



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α2 (ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ & ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ)

16 Ιανουαρίου 2023

ΘΕΜΑ 1

(Α) Δίδονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): x - 1 = \frac{y-9}{-2} = z - 5$, $(\varepsilon_2): \frac{x-6}{7} = \frac{y+7}{-6} = z$. Να αποδείξετε ότι οι $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι ασύμβατες και να βρείτε τα άκρα του κοινού κάθετου ευθύγραμμου τμήματός τους. (μον. 2.0)

(Β) Θεωρούμε τη σφαίρα με κέντρο το $K(1, -1, 1)$ και ακτίνα 2. Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδό της σφαίρας στο σημείο της $A(\alpha, 0, 0)$, $\alpha < 0$. (μον. 1.2)

ΘΕΜΑ 2

(Α) Να αποδείξετε ότι τα σύνολα $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4: 2x - y + 3z + w = 0, 2z + w = 0\}$ και $W = [(2, 6, 2, -4), (1, -3, 1, 7), (1, 1, 1, 1)]$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$ και να βρείτε από μία βάση τους. Έπειτα, να περιγράψετε τα στοιχεία του υποχώρου $U \cap W$ και να βρείτε μία βάση του. (μον. 1.6)

(Β) Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας τέτοιος ώστε $A^3 + A^2 + A + I = O$. Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να λάβει η ορίζουσα του A . (μον. 0.8)

(Γ) Βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, αντιστρέφεται ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} -2-\alpha & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1-\alpha & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 1-\alpha & -4 \\ 8 & 0 & 0 & 8-\alpha \end{bmatrix}. \quad (\text{μον. } 1.0)$$

ΘΕΜΑ 3

(Α) Έστω τρεις $n \times n$ πίνακες A, B και C τέτοιοι ώστε $A^2 = A, B^2 = B, C^2 = C$ και $A + B + C = I$. Να αποδείξετε $AB = BC = CA = O$. (μον. 1.2)

(Β) Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} a & 2 & b \\ c & 2 & d \\ e & 2 & f \end{bmatrix}$ με ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Βρείτε τον πίνακα A και τις ιδιοτιμές του A που αντιστοιχούν στα παραπάνω τρία ιδιοδιανύσματα. (μον. 2.2)

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.

Διάρκεια εξέτασης: 2 h

Καλή επιτυχία!



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α2 (ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ & ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ)

1^η ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2022

ΘΕΜΑ 1

(Α) Δίδονται οι ευθείες: $(\varepsilon_1): x - 6 = \frac{-7-y}{-6} = z$, $(\varepsilon_2): x - 1 = \frac{9-y}{2} = z - 5$. Να εξετάσετε αν οι παραπάνω ευθείες είναι συνεπίπεδες. **(0.6 μον.)**

(Β) Βρείτε το συμμετρικό σημείο του $M(1,1,1)$ ως προς το επίπεδο $(\Pi): 2x - y + 3z = 1$. **(1.0 μον.)**

(Γ) Θεωρούμε τις σφαίρες $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$, $(S_2): x^2 + y^2 - 2y + z^2 = k^2 - 1$. Βρείτε τις τιμές του k για τις οποίες οι παραπάνω σφαίρες εφάπτονται εξωτερικά. **(0.7 μον.)**

(Δ) Βρείτε τις τιμές του k για τις οποίες το επίπεδο (Π) του ερωτήματος (Β) και η σφαίρα (S_2) του ερωτήματος (Γ) έχουν κοινά σημεία. **(1.0 μον.)**

ΘΕΜΑ 2

(Α) Να επιλύσετε το γραμμικό σύστημα $(\Sigma): \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \\ 2x + 3y + az = 3 \end{cases}$ για τις διάφορες τιμές της πραγματικής παραμέτρου a . **(1.5 μον.)**

(Β) Να αποδείξετε ότι τα σύνολα $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4: y = 2x - z \text{ και } z = w\}$ και $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4: x = z = w\}$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$. Έπειτα, βρείτε μία βάση και τη διάσταση για τον καθένα από τους διανυσματικούς χώρους U , W , $U \cap W$, $U + W$. **(1.7 μον.)**

ΘΕΜΑ 3

(Α) Αν ένας πίνακας A έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 4)^2$ κι ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 4)$, τι συμπεραίνετε για τον πίνακα $B = A^{-1} + 3I$; **(μον. 1.0)**

(Β) Βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$ για την οποία ο πίνακας $A(a) = \begin{bmatrix} a - 9 & 35 - a & a + 19 \\ -9 & 26 & 9 \\ 8 - a & a - 17 & -a - 2 \end{bmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος (με μετασχηματισμό ομοιότητας). Έπειτα, για την τιμή του a που θα βρείτε, κατασκευάστε έναν πίνακα X τέτοιον ώστε $X^3 = A(a)$. **(μον. 2.5)**

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.

Διάρκεια εξέτασης: 2 h

Καλή επιτυχία!



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α2 (ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ & ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ)

24 Ιανουαρίου 2022

ΘΕΜΑ 1

(A) Να κατασκευάσετε την προβολή της ευθείας $(\varepsilon): \frac{x-5}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-1}{4}$ πάνω στο επίπεδο $(\Pi): x + 2y - 2z + 14 = 0$. Έπειτα, να υπολογίσετε τη συμμετρική ευθεία της (ε) ως προς το επίπεδο (Π) . (μον. 1.6)

(B) Να αποδείξετε ότι το επίπεδο $(\Pi): 3x + 4z - 25 = 0$ τέμνει τη σφαίρα $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 99$ και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα της τομής $(S) \cap (\Pi)$. Έπειτα, να βρείτε ένα επίπεδο (Π') που εφάπτεται στη σφαίρα (S) και είναι παράλληλο προς το επίπεδο (Π) . (μον. 1.6)

ΘΕΜΑ 2

(A) Να αποδείξετε ότι τα σύνολα $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4: y - 2x - z = 0, 2z + w = 0\}$ και $W = [(1, 1, 1, 1), (1, 5, 1, -5), (2, 4, 2, -1)]$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$ και να βρείτε από μία βάση τους. Έπειτα, να βρείτε από μία βάση των υποχώρων $U \cap W$ και $U + W$. (μον. 1.8)

(B) Βρείτε τον πίνακα A που έχει συμπληρωματικό τον $adj(A) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 8 & -2 & -4 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$. (μον. 1.5)

ΘΕΜΑ 3

(A) Βρείτε τις ιδιοτιμές ενός 3×3 αντιστρέψιμου πίνακα A , αν γνωρίζετε ότι μία από αυτές ισούται με 1, $trace(A) = 6$ και $trace(A^2) = 14$. Στη συνέχεια, βρείτε τις ιδιοτιμές των πινάκων $A^{-1} + 5I$, $adj(A)$ και $A^3 - 3A^2 + 2A - 3I$. (μον. 1.0)

(B) Βρείτε την τιμή της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$ για την οποία ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3-a & 14 & a-2 \\ 0 & 8 & 0 \\ -a+2 & -14 & a-1 \end{bmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος (με μετασχηματισμό ομοιότητας). Έπειτα, για την τιμή του a που θα βρείτε, κατασκευάστε έναν πίνακα X τέτοιον ώστε $X^3 = A(a)$. (μον. 2.5)

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.

Διάρκεια εξέτασης: 2 h

Καλή επιτυχία!