ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι ΣΕΜΦΕ, 31/1/2023

Θέμα 1. (1) ***(1 μον.)*** *Έστω* $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ *μη κενά. Αν το* B *είναι φραγμένο δείξτε ότι και το* A *είναι φραγμένο και ισχύουν τα εξής: (i)* $inf B \leq \inf A$ *και (ii)* $\sup A \leq \sup B$.

(2) ***(1,5 μον.)*** *Έστω* $A \subseteq \mathbb{R}$ *μη κενό και άνω φραγμένο. (i) Αν* $\sup A \notin A$ *δείξτε ότι για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχουν* $a_1, a_2 \in A$ *με* $a_1 \neq a_2$ *και* $|a_1 - a_2| < \varepsilon$. *(ii) Ισχύει το ίδιο αν* $\sup A \in A$?

Θέμα 2. (1) ***(1 μον.)*** *Έστω* (a_n) *φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. (i) Δείξτε ότι η* (a_n) *είναι συγκλίνουσα με* $\lim_{n\to\infty} a_n \geq 0$. *(ii) Αν επιπλέον η ακολουθία* $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ *είναι συγκλίνουσα με* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ *δείξτε ότι* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(2) *(i)* ***(0,5 μον.)*** *Δείξτε ότι* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

(ii) ***(1 μον.)*** *Αν* $f(t) = \arctan\left(e^{t^2}\right)$ *υπολογίστε το όριο* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^n}{n!} \int_0^{n!/n^n} f(t)\, dt\right)$.

Θέμα 3. (1) ***(1 μον.)*** *Έστω* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ολοκληρώσιμη με* $f(x) \geq 0$ *για κάθε* $x \in [a, b]$. *Αν* $f(q) = 0$ *για κάθε* q *ρητό στο* $[a, b]$ *δείξτε, με χρήση του ορισμού του ολοκληρώματος, ότι* $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = 0$.

(2) ***(1,5 μον.)*** *Έστω* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ολοκληρώσιμη με* $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\, dt \neq 0$ *και* $\lambda > 0$. *Δείξτε ότι υπάρχει* $\xi \in (a, b)$ *με* $\displaystyle\int_a^\xi f(t)\, dt = \lambda \int_\xi^b f(t)\, dt$.

Θέμα 4. (1) ***(1 μον.)*** *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα* $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 + 2x + 5}\, dx$.

(2) ***(1,5 μον.)*** *Έστω* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *συνεχής συνάρτηση. Αν* $f(a) = \int_a^b f(t)\, dt = 0$ *δείξτε ότι υπάρχει* $\xi \in (a, b)$ *τέτοιο ώστε* $f(\xi) = \dfrac{\int_a^\xi f(t)\, dt}{\xi - a}$. *(Υπόδειξη: Θεωρείστε την συνάρτηση* $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ *με* $\phi(a) = 0$ *και* $\phi(x) = \dfrac{\int_a^x f(t)\, dt}{x - a}$ *για κάθε* $x \in (a, b]$.*)*

Θέμα 5. (1) ***(1 μον.)*** *Έστω η συνάρτηση* $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$, *αν* $x \neq 0$ *και* $f(0) = 0$. *(i) Εξετάστε αν η* f *είναι παραγωγίσιμη. (ii) Υπάρχει το όριο* $\lim_{x\to 0} f'(x)$?

(2) ***(1,5 μον.)*** *Έστω* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *συνεχής με* $f(0) = 0$ *και παραγωγίσιμη στο 0 με* $f'(0) = 4$. *Δείξτε ότι υπάρχει* $\delta > 0$ *τέτοιο ώστε* $x^2 < \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt < 3x^2$, *για κάθε* $x \in (0, \delta)$.

ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ ΤΕΣΣΕΡΑ (4) ΑΠΟ ΤΑ ΠΑΡΑΠΑΝΩ 5 ΘΕΜΑΤΑ.
Διάρκεια Εξέτασης: 2 h και 15′