ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι ΣΕΜΦΕ 1/9/2021
ΟΜΑΔΑ Α

Να απαντήσετε σε 4(ΤΕΣΣΕΡΑ) από τα παρακάτω 5 θέματα και να γράφετε Ονοματεπώνυμο και ΑΜ στο γραπτό σας.

ΘΕΜΑ 1. (α) Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό άνω φραγμένο και $s_0 \in \mathbb{R}$. Αν για κάθε $s > s_0$ ισχύει ότι $X \cap (s, +\infty) = \emptyset$ δείξτε ότι (i) Το s_0 είναι άνω φράγμα του X. (ii) $\sup X \leq s_0$.

(β) Έστω $a, b > 0$ και $Y = \{ax + \frac{b}{x} : x > 0\}$. (i) Δείξτε ότι το Y είναι κάτω φραγμένο και δεν είναι άνω φραγμένο. (ii) Υπολογίστε το $\inf Y$.

Απόδειξη. (α) (i) Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι το s_0 δεν είναι άνω φράγμα του X. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $x_0 \in X$ με $s_0 < x_0$. Αλλά τότε αν θέσουμε $s = \frac{s_0 + x_0}{2}$ έχουμε $s > s_0$ και $s < x_0 \Rightarrow x_0 \in X \cap (s, +\infty) \Rightarrow X \cap (s, +\infty) \neq \emptyset$, άτοπο.

(ii) Το $\sup X$ είναι εξ ορισμού το μικρότερο άνω φράγμα του X και άρα είναι μικρότερο ή ίσο οποιουδήποτε άνω φράγματος του X άρα και του s_0.

(β) (i) Το Y αποτελείται από θετικούς αριθμούς και άρα είναι κάτω φραγμένο από το μηδέν. Επίσης δεν είναι άνω φραγμένο. Πράγματι, έστω $M \in \mathbb{R}$. Τότε για $x = \frac{|M|+1}{a} > 0$, έχουμε $ax + \frac{b}{x} > ax = |M| + 1 > M$.

(ii) Θέτουμε $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ για $x > 0$. Τότε $f'(x) = a - \frac{b}{x^2}$. Άρα $f'\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = 0$ και το σημείο $x_0 = \sqrt{\frac{b}{a}}$ είναι στάσιμο σημείο της f. Επειδή $f'(x) < 0$ για $x < x_0$ και $f'(x) > 0$ για $x > x_0$ έπεται ότι η f παρουσιάζει στο x_0 ολικό ελάχιστο. Άρα

$$\inf\{f(x) : x > 0\} = \min\{f(x) : x > 0\} = f(x_0) = a\sqrt{\frac{b}{a}} + b\sqrt{\frac{a}{b}} = 2\sqrt{ab}$$

□

ΘΕΜΑ 2. Έστω $0 < \lambda < e$ και έστω η ακολουθία $a_n = \dfrac{\lambda^n n!}{n^n}$, $n \in \mathbb{N}$.
Δείξτε ότι:
(i) Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ για όλα τα $n \geq n_0$.
(ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.
(iii) Η (a_n) είναι συγκλίνουσα και $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Απόδειξη. (i) Έχουμε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lambda^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{\lambda^n n!} = \lambda \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{\lambda}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Επειδή η ακολουθία $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ είναι γνησίως αύξουσα και συγκλίνει στον $e > \lambda$ θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $\lambda < \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$ και το ζητούμενο έπεται.

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\lambda}{e} < 1.$

(iii) Έχουμε $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και από το (ii), η (a_n) είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα η (a_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το μηδέν. Συνεπώς η (a_n) συγκλίνει σε ένα πραγματικό αριθμό $a \in \mathbb{R}$. Επειδή $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε και $a \geq 0$. Επίσης η (a_{n+1}) είναι υπακολουθία της (a_n) και άρα $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$. Αν ήταν $a \neq 0$ θα έπρεπε $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_{n+1}}{\lim_{n\to\infty} a_n} = \frac{a}{a} = 1$ άτοπο. Άρα $a = 0$. □

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 3 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f^{(3)}(x) = 12$ δείξτε ότι $x^3 < f(x) < 3x^3$ για αρκετά μεγάλα $x > 0$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με την δεύτερη παράγωγο συνεχή στο 0. Έστω ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) θετικών αριθμών με $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ και $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n) - x_n}{x_n^2} = 1$.
(i) Δείξτε ότι $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = 1$ και $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$.
(ii) Υπολογίστε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$.
(iii) Χρησιμοποιώντας τον Τύπο Taylor υπολογίστε την $f''(0)$.

Απόδειξη. (α) Επειδή $\lim_{x\to+\infty} x^3 = \lim_{x\to+\infty} x^2 = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ μπορούμε να εφαρμόσουμε επαναληπτικά τον κανόνα De l'Hospital για την συνάρτηση $\dfrac{f(x)}{x^3}$ ως εξής

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f''(x)}{6x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f^{(3)}(x)}{6} = 2$$

Άρα $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^3} = 2$, που εξ ορισμού του ορίου συνάρτησης στο $+\infty$ σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$x > M \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{x^3} - 2\right| < \epsilon \Leftrightarrow 2 - \epsilon < \frac{f(x)}{x^3} < 2 + \epsilon$$

Τώρα για $\epsilon = 1$ έπεται το ζητούμενο.

(β) (i) Έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_n) - x_n}{x_n^2} &= \frac{\frac{f(x_n)}{x_n} - 1}{x_n} \\
&\Rightarrow \frac{f(x_n)}{x_n} - 1 = x_n \cdot \frac{f(x_n) - x_n}{x_n^2} \\
&\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{f(x_n)}{x_n} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} x_n \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n) - x_n}{x_n^2} = 0
\end{aligned}$$

οπότε $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = 1$. Επίσης, $f(x_n) = \dfrac{f(x_n)}{x_n} \cdot x_n$ και άρα με όμοιο τρόπο έπεατι ότι $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$.

(ii) Επειδή $x_n \to 0$ από Αρχή Μεταφοράς,

$$f(0) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$$

και

$$f'(0) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = 1$$

(iii) Από τον τύπο του Taylor (για $x = x_n$ και κέντρο $x_0 = 0$) έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\xi_n \in (0, x_n)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_n) = f(0) + f'(0)x_n + \frac{f''(\xi_n)}{2}x_n^2 = x_n + \frac{f''(\xi_n)}{2}x_n^2 \Rightarrow f''(\xi_n) = 2\frac{f(x_n) - x_n}{x_n^2}$$

Αφού $0 < \xi_n < x_n$ και $x_n \to 0$ από Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών Ακολουθιών, έπεται ότι $\lim_{n\to+\infty} \xi_n = 0$. Άρα, αφού η f'' είναι συνεχής, από Αρχή Μεταφοράς,

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} f''(x) = \lim_{n\to+\infty} f''(\xi_n) = 2 \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n) - x_n}{x_n^2} = 2$$

$\square$

ΘΕΜΑ 4. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση τέτοια ώστε σε κάθε υποδιάστημα I του $[a,b]$ υπάρχουν $x, y \in I$ με $f(x) < 1$ και $f(y) > 2$.

(α) Δείξτε ότι η f δεν έχει κανένα σημείο συνέχειας.

(β) Έστω $\underline{I}$ το κάτω ολοκλήρωμα και αντίστοιχα $\overline{I}$ το άνω ολοκλήρωμα της f. Δείξτε ότι $\underline{I} < b - a$ και $\overline{I} > 2(b-a)$.

Απόδειξη. (α) Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι η f ήταν συνεχής σε κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε από Αρχή Μεταφοράς θα έπρεπε $\lim_{n\to+\infty} f(z_n) = f(x_0)$ για οποιαδήποτε ακολουθία (z_n) με $\lim_{n\to+\infty} z_n = x_0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε $x_n, y_n \in \left(x, x+\dfrac{1}{n}\right)$ με $f(x_n) < 1$ και $f(y_n) > 2$. Επειδή $x_0 < x_n < x_0 + \dfrac{1}{n}$ από Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών έχουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$. Ομοίως $\lim_{n\to+\infty} y_n = x_0$. Άρα θα πρέπει $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = f(x_0)$. Όμως, επειδή $f(x_n) < 1$ έπεται ότι $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \le 1$ και αντίστοιχα επειδή $f(y_n) > 2$ έπεται ότι $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) \ge 2$. Άρα $f(x_0) \le 1$ και $f(x_0) \ge 2$, άτοπο.

(β) Το infimum της f σε κάθε υποδιάστημα του $[a,b]$ είναι μικρότερο του 1 ενώ το supremum μεγαλύτερο του 2. Άρα για κάθε διαμέριση $P = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ έχουμε

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = b - a$$

δηλαδή το $b-a$ είναι άνω φράγμα όλων των $L(f,P)$. Αντίστοιχα,

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) > 2\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = 2(b - a)$$

δηλαδή το $2(b-a)$ είναι κάτω φράγμα όλων των $U(f,P)$.

Εξ ορισμού $\underline{I} = \sup\{L(f,P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$ και άρα θα είναι $\underline{I} \le b - a$ (ως μικρότερο άνω φράγμα όλων των $L(f,P)$).

Αντίστοιχα, $\overline{I} = \inf\{U(f,P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$ και άρα θα πρέπει $\overline{I} \ge 2(b-a)$ (ως μεγαλύτερο κάτω φράγμα όλων των $U(f,P)$). □

ΘΕΜΑ 5. Έστω $g : [0,1] \to [2,4]$ γνησίως αύξουσα και επί. Έστω επίσης $f = g^{-1}$ η αντίστροφη συνάρτηση της g.

(i) Είναι οι f, g συνεχείς συναρτήσεις?

(ii) Αν η g έχει συνεχή παράγωγο και $\int_0^1 g(x)\,dx = 3$ υπολογίστε το $\int_2^4 f(y)\,dy$. (*Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση* $y = g(x)$, $x \in [0,1]$.)

Απόδειξη. (i) Είναι γνωστό ότι η αντίστροφη γνησίως μονότονης συνάρτησης ορισμένης σε διάστημα του $\mathbb{R}$ είναι πάντα συνεχής. Άρα αφού η g είναι γνησίως μονότονη και ορίζεται σε διάστημα του $\mathbb{R}$, η αντίστροφή της, δηλαδή η f, θα είναι συνεχής. Επιπλέον, αφού η $g : [0,1] \to [2,4]$ είναι επί, έχουμε ότι η $f = g^{-1}$ έχει πεδίο ορισμού το $[2,4]$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα (ως αντίστροφη γνησίως αύξουσας) με πεδίο ορισμού διάστημα του $\mathbb{R}$. Συνεπώς, η $g = f^{-1}$ είναι συνεχής.

Παρατήρηση: *Στην ουσία αυτό που αποδείξαμε είναι ότι αν μια γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών διάστημα του* $\mathbb{R}$ *τότε και η ίδια και η αντίστροφή της είναι συνεχείς συναρτήσεις.*

(ii) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = g(t)$, $t \in [0,1]$ και ολοκλήρωση κατά μέρη, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_2^4 f(x)\ dx = \int_0^1 f(g(t))g'(t)\ dt &= \int_0^1 tg'(t)\ dt \\ &= [tg(t)]_0^1 - \int_0^1 t'g(t)\ dt \\ &= g(1) - \int_0^1 g(t)\ dt = 4 - 3 = 1.\end{aligned}$$

□