *θα διατηρεί πρόσημο ? (ii)* ***(1 μον.)*** *Αν το* $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ *υπάρχει είναι σωστό ότι το όριο αυτό θα είναι υποχρεωτικά το* $f'(x_0)$ *? Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.*

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ** (1)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{n+2023} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n+2023}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2023}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{1/2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2023}\\
&= \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{1/2}\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)^{2023} = e^{1/2}\cdot 1^{2023} = \sqrt{e}.
\end{aligned}$$

αφού

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$$

ως όριο υπακολουθίας και $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)=1.$

(2) (α) Ναί είναι σωστό από Θεώρημα Darboux: Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και $a<b\in\mathbb{R}$ με $f'(a)f'(b)<0$ τότε υπάρχει $\xi\in(a,b)$ με $f'(\xi)=0$ (ασχέτως αν η $f'$ είναι συνεχής ή όχι).

(β) Ναί είναι σωστό. Ένας τρόπος να το δούμε αυτό είναι με τον Κανόνα Hospital: Πράγματι, από τον ορισμό της Παραγώγου στο $x_0$,

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Επειδή η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$ (ως παραγωγίσιμη) το παραπάνω όριο είναι απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$. Εφαρμόζοντας τον Κανόνα Hospital έχουμε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{(f(x)-f(x_0))'}{(x-x_0)'} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to x_0} f'(x)$$

Άρα, $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0} f'(x)$.

**Θέμα 3.** (1) ***(1 μον.)*** *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(x) = x$ για κάθε $x$ ρητό και $f(x) = 0$ για κάθε $x$ άρρητο. Εξετάστε την $f$ ως προς τα σημεία συνέχειας.*

(2) ***(0,5 μον.)*** *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ με $|f(x)| > 1/\delta$ δείξτε ότι η $f$ δεν είναι συνεχής στο $x_0$.*

(3) ***(1 μον.)*** *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς και τέτοιες ώστε $\inf\{f(x) : x \in [a,b]\} = \inf\{g(x) : x \in [a,b]\}$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.*

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ** (1) Η $f$ είναι ασυνεχής σε όλα τα $x \neq 0$: Πράγματι, έστω $x_0 \neq 0$ και έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$. Έστω $(x_n)$ και $(y_n)$ δύο ακολουθίες από ρητούς και άρρητους αντίστοιχα τέτοιες ώστε $\lim x_n = \lim y_n = x_0$. (Τέτοιες ακολουθίες υπάρχουν από πυκνότητα ρητών και αρρήτων στο $\mathbb{R}$). Από Αρχή Μεταφοράς, έχουμε ότι

$$f(x_0) = \lim f(x_n) = \lim x_n = x_0 \text{ και αντίστοιχα } f(x_0) = \lim f(y_n) = \lim 0 = 0$$

άτοπο αφού $x_0 \neq 0$.

Η $f$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$: Θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης στο $x_0 = 0$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε για $\delta = \epsilon$ έχουμε ότι για κάθε $x \in [0,1]$ με $|x - 0| = x < \delta$ έπεται ότι $|f(x) - f(0)| = f(x) < \epsilon$ αφού είτε $f(x) = x$ αν $x$ άρρητος είτε $f(x) = 0$ αν $x$ ρητός.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι το $x_0 = 0$ είναι το μοναδικό σημείο συνέχειας της $f$.

(2) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτοντας $\delta = 1/n$ επιλέγουμε $x_n \in (x_0 - \dfrac{1}{n}, x_0 + \dfrac{1}{n})$ με $|f(x_n)| > 1/\delta = n$. Από το Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, (αφού $x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}$) έπεται ότι $x_n \to x_0$. Επειδή $|f(x_n)| > n$ έπεται ότι $|f(x_n)| \to +\infty$. Άρα η $f$ δεν είναι συνεχής στο $x_0$ γιατί αν ήταν, από Αρχή Μεταφοράς, θα έπρεπε $f(x_n) \to f(x_0)$ δηλαδή η $(f(x_n))$ θα ήταν φραγμένη ως συγκλίνουσα.

(3) Θέτουμε $m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\} = \inf\{g(x) : x \in [a,b]\}$. Αφού $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς μπορούμε να επιλέξουμε σημεία στο $[a,b]$ όπου η $f$ και η $g$ λαμβάνουν την ελάχιστη τιμή. Αν μπορούμε να επιλέξουμε κοινό σημείο $x_0$, όπου οι $f$ και $g$ λαμβάνουν την κοινή ελάχιστη τιμή τους τότε $f(x_0) = g(x_0) = m$. Αν όχι έστω $x_1 \neq x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1) = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$ και $g(x_2) = \inf\{g(x) : x \in [a,b]\}$. Θέτουμε $h(x) = f(x) - g(x)$ και παρατηρούμε ότι $h(x_1) = f(x_1) - g(x_1) = m - g(x_1) < 0$ ενώ $h(x_2) = f(x_2) - g(x_2) = f(x_2) - m > 0$. Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0$ μεταξύ των $x_1, x_2$ με $h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = 0$ δηλαδή $f(x_0) = g(x_0)$.

**Θέμα 4.** (1) *(i) (**1 μον.**) Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους έως και δεύτερης τάξης. Δείξτε ότι*

$$\int_a^b f(x)g''(x)\ dx = f(b)g'(b) - f'(b)g(b) - f(a)g'(a) + f'(a)g(a) + \int_a^b f''(x)g(x)\ dx$$

*(ii) (**1 μον.**) Αν $f(x) = \arctan x$ υπολογίστε το ολοκλήρωμα*

$$\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \cos x\ dx.$$

(2) *(**1 μον.**) Αν $n \in \mathbb{N}$ υπολογίστε το όριο* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^{2n}} \sin t^3 \cdot \cos t^2\ dt}{x^{8n}}$.

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ** (1) (i) Χρησιμοποιούμε τον κανόνα Ολοκλήρωσης κατά παράγοντες δύο φορές ως εξής:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g''(x)\ dx &= f(x)g'(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g'(x)\ dx \\ &= f(x)g'(x)|_a^b - \left( f'(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f''(x)g(x)\ dx \right) \\ &= (f(x)g'(x) - f'(x)g(x))\,|_a^b + \int_a^b f''(x)g(x)\ dx \\ &= f(b)g'(b) - f'(b)g(b) - f(a)g'(a) + f'(a)g(a) + \int_a^b f''(x)g(x)\ dx\end{aligned}$$

(ii) Θέτουμε $f(x) = \arctan x$ και $g(x) = \cos x$. Τότε $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $g'(x) = -\sin x$ και $g''(x) = -\cos x$. Άρα από το (i),

$$\begin{aligned}-\int_0^\pi f(x)\cos x\ dx &= -f(\pi)\sin\pi - f'(\pi)\cos\pi + f(0)\sin 0 + f'(0)\cos 0 + \int_a^b f''(x)\cos x\ dx \\ &= \frac{1}{1+\pi^2} + \frac{1}{1+0^2} + \int_a^b f''(x)\cos x\ dx = \frac{1}{1+\pi^2} + 1 + \int_a^b f''(x)\cos x\ dx\end{aligned}$$

και άρα

$$\int_0^\pi (f(x) + f''(x))\cos x\ dx = \int_0^\pi f(x)\cos x\ dx + \int_0^\pi f''(x)\cos x\ dx = -\frac{1}{1+\pi^2} - 1$$

(2) Έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^{2n}} \sin t^3 \cdot \cos t^2\ dt}{x^{8n}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\int_0^{x^{2n}} \sin t^3 \cdot \cos t^2\ dt\right)'}{(x^{8n})'} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^{2n})^3 \cdot \cos(x^{2n})^2 \cdot (x^{2n})'}{8nx^{8n-1}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x^{6n} \cdot \cos x^{4n} \cdot 2nx^{2n-1}}{8nx^{8n-1}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x^{6n} \cdot \cos x^{4n}}{4x^{6n}} = \frac{1}{4} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x^{6n}}{x^{6n}} \cdot \lim_{x\to 0^+} \cos x^{4n} = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$