ΠΡΟΟΔΟΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
8/12/2022

Θέμα 1. (**3 μον.**) *Απαντήστε στα επόμενα ερωτήματα δικαιολογώντας την απάντησή σας.*

(1) Υπάρχει φραγμένη ακολουθία που δεν συγκλίνει?

[**Απάντηση:** *Ναί, πχ. η* $a_n = (-1)^n$.]

(2) Υπάρχει φραγμένη ακολουθία που καμία της υπακολουθία δεν συγκλίνει?

[**Απάντηση:** *Όχι, από το Θεώρημα Bolzano–Weierstrass κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*]

(3) Είναι σωστό ότι κάθε αύξουσα ακολουθία αρνητικών αριθμών είναι συγκλίνουσα?

[**Απάντηση:** *Ναί, η ακολουθία είναι άνω φραγμένη από το μηδέν και από το Θεώρημα Μονότονης σύγκλισης κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.*]

(4) Υπάρχει συνεχής και μη σταθερή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) \notin \mathbb{Q}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$?

[**Απάντηση:** *Όχι, αν $a < b$ και $f(a) \neq f(b)$ τότε από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών η f ως συνεχής συνάρτηση θα λαμβάνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$ και συνεπώς (από την Πυκνότητα των ρητών αριθμών) θα λαμβάνει και ρητές τιμές.*]

(5) Έστω $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής έπεται τότε ότι είναι και φραγμένη ?

[**Απάντηση:** *Όχι, πχ. η $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1/x$.*]

(6) Υπάρχει $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f'(x) < -1$ για κάθε $x < 0$ και $f'(x) > 1$ για κάθε $x > 0$?

[**Απάντηση:** *Όχι, από το Θεώρημα Darboux η f' έχει την ιδιότητα των Ενδιαμέσων Τιμών.*]

Θέμα 2. (1) (**1 μον.**) Έστω (a_n) συγκλίνουσα ακολουθία τέτοια ώστε $a_{2n} = \sqrt[n]{2n}$. Ποιό είναι το $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$?

[**Απάντηση:** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n}\right) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}\right)\left(\cdot \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right) = 1 \cdot 1 = 1$.]

(2) (**1 μον.**) Βρείτε το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{3n^2}\right)^{2n^2}$.

[**Απάντηση:** *Από τον Ορισμό του e έχουμε* $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ *και άρα* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{3n^2}\right)^{3n^2} = e$ *(ως όριο υπακολουθίας). Οπότε* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{3n^2}\right)^{2n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{3n^2}\right)^{3n^2}\right]^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}}$.]

(3) (**1 μον.**) Έστω $a_1 > 0$ και $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3 + a_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η (a_n) είναι μονότονη και φραγμένη και υπολογίστε το όριό της.

[**Απάντηση:** *Με επαγωγή βλέπουμε ότι* $a_n > 0$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και άρα* $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3 + a_n} < \dfrac{a_n}{3} < a_n$ *και άρα η* (a_n) *είναι γνησίως φθίνουσα. Επειδή είναι και κάτω φραγμένη από το μηδέν, από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης είναι συγκλίνουσα. Έστω* $a = \lim a_n$ *το όριό της. Τότε* $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3 + a_n} \Rightarrow a = \dfrac{a}{3 + a} \Rightarrow a^2 + 3a = a \Leftrightarrow a^2 + 2a = 0 \Rightarrow a(a + 2) = 0 \Rightarrow a = 0$ *ή* $a = -2$. *Επειδή* $a_n > 0 \Rightarrow a \geq 0$ *οπότε* $a = 0$.]

Θέμα 3. (α) (**1 μον.**) Δείξτε ότι το $\lim\limits_{x \to 0} \cos \dfrac{1}{x}$ δεν υπάρχει.

[**Απάντηση:** *Έστω* $x_n = (2n\pi + \pi)^{-1}$ *και* $x'_n = (2n\pi)^{-1}$. *Τότε* $x_n, x'_n \neq 0$, $\lim x_n = \lim x'_n = 0$ *και* $-1 = \lim \cos \dfrac{1}{x_n} \neq \lim \cos \dfrac{1}{x'_n} = 1$.]

(β) (**1 μον.**) Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 2, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

δεν έχει κανένα σημείο συνέχειας.

[**Απάντηση:** *Έστω* $x_0 \in \mathbb{R}$ *και έστω* (x_n) *και* (x'_n) *δύο ακολουθίες από ρητούς και άρρητους αντίστοιχα που συγκλίνουν στο* x_0. *Τότε* $\lim f(x_n) = 1$ *ενώ* $\lim f(x'_n) = 0$. *Από την Αρχή Μεταφοράς η* f *δεν μπορεί να είναι συνεχής στο* x_0.

Θέμα 4. (α) (**1 μον.**) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με f' συνεχή. Αν $f'(q) = 0$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$ δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

[**Απάντηση:** *Αρκεί να δειχθεί ότι* $f'(x) = 0$, *για όλα τα* $x \in \mathbb{R}$. *Πράγματι, έστω* $x_0 \in \mathbb{R}$ *και έστω* (x_n) *ακολουθία από ρητούς με* $\lim x_n = x_0$. *Από Αρχή Μεταφοράς* $f'(x_0) = \lim f'(x_n) = 0$.]

(β) (**1 μον.**) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η f να είναι σταθερή συνάρτηση στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

[**Απάντηση:** *Αρκεί να δειχθεί ότι η* f *είναι παραγωγίσιμη και* $f'(x) = 0$, *για όλα τα* $x \in \mathbb{R}$. *Πράγματι, έστω* $x_0 \in \mathbb{R}$ *και έστω* $\delta_0 > 0$ *με την ιδιότητα η* f *να είναι σταθερή στο* $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$. *Τότε* $f(x) = f(x_0)$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *με* $|x - x_0| < \delta_0$ *και άρα*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x_0)}{x - x_0} = 0]$$