Το πρόβλημα του δέντρου Steiner

Βελτιστοποίηση Δικτύων

24 Φεβρουαρίου 2023

Ελάχιστο διατρέχον δέντρο (Minimum Spanning Tree)

[Minimum Spanning Tree - MST] *Δεδομένου ενός μη προσανατολισμένου γράφου* $G(V, E)$ *με βάρη στις ακμές, να βρεθεί ένα δέντρο ελάχιστου κόστους που περιλαμβάνει όλους τους κόμβους του* G.

- Το πρόβλημα του ελάχιστου διατρέχοντος δέντρου είναι ιδιαίτερα εύκολο. Μπορεί να λυθεί με τους αλγόριθμους του Prim και του Kruskal [GH85].
- Αμφότεροι οι αλγόριθμοι έχουν γραμμική πολυπλοκότητα $O(|E| \log |V|)$.

Το πρόβλημα του ελάχιστου δέντρου Steiner

[Minimum Steiner Tree - SMT]
Δεδομένου ενός μη προσανατολισμένου γράφου $G(V, E)$ με βάρη στις ακμές, να βρεθεί ένα δέντρο ελάχιστου κόστους που περιλαμβάνει ένα δεδομένο υποσύνολο κόμβων του G.

- Οι κόμβοι που πρέπει να περιλαμβάνονται λέγονται *τερματικοί (terminals)*.
- Το SMT είναι NP-complete (με αναγωγή από το EXACT COVER BY 3-SETS) και περιλαμβάνεται στην αρχική συλλογή του Karp [GJ79; Kar72].
- Είναι δημοφιλές στην περιοχή των τηλεπικοινωνιών. Μπορεί να αποδώσει το πρόβλημα σύνδεσης τερματικών με μια κεντρική μονάδα ή το πρόβλημα της διανομής περιεχομένου, π.χ. video, από μια πηγή προς συγκεκριμένους χρήστες ή κόμβους εντός ενός δικτύου.

Minimum Steiner Tree problem

[Minimum Steiner Tree - SMT]
ΠΕΡΙΣΤΑΣΗ: Γράφος $G(V, E)$, βάρος $w(e) \in Z_0^+$ για κάθε ακμή $e \in E$, υποσύνολο $R \subset V$.
ΣΚΟΠΟΣ: Να βρεθεί το ελάχιστου βάρους υπο-δέντρο του G που περιλαμβάνει όλες τις κορυφές του R.

Ευκλείδιο ελάχιστο δέντρο Steiner - ESMT

[Ευκλείδιο ελάχιστο δέντρο Steiner - ESMT] *ΠΕΡΙΣΤΑΣΗ: Σύνολο $P \subseteq R^2$. ΣΚΟΠΟΣ: Να βρεθεί πεπερασμένο σύνολο $Q \subseteq R^2$, τέτοιο ώστε να υπάρχει ένα διατρέχον δέντρο ελάχιστου βάρους για το σύνολο κορυφών $P \cup Q$, όπου το βάρος μιας ακμής $\{(x_1, x_2), (y_1, y_2)\}$ είναι το Ευκλείδιο μήκος $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.*

- Το πρόβλημα είναι NP-hard, δεν είναι γνωστό αν ανήκει στο NP [GJ79].
- Το πρόβλημα είναι NP-complete αν χρησιμοποιηθεί μια διακριτοποιημένη εκδοχή της Ευκλείδιας μετρικής.
- Ο Arora έχει δώσει ένα PTAS γι’ αυτό το πρόβλημα [Aro96].

Ορθογώνιο ελάχιστο δέντρο Steiner - RSMT

[Ορθογώνιο ελάχιστο δέντρο Steiner (rectilinear minimum Steiner tree - RSMT)]
ΠΕΡΙΣΤΑΣΗ: Σύνολο $P \subseteq R^2$.
ΣΚΟΠΟΣ: Να βρεθεί πεπερασμένο σύνολο $Q \subseteq R^2$, τέτοιο ώστε να υπάρχει ένα διατρέχον δέντρο ελάχιστου βάρους για το σύνολο κορυφών $P \cup Q$, όπου το βάρος μιας ακμής $\{(x_1, x_2), (y_1, y_2)\}$ είναι $|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.

- Το πρόβλημα είναι NP-complete.
- Ο Arora έχει δώσει ένα PTAS γι' αυτό το πρόβλημα [Aro96].

Προσεγγίσεις για το γραφοθεωρητικό SMT

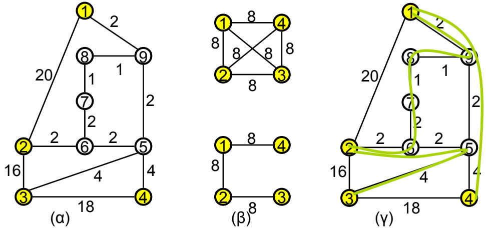
- Το πρόβλημα του ελάχιστου δέντρου Steiner (SMT) είναι γενίκευση του προβλήματος του ελάχιστου διατρέχοντος δέντρου (MST). Επομένως το ελάχιστο δέντρο Steiner δεν είναι πιο μακρύ από το MST.
- Ο Choukmane (το 1978, [El-78]), και ο Kou κ.α. (το 1981, [KMB81]) πρότειναν ένα προσεγγιστικό σχήμα με λόγο $\rho < 2$.
- Ο Choukmane απέδειξε ότι $\rho = 2(1 - 1/k)$, όπου k είναι ο αριθμός των τερματικών, ενώ ο Kou έδειξε ότι $\rho = 2(1 - 1/\ell)$, όπουℓ είναι το πλήθος των φύλλων στο βέλτιστο δέντρο.

Choukmane's algorithm

Δεδομένου ενός μη προσανατολισμένου γράφου $G = (V, E, d)$ και ενός συνόλου τερματικών $S \subseteq V$, ο επόμενος αλγόριθμος βρίσκει ένα δέντρο Steiner.

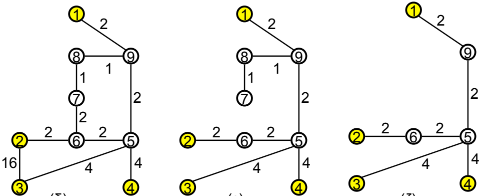
1. Κατασκευάζουμε τον πλήρη μη προσανατολισμένο γράφο $G_1(S, E_1, d_1)$, όπου το μήκος της ακμής $(s_i, s_j) \in E_1$ τίθεται ίσο με το μήκος του ελάχιστου μονοπατιού μεταξύ s_i και s_j.
2. Υπολογίζεται το MST για τον $G_1(S, E_1, d_1)$.
3. Δημιουργείται από τον G ένας υπογράφος για τον G_S ως εξής: Μια ακμή του G παραμένει στον G_S αν είναι μέρος κάποιου ελάχιστου μονοπατιού που αντιστοιχεί σε μια ακμή του προηγούμενου βήματος.
4. Για τον G_S υπολογίζεται ένα MST T_S.
5. Αποκόπτονται όσα φύλλα του δέντρου T_S δεν είναι τερματικοί κόμβοι. Στο τέλος όλα τα φύλλα είναι τερματικοί κόμβοι.

Παράδειγμα για τον αλγόριθμο Kou



- Ο επόμενος γράφος δίνεται στο (α). Οι κόμβοι 1,2,3,4 είναι τερματικοί.
- Ο πλήρης γράφος μεταξύ τερματικών δίνεται στο άνω τμήμα του (β), μαζί με αντίστοιχα ελάχιστα μήκη μονοπατιών.
- Επιλέγεται ένα MST στο κάτω τμήμα του (β) (ενδεχόμενες ισοπαλίες επιλύονται με τυχαία επιλογή).
- Τα αντίστοιχα ελάχιστα μονοπάτια φαίνονται χρωματισμένα στον αρχικό γράφο.

Συνέχεια του παραδ. Kou



(δ) (ε) (ζ)

- Ο γράφος G_S του 3ου βήματος υπολογίζεται στο (δ) και
- το MST που προκύπτει είναι στο (ϵ).
- Τελικά απομακρύνονται τα άχρηστα φύλλα στο (in ζ).

Μεταγενέστερα αποτελέσματα

- Ο Alexander Zelikovsky βελτίωσε το λόγο σε $11/6 \approx 1.83$ το 1993.
- Οι Berman και Ramaiyer βελτίωσαν σε $16/9 \approx 1.78$ το 1994.
- Ο Zelikovsky επέτυχε $1 + \ln 2 \approx 1.69$ το 1995, και αργότερα τον ίδιο χρόνο 1.644 με τον Karpinsky.
- Οι Proemel και Steiger βελτίωσαν σε 1.59 το 1999.
- Οι Zelikovsky και Robbins $1 + \ln 3/2 \approx 1.55$ το 2000.
- Οι Byrka, Grandoni, Rothvoß & Sanità κατέβασαν το λόγο σε $\ln 4 + \epsilon < 1.39$ το 2010 [Byr+10].

Μετρικό δέντρο Steiner

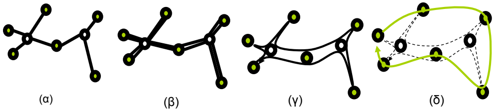
- Τόσο η ορθογώνια όσο και η Ευκλείδια εκδοχή του προβλήματος Steiner είναι ειδικές περιπτώσεις του μετρικού προβλήματος.
- Το μετρικό πρόβλημα του δέντρου Steiner είναι ειδική περίπτωση του γραφοθεωρητικού προβλήματος, καθώς μπορεί να αποδοθεί από ένα μη προσανατολισμένο τέλειο γράφο, του οποίου οι ακμές ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα.

Προσέγγιση του μετρικού δέντρου Steiner μέσω του MST

Θεώρημα:
Το μήκος του MST δεν ξεπερνάει το διπλάσιο του μήκους του ελάχιστου δέντρου Steiner.

Η απόδειξη είναι παρόμοια με εκείνη του αντίστοιχου θεωρήματος του TSP [Vaz13].

Απόδειξη



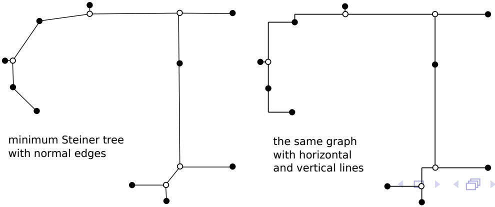
- Έστω το SMT (Steiner minimum tree) όπως στο (α). Αυτό το δέντρο περιλαμβάνει όλους τους τερματικούς κόμβους (κόκκινους) και, πιθανώς, κάποιους άλλους κόμβους (λευκούς). Έστω OPT το μήκος του SMT.
- Διπλασιάζουμε τις ακμές του SMT όπως στο (β), και κατασκευάζουμε ένα μονοπάτι Euler, στο (γ). Το μήκος του προφανώς είναι $2 \times$ OPT.
- Κατασκευάζουμε ένα Χαμιλτώνειο κύκλο μόνο πάνω στους τερματικούς κόμβους, παραλείποντας τα σημεία Steiner όπως στο (δ). Το μήκος αυτού του κύκλου είναι $\leq 2 \times$ OPT.
- Απομακρύνουμε μια ακμή από τον κύκλο δημιουργώντας έτσι ένα νέο, πιο κοντό, διατρέχον δέντρο. Το μήκος του είναι $\leq 2 \times$ OPT.

Ορθογώνιο δέντρο Steiner

- *Rectilinear (Manhattan) Steiner Minimum Tree (RSMT)*
  Δεδομένου ενος συνόλου τερματικών κόμβων στο R^2, ο σκοπός είναι να κατασκευαστεί ένας γράφος ελάχιστου μήκους που θα ενώνει όλους τους τερματικούς κόμβους, ενδεχομένως με την προσθήκη νέων κόμβων που καλούνται *σημεία Steiner*. Ως κριτήρια απόστασης λαμβάνεται η νόρμα ℓ^1:

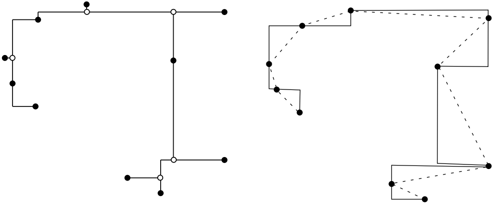
$$d[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

- Το παραπάνω είναι ισοδύναμο με τη χρήση μόνο ορθογώνιων και κατακόρυφων γραμμών των οποίων το μήκος λαμβάνεται ως έχει.
- Στο επόμενο παράδειγμα τα μαύρα σημεία είναι οι τερματικοί κόμβοι ενώ τα λευκά είναι τα σημεία Steiner.

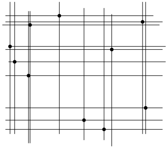


Άσκηση

Να αφαιρέσετε όλα τα σημεία Steiner από τον προηγούμενο γράφο. Να σχεδιάσετε τον νέο γράφο και να εξηγήσετε γιατί έχει μεγαλύτερο μήκος από τον αρχικό γράφο.



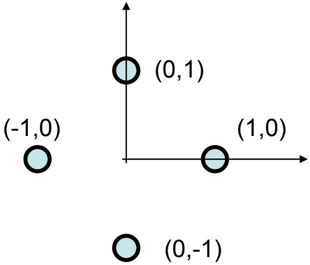
RSMT - παρατηρήσεις



- Το ελάχιστο δέντρο Steiner είναι μέρος του κάνναβου (grid) που αποτελείται από τις οριζόντιες και κατακόρυφες γραμμές τις διερχόμενες από τους τερματικούς κόμβους.
- Τα σημεία Steiner τοποθετούνται στην διασταύρωση τέτοιων γραμμών.
- Ο Hwang [Hwa76] έδειξε ότι το μήκος του RMST (minimum rectilinear spanning tree) δεν μπορεί να ξεπεράσει περισσότερες από 3/2 φορές το μήκος του RSMT (minimum rectilinear Steiner tree).
- Το πρόβλημα εύρεσης του ορθογώνιου δέντρου Steiner είναι NP-complete [GJ77].

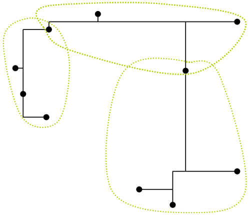
Άσκηση

Δεδομένων των πιο κάτω τεσσάρων τερματικών κόμβων να υπολογίσετε το λόγο του μήκους του RMST προς το μήκος του RSMT.



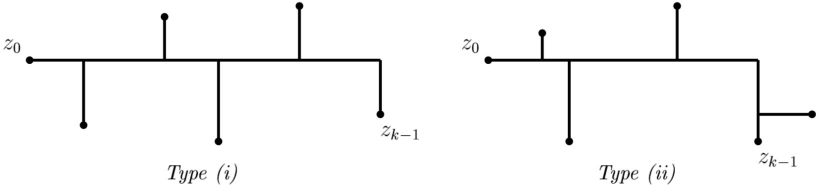
Ιδιότητες του RSMT

- Το ελάχιστο δέντρο Steiner σχηματίζεται με τη συνένωση ενός αριθμού από *πλήρη δέντρα Steiner* (*full Steiner trees* - FSTs).
- Σε ένα FST όλα τα φύλλα είναι τερματικοί κόμβου, ενώ όλοι οι άλλοι κόμβοι είναι σημεία Steiner.
- Στο επόμενο παράδειγμα υπάρχει ένα SMT που αποτελείται από τρία FST. Οι μαύροι κόμβοι είναι οι τερματικοί. Όλα τα άλλα σημεία διασταύρωσης είναι σημεία Steiner.



Hwang's FST topologies I

- Ο Hwang έχει δείξει ότι υπάρχουν μόνο δύο δυνατές τοπολογίες για τα FST (και δύο εκφυλισμένες ειδικές περιπτώσεις της μιας τοπολογίας) [Zac98]. Οι δύο τοπολογίες είναι οι εξής:



- Αμφότερες αποτελούνται από ένα κύριο άξονα («πόδι» -leg) που αρχίζει με ένα τερματικό κόμβο σημειωμένο με z_0 και μια γραμμή κατακόρυφη προς το πόδι. Υπάρχει ένα δεύτερο πιο κοντό πόδι που καταλήγει επίσης σε τερματικό κόμβο, εδώ στον z_{k-1}.

Hwang's FST topologies II

- Στον τύπο (i) υπάρχουν $k-2$ κάθετα τμήματα που καταλήγουν εναλλάξ από τις δύο πλευρές στο κύριο πόδι.
- Στον τύπο (ii) υπάρχουν $k-3$ εναλλασσόμενα τμήματα στο κύριο πόδι και ένα τμήμα που καταλήγει στο κοντό πόδι.
- Η πρώτη εκφυλισμένη παραλλαγή του (i) έχει κοντό πόδι μηδενικού μήκους.
- Η δεύτερη εκφυλισμένη παραλλαγή του (i) αποτελείται από ένα σταυρό που συνδέει ακριβώς 4 τερματικούς κόμβους.

Αλγόριθμοι που βασίζονται στα FST

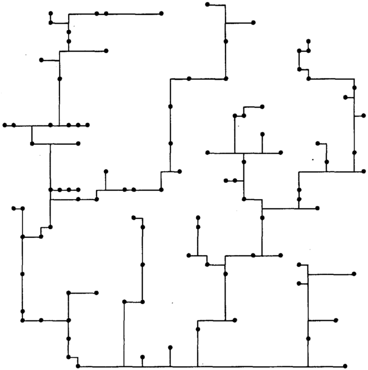
Μια κατηγορία αλγορίθμων χρησιμοποιεί δύο φάσεις:

1. Δημιουργείται ένα μικρό σύνολο F από FSTs, που περιλαμβάνει τουλάχιστον ένα SMT ως υποσύνολο.
2. Στη δεύτερη φάση διασύνδεσης των FST ευρίσκεται ένα ελάχιστου μήκους υποσύνολο F^* του F τέτοιο ώστε τα FST του F^* να διασυνδέουν το Z, όπου Z είναι ο κάνναβος των τερματικών κόμβων.

Exercise

Exercise 1

Ο γράφος του επόμενου σχήματος είναι ένα δέντρο Steiner από το [Ric89]. Να το αποσυνθέσετε σε FSTs και να κατονομάσετε τον τύπο καθενός.



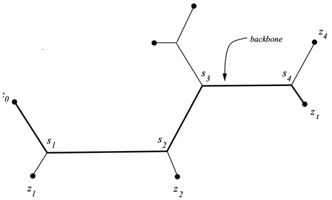
Ευκλείδιο δέντρο Steiner

- Οι Du και Hwang έχουν δείξει στην [DH92] ότι το ελάχιστο διατρέχον δέντρο στο επίπεδο (EMST) δεν μπορεί να υπερβεί σε μήκος $2/\sqrt{3} \approx 1,155$ φορές το μήκος του Ευκλείδιου ελάχιστου δέντρου Steiner (ESMT). Ο λόγος (EMST)/(ESMT) ονομάζεται «λόγος Steiner» (Steiner ratio).
- Επομένως το αναμενόμενο κέρδος από τη χρήση σημείων Steiner δεν είναι σημαντικό, αφού δεν περνάει το 15%. Δεδομένου ότι το EMST είναι δέντρο Steiner, όποιος αλγόριθμος υπολογίζει το EMST είναι επίσης καλός αλγόριθμος για το ESMT.

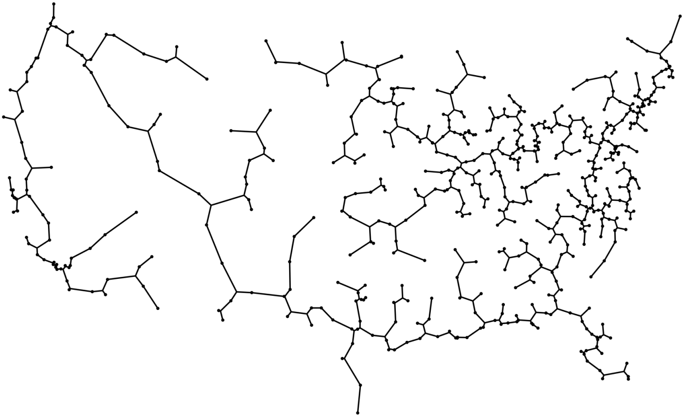
Άσκηση: Να υπολογίσετε το λόγο Steiner όταν οι τερματικοί κόμβοι αποτελούν κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

Πλήρη δέντρα Steiner για το Ευκλείδιο πρόβλημα

- Ένα δέντρο Steiner συντίθεται από «Πλήρη Ευκλείδια Δέντρα Steiner» (Euclidean Full Steiner Trees - EFSTs) [WWZ00].
- Ένα EFST για k τερματικούς κόμβους ($3 \leq k \leq n$) αποτελείται από ένα «σκελετό» (backbone) μεταξύ ενός τερματικού κόμβου που καλείται «ρίζα» (root) και ενός τερματικού κόμβου που είναι η «μύτη» (tip).
- Ο σκελετός είναι ένα μονοπάτι που περνάει από ένα ή περισσότερα σημεία Steiner. Σε κάθε σημείο Steiner ο σκελετός περιστρέφεται κατά 60^0 είτε προς τα δεξιά είτε προς τα αριστερά.



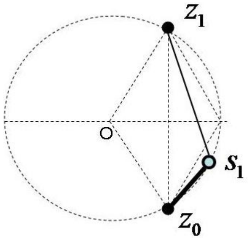
Παράδειγμα



- 532 πόλεις των Η.Π.Α. [WWZ00].

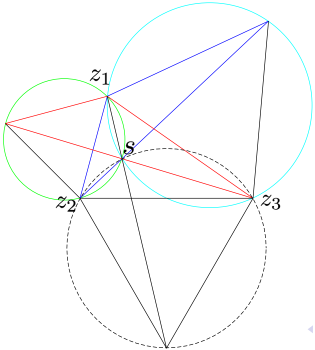
Παρατηρήσεις από την Ευκλείδια γεωμετρία

- Θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε ένα σκελετό για μια ρίζα z_0 με $k-1$ άλλους τερματικούς κόμβους $z_1, \ldots, z_{k-1}$.
- Το πρώτο σημείο Steiner s_1 θα εμφανισθεί κάπου στον γεωμετρικό τόπο των σημείων που σχηματίζουν γωνία $z_0 s_1 z_1$ ίση με 120^0.
- Ο γεωμετρικός τόπος είναι ένα τόξο $z_0 z_1$ 120^0 πάνω σε κύκλο με κέντρο O, που είναι τέτοιο ώστε $(z_0 O z_1) = 2\pi/3$.



Ένα παράδειγμα με τρία σημεία

- Θα βρούμε τη θέση του σημείου Steiner s που ελαχιστοποιεί το $(\overline{z_1 s}) + (\overline{z_2 s}) + (\overline{z_3 s})$.
- Μπορεί να βρεθεί στο σημείο τομής των τριών κύκλων, σύμφωνα με όσα είπαμε στην προηγ. σελίδα.
- Το σημείο τομής είναι γνωστό ως *σημείο Fermat*.



Βιβλιογραφία, I

C. El-Arbi. «Une heuristique pour le problème de l'arbre de Steiner». Στο: *RAIRO-Operations Research* 12.2 (1978), σσ. 207–212.

S. Arora. «Polynomial time approximation schemes for Euclidean TSP and other geometric problems». Στο: *Foundations of Computer Science, 1996. Proceedings., 37th Annual Symposium on*. IEEE. 1996, σσ. 2–11.

J. Byrka, F. Grandoni κ.ά. «An improved LP-based approximation for Steiner tree». Στο: *Proceedings of the forty-second ACM symposium on Theory of computing*. ACM. 2010, σσ. 583–592.

D.-Z. Du και F. K. Hwang. «A proof of the Gilbert-Pollak conjecture on the Steiner ratio». Στο: *Algorithmica* 7.1-6 (1992), σσ. 121–135.

Βιβλιογραφία, II

M. R. Garey και D. S. Johnson. *Computers and intractability: a guide to NP-completeness*. 1979.

M. R. Garey και D. S. Johnson. «The rectilinear Steiner tree problem is NP-complete». Στο: *SIAM Journal on Applied Mathematics* 32.4 (1977), σσ. 826–834.

R. L. Graham και P. Hell. «On the history of the minimum spanning tree problem». Στο: *Annals of the History of Computing* 7.1 (1985), σσ. 43–57.

F. K. Hwang. «On Steiner minimal trees with rectilinear distance». Στο: *SIAM journal on Applied Mathematics* 30.1 (1976), σσ. 104–114.

R. M. Karp. «Reducibility among combinatorial problems». Στο: *Complexity of computer computations*. Springer, 1972, σσ. 85–103.

Βιβλιογραφία, III

L. Kou, G. Markowsky και L. Berman. «A fast algorithm for Steiner trees». Στο: *Acta informatica* 15.2 (1981), σσ. 141–145.

D. Richards. «Fast heuristic algorithms for rectilinear Steiner trees». Στο: *Algorithmica* 4.1-4 (1989), σ. 191.

V. V. Vazirani. *Approximation algorithms*. Springer Science & Business Media, 2013.

D. M. Warme, P. Winter και M. Zachariasen. «Exact algorithms for plane Steiner tree problems: A computational study». Στο: *Advances in Steiner trees*. Springer, 2000, σσ. 81–116.

M. Zachariasen. «Algorithms for plane Steiner tree problems». Διδακτορική διατρ. Datalogisk Institut, Københavns Universitet, 1998.

Βιβλιογραφία, IV

Τελευταία ενημέρωση: 24 Φεβρουαρίου 2023 08:17